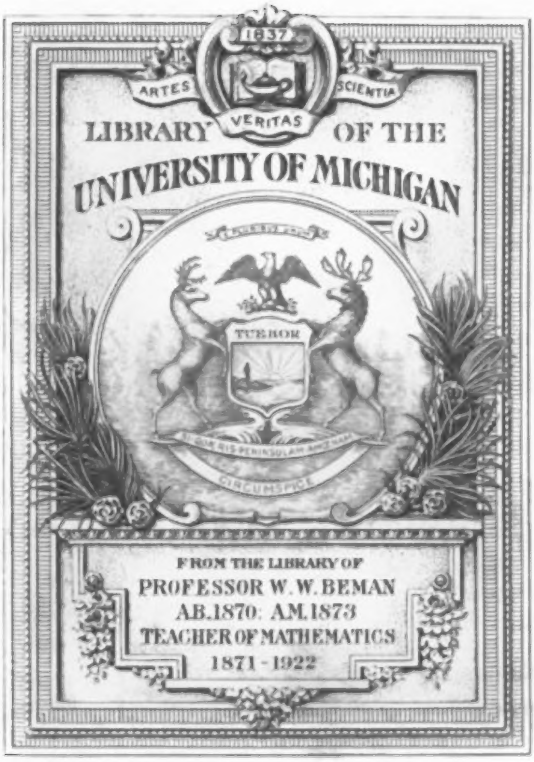


Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.A67

Digitized by Google

Archiv

der

[athematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Funfzehnter Theil.

Mit zwölf lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Separat-Conto.

1850.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des funfzehnten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
II.	Ueber das Integral $\int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i}).e^{-n\varphi i}\partial\varphi$. Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim .	I.	119
III.	Beiträge zur höheren Lehre von den Logarithmen. Von Herrn Dr. Wilh. Matzka, ordentl. Prof. der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag	II.	121
VII.	Die continuirliche Function und ihre Abgeleiteten. Von Herrn Professor Franke, zweitem Director der polytechnischen Schule zu Hannover	II.	227

409427.

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
XI.	Ueber den Begriff der Combinationslehre und die Bezeichnung in derselben und einige neue Sätze über die Combinationen mit beschränkten Wiederholungen. Von dem Herrn Hofrath Oettinger zu Freiburg i. B.	III.	241
XVIII.	Ueber die geometrische Konstruktion der imaginären Wurzeln einer Gleichung. Von Herrn H. Scheffler, Bau-Conducteur bei den Herzogl. Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig	IV.	375
XIX.	Beweis der Existenz von n Wurzeln in jeder Gleichung des $n$ten Grades und Untersuchungen über die Natur einer solchen Gleichung. Von Herrn H. Scheffler, Bauconducteur bei den Herzogl. Braunschweig. Eisenbahnen zu Braunschweig	IV.	390
XX.	Bestimmung des Integrals $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}$. Von dem Herrn Hofrath Oettinger zu Freiburg i. B.	IV.	424
XXI.	Beiträge zur Theorie der quadratischen Formen. Von dem Herrn Doctor F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	IV.	429

Geometrie.

IV.	Das Malfatti'sche Problem. Beweis der Steiner'schen Construction. Von dem Herrn Oberlehrer A. Quidde am Gymnasium zu Herford	II.	197

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
V.	Discussion einer Curve der dritten Ordnung und Dreitheilung des Winkels mit Hülfe dieser Curve. Von dem Herrn Doctor J. R. Boyman, Gymnasiallehrer zu Coblenz . . .	II.	205
VI.	Nachtrag zu dem Aufsatze in Thl. XIII. Nr. XXXIII. Von Herrn Theodor Lange in Berlin	II.	221
VIII.	Auflösung der vom Herausgeber des Archivs gestellten Aufgabe: Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen, der einen anderen gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers des letzteren Kreises schneidet. Von dem Herrn Doctor Clausen, Observator an der Sternwarte zu Dorpat	II.	235
IX.	Auflösung der Aufgabe: Durch vier gegebene Punkte vier Gerade zu ziehen, die ein Quadrat bilden. Von dem Herrn Dr. Clausen, Observator an der Sternwarte zu Dorpat . .	II.	238
XII.	Methode, die geradlinigen Asymptoten einer Curve aus ihrer Polargleichung zu bestimmen. Von Herrn M. A. Nell, Baupraktikanten zu Mainz	III.	315
XIV.	Ueber Curven zweiter und dritter Ordnung. Von dem Herrn Doctor T. Clausen, Observator an der Sternwarte zu Dorpat . . .	III.	345
XV.	Zweite Bearbeitung des in dem Aufsatze Thl. XIII. Nr. XXXIII. gegebenen Beweises eines geometrischen Satzes. Von Herrn Theodor Lange zu Berlin	III.	351
XVI.	Bemerkung über die Bestimmung des körperlichen Inhalts eines beliebigen Kegelsegments		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
	und des Flächeninhalts der sphärischen Oberfläche desselben. Von dem Herausgeber .	III.	356
XVI.	Ueber den Satz, dass wenn die Halbirungslinien zweier Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, dann auch die diesen beiden Winkeln gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks einander gleich sein müssen. Von Herrn W. Mink, Lehrer der Mathematik an der höheren Stadtschule zu Crefeld	III.	358
XVII.	Die Wichtigkeit einer richtigen Auffassung von Thibaut's Beweise der Summe der Dreieckswinkel für die gesammte Elementargeometrie, und besonders für die Theorie der Parallelen. Von dem Dr. Theol. Herrn F. H. Germar, zu Heide in Norder-Dithmarschen	IV.	361
XXII.	Beweis des Satzes, dass die Summe zweier Seiten eines ebenen Dreiecks sich zu deren Differenz verhält wie die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zu der Tangente der halben Differenz dieser Winkel, nach: The complete Navigator. By Andrew Mackay. London. 1804. Von dem Herausgeber	IV.	479

Digitized by Google

Mechanik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XIII.	Fragen aus der Mechanik. Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim	III.	335
I.	Ueber die Curve, welche ein Hund beschreibt, der seinem Herrn folgt	—	335
II.	Ueber den vortheilhaftesten Abhang eines Kanals, an dessen Ende das Wasser einen industriell zu benutzenden Fall bilden soll	—	340
III.	Ueber das Princip des Telluriums	—	342

(M. s. auch Nautik.)

Nautik.

I.	Ueber die Stabilität der Schiffe. Von dem Herausgeber	I.	1

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

X.	Satz von dem Herrn Doctor T. Clausen, Observator an der Sternwarte zu Dorpat .	II.	239

Digitized by Google

Literarische Berichte*).

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
LVII.	. . . . .	I.	769
LVIII.	. . . . .	II.	785
LIX.	. . . . .	III.	793
LX.	. . . . .	IV.	805

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

I.

Ueber die Stabilität der Schiffe.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Die für die Schiffsbaukunst so wichtige Lehre von der Stabilität der Schiffe ist mit der allgemeinen physikalischen oder mechanischen Lehre von der Stabilität schwimmender Körper im Ganzen einerlei, und daher, abgesehen von ihrer grossen praktischen Wichtigkeit, von so allgemeinem Interesse, dass eine auf einige Eigenthümlichkeit Anspruch machende Darstellung derselben an diesem Orte wohl gerechtfertigt erscheint. Was die im Folgenden gegebene Behandlung dieser wichtigen und interessanten Lehre betrifft, so weiss ich sehr wohl, dass sich dieselbe aus noch allgemeineren Gesichtspunkten, als hier geschehen ist, namentlich in analytischer Beziehung, auffassen lässt; ich hatte aber für jetzt die Absicht, mich möglichst dem Bedürfnisse der Praxis anzubequemen und mich eben nur auf das für den praktischen Gebrauch Wichtigste zu beschränken, wozu mir eine in höchster analytischer Allgemeinheit durchgeführte Behandlung weniger geeignet schien. Auch habe ich einiges Bekannte aus der allgemeinen analytischen Mechanik aufgenommen, um nichts weiter als die Lehren der Statik, namentlich die sechs allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, als bekannt vorauszusetzen. Bemerken will ich aber, dass bisher, namentlich von Bouguer im Traité du navire und von Euler in der Scientia navalis, wo wohl überhaupt die erste wissenschaftliche Begründung dieser wichtigen Lehre gegeben worden ist, immer bloss der eingeschränkte Fall unendlich kleiner Drehungs-

winkel in's Auge gefasst worden ist, was mir für den praktischen Gebrauch nicht ganz hinreichend zu sein scheint. Deshalb habe ich im Folgenden bei den allgemeinen Gesetzen diesen eingeschränkten Gesichtspunkt verlassen, und glaube gezeigt zu haben, dass diese Gesetze nur sehr wenig von ihrer Einfachheit verlieren, wenn man dem Drehungswinkel eine endliche bestimmte Grösse giebt, was mir namentlich für die Schiffsbaukunst wichtig zu sein scheint. Und wenn ich auch glaube, meine folgende analytische Entwicklung als eine mir ganz eigenthümliche beanspruchen zu dürfen, so darf ich doch auch nicht unbemerkt lassen, dass schon Atwood in einer, wie ich weiss, namentlich in England sehr geschätzten Abhandlung, die man in den Philosophical Transactions findet, den eingeschränkten Gesichtspunkt unendlich kleiner Drehungswinkel aufgegeben, und zu Drehungswinkeln von einer endlichen bestimmten Grösse sich erhoben hat. Seine Darstellung ist aber, wie dies in England früher fast immer gewöhnlich war, durchaus synthetisch, und gelangt nicht zu der Allgemeinheit der Betrachtung, welche die analytische Darstellungsweise zu gewähren im Stande ist, wenn auch das sonstige Verdienst solcher synthetischen Darstellungen von mir keineswegs in Frage gestellt werden soll. Um übrigens diese Abhandlung für jetzt nicht zu weit auszudehnen, habe ich mir verschiedene specielle Anwendungen der in derselben entwickelten allgemeinen Lehren für einige spätere Aufsätze vorbehalten müssen, und bemerke schliesslich nur noch, dass auch die unmittelbar mit der Stabilität zusammenhängende allgemeine Theorie des Rollens oder Schlingerns und Stampfens der Schiffe (le roulis et le tangage) in der vorliegenden Abhandlung gegeben worden ist, um in derselben auch hierfür eine theoretische Grundlage für einige später folgende specielle Anwendungen zu gewinnen. Eine noch allgemeinere analytische Behandlung behalte ich gleichfalls einer späteren Abhandlung vor.

---

§. 1.

Bevor wir zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung übergehen, wollen wir, um derselben eine möglichst allgemeine Verständlichkeit zu sichern, die allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern entwickeln, ohne dabei andere mechanische Sätze als die bei dieser Entwickelung nicht zu umgehenden Principien der Statik oder Gleichgewichtslehre vorauszusetzen, weil ohne die Kenntniss der in Rede stehenden allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern und einiger daraus abgeleiteter Sätze eine völlig deutliche und gehörig wissenschaftlich begründete Einsicht in das Folgende nicht erlangt werden kann, die Kenntniss dieser allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern aber auch

noch für verschiedene andere Gegenstände der nautischen Wissenschaften, die wir späterhin in besonderen Abhandlungen zu besprechen denken, von grosser Wichtigkeit ist.

§. 2.

Zu dem Ende wollen wir annehmen, dass die Schwerpunkte einer beliebigen Anzahl von Körpern zu einem Systeme mit einander verbunden seien, und wollen uns zugleich, was bekanntlich verstattet ist, die Massen dieser Körper, welche durch

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots\ldots$$

bezeichnet werden mögen, in ihren respectiven Schwerpunkten vereinigt denken, wodurch das in Rede stehende System von Körpern auf ein blosses System materieller Punkte reducirt wird.

Setzen wir nun, dass auf alle diese Punkte Kräfte wirken, welche denselben, wofern sie nicht unter einander verbunden wären, durch momentane Wirkungen nach gewissen bestimmten Richtungen respective die Geschwindigkeiten

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ldots$$

ertheilen würden; so werden dieselben wegen ihrer Verbindung unter einander sich nicht mit diesen Geschwindigkeiten nach den entsprechenden Richtungen, sondern nach gewissen anderen Richtungen mit gewissen anderen Geschwindigkeiten, die wir respective durch

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ldots$$

bezeichnen wollen, bewegen. Denken wir uns die Kräfte, welche nach ihren Richtungen, wenn man sich die in Rede stehenden Punkte nicht unter einander verbunden denkt, sondern jeden derselben als einen freien Punkt ansieht, die Geschwindigkeiten

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ldots$$

hervorbringen, aus den Kräften, welche nach ihren Richtungen die Geschwindigkeiten

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ldots$$

hervorbringen, und gewissen anderen Kräften, die nach gewissen Richtungen die Geschwindigkeiten

$$w,\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ \ldots\ldots$$

hervorbringen, zusammengesetzt, so können wir statt des ersten

Digitized by Google

Systems von Kräften die beiden anderen Systeme setzen. Da es sich hier nur um eine momentane Wirkung der Kräfte handelt, so sind

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ \ldots.;$$

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,,\ldots.;$$

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ldots.$$

die Maasse der auf die einzelnen Punkte in den drei Systemen von Kräften wirkenden Kräfte, oder die sogenannten Quantitäten der Bewegung; und es bringen also unter allen Bedingungen, man mag sich die Punkte des Systems als frei oder als unter einander verbunden denken, die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ \ldots..;$$

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ \ldots..$$

ganz dieselbe Wirkung hervor wie die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ \ldots..$$

Denkt man sich aber die Punkte als unter einander verbunden, so bringen die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ \ldots..$$

ganz dieselbe Wirkung hervor wie die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ \ldots..$$

Also bringen, wenn man sich die Punkte des Systems unter einander verbunden denkt, die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ \ldots..$$

ganz dieselbe Wirkung hervor wie die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ldots.;$$

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ \ldots.;$$

woraus sich ergiebt, dass unter derselben Voraussetzung, wenn man sich nämlich die Punkte des Systems, wie es übrigens auch schon der Begriff eines Systems an sich fordert, unter einander verbunden denkt, die Kräfte

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ \ldots..$$

unter einander im Gleichgewichte sein müssen.

Hieraus ergiebt sich aber ferner auf der Stelle ganz von selbst, dass an den zu einem Systeme verbundenen Punkten auch sowohl die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ \ldots.$$

und die, in Bezug auf ihre ursprünglichen Richtungen, nach entgegengesetzten Richtungen wirkend gedachten Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ \ldots.;$$

als auch die, in Bezug auf ihre ursprünglichen Richtungen, nach entgegengesetzten Richtungen wirkend gedachten Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ \ldots.$$

und die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ \ldots..$$

unter einander im Gleichgewichte sein müssen.

Die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ \ldots..$$

pflegt man die ursprünglich mitgetheilten Quantitäten der Bewegung zu nennen; dagegen nennt man die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ \ldots..$$

die wirklich Statt findenden Quantitäten der Bewegung; endlich heissen die Kräfte

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ \ldots.$$

die gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung.

Mit Rücksicht hierauf lässt sich das Vorhergehende in dem folgenden Satze zusammenfassen:

1. In jedem Systeme materieller Punkte, welche von beliebigen momentan wirkenden Kräften sollicitirt werden, findet zwischen den ursprünglich mitgetheilten Quantitäten der Bewegung und den, in Bezug auf ihre ursprünglichen Richtungen, nach entgegengesetzten Richtungen genommenen wirklich Statt findenden Quantitäten der Bewegung Gleichgewicht Statt.

2. In jedem Systeme materieller Punkte, welche von beliebigen momentan wirkenden Kräften sollicitirt werden, findet zwischen den, in Bezug auf ihre ursprünglichen Richtungen, nach entgegengesetzten Richtungen genommenen ursprünglich mitgetheilten Quantitäten der Bewegung und den wirklich Statt findenden Quantitäten der Bewegung Gleichgewicht Statt.

3. In jedem Systeme materieller Punkte, welche von beliebigen momentan wirkenden Kräften sollicitirt

Digitized by Google

werden, findet zwischen den gewonnenen und verlorenen Quantitäten der Bewegung Gleichgewicht Statt.

Dieses sehr wichtige allgemeine Princip, durch welches die Möglichkeit dargeboten wird, jede Frage über die Bewegung eines Systems materieller Punkte zu einer blossen Aufgabe über das Gleichgewicht zu machen, oder überhaupt die Probleme der Bewegungslehre auf die Probleme der Gleichgewichtslehre zurückzuführen, wird nach seinem Erfinder, dem berühmten französischen Philosophen und Mathematiker d'Alembert, das d'Alembert'sche Princip in der Mechanik genannt. Wir wollen dasselbe nun zu der Entwickelung der allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern anwenden.

§. 3.

Die einzelnen Punkte des im Vorhergehenden betrachteten Systems wollen wir von jetzt an der Kürze wegen durch die entsprechenden Massen, also durch

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots.$$

bezeichnen, und wollen annehmen, dass am Ende einer gewissen Zeit t die Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges Coordinatensystem respective

$$x,\ y,\ z;\ x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_2;\ x_3,\ y_3,\ z_3;\ \ldots.$$

seien, indem wir alle diese Coordinaten als Functionen der Zeit t betrachten.

Von allen Punkten des Systems wollen wir jetzt als Repräsentanten der übrigen nur einen, etwa den Punkt m, in's Auge fassen, bemerken aber sogleich, dass die ganze folgende Betrachtung völlig in derselben Weise auf jeden anderen Punkt des Systems anwendbar sein wird. Am Ende der Zeit t, wo bekanntlich x, y, z die Coordinaten des Punktes m sind, sei v die in Folge der Bewegung des Systems wirklich Statt findende Geschwindigkeit des Punktes m, und s sei der Weg, welchen dieser Punkt bei der Bewegung des Systems in der Zeit t zurückgelegt hat. Lässt man die Zeit t um Δt wachsen, so wird s um Δs wachsen, und da man die Geschwindigkeit des Punktes m in dem Zeitintervalle Δt mit desto grösserer Genauigkeit als constant oder seine Bewegung in dem Zeitintervalle Δt mit desto grösserer Genauigkeit als gleichförmig betrachten kann, je kleiner Δt ist, so ist mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist,

$$\Delta s = v\,\Delta t \text{ oder } v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Also ist offenbar die Geschwindigkeit v selbst in aller Schärfe die Gränze, welcher der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sich nähert, wenn

Δt sich der Null nähert, d. h. nach den Begriffen der Differentialrechnung, es ist mit völliger Genauigkeit

$$v=\frac{\partial s}{\partial t},$$

wobei man nicht aus den Augen zu lassen hat, dass die vorhergehende ganz allgemeine Betrachtung durchaus keine besondere Beschaffenheit des Wegs s voraussetzt, und dass also die obige Differentialgleichung gilt, wie auch der Weg s beschaffen sein mag; dieselbe gilt folglich ganz allgemein, der Weg s mag eine gerade Linie oder eine beliebige Curve von einfacher oder doppelter Krümmung sein.

Bezeichnen wir ferner die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit v mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (xyz) gelegter, den primitiven Coordinatenaxen paralleler Axen einschliesst, durch φ, ψ, χ; so sind die parallel mit den drei primitiven Axen der x, y, z genommenen Composanten der Geschwindigkeit v mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen:

$$v\cos\varphi,\ v\cos\psi,\ v\cos\chi;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$\cos\varphi\cdot\frac{\partial s}{\partial t},\ \cos\psi\cdot\frac{\partial s}{\partial t},\ \cos\chi\cdot\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Nun ist aber offenbar mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δs ist, d. i. mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist:

$$\Delta x=\cos\varphi.\Delta s,\ \Delta y=\cos\psi.\Delta s,\ \Delta z=\cos\chi.\Delta s;$$

also mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δs oder Δt ist:

$$\cos\varphi=\frac{\Delta x}{\Delta s},\ \cos\psi=\frac{\Delta y}{\Delta s},\ \cos\chi=\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Daher sind offenbar in völliger Schärfe

$$\cos\varphi,\ \cos\psi,\ \cos\chi$$

die Gränzen, denen respective die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta x}{\Delta s},\ \frac{\Delta y}{\Delta s},\ \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

sich nähern, wenn Δs oder, was dasselbe ist, wenn Δt sich der Null nähert; und nach den Begriffen der Differentialrechnung ist folglich mit völliger Genauigkeit:

$$\cos\varphi=\frac{\partial x}{\partial s},\ \cos\psi=\frac{\partial y}{\partial s},\ \cos\chi=\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Digitized by Google

Also sind nach dem Obigen

$$\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t};$$

d. i. nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung

$$\frac{\partial x}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial t};$$

die parallel mit den drei Axen der x, y, z genommenen Composanten der Geschwindigkeit v, mit gehöriger Rücksicht auf die diesen Composanten zukommenden Vorzeichen.

Folglich sind am Ende der Zeit $t+\Delta t$, welcher die Geschwindigkeit $v+\Delta v$ des Punktes m entspricht, die parallel mit den Axen der x, y, z genommenen Composanten dieser Geschwindigkeit, immer mit gehöriger Rücksicht auf die diesen Composanten zukommenden Vorzeichen:

$$\frac{\partial x}{\partial t}+\Delta\frac{\partial x}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial t}+\Delta\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial t}+\Delta\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Wenn jetzt überhaupt P eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft bezeichnet, welche, auf die Masse M wirkend, in der Zeit T die Geschwindigkeit V hervorbringt, so sei p eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Masse 1 wirkend, in der Zeit 1 die Geschwindigkeit 1 hervorbringt. Um nun die Kräfte P und p mit einander zu vergleichen, bezeichne P_1 eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Masse M wirkend, in der Zeit T die Geschwindigkeit 1 hervorbringt, und P_2 bezeichne eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Masse 1 wirkend, in der Zeit T die Geschwindigkeit 1 hervorbringt. Dann hat man die folgende Zusammenstellung:

$$P,\ T,\ M,\ V;$$

$$P_1,\ T,\ M,\ 1;$$

$$P_2,\ T,\ 1,\ 1;$$

$$p,\ 1,\ 1,\ 1;$$

und es ist folglich, wie leicht erhellet:

$$P:P_1=V:1,$$

$$P_1:P_2=M:1,$$

$$P_2:p=1:T;$$

Digitized by Google

also durch Zusammensetzung dieser Proportionen:

$$P:p=MV:T,$$

und hieraus

$$PT=pMV, \text{ also } V=\frac{PT}{pM}.$$

Setzt man aber $p=1$, d. h. nimmt man eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Einheit der Massen wirkend, in der Zeiteinheit eine der Längeneinheit gleiche Geschwindigkeit hervorbringt, als Krafteinheit an, so ist

$$V=\frac{PT}{M},$$

eine allgemeine Gleichung, von der wir sogleich weiteren Gebrauch machen wollen.

Denken wir uns nämlich alle auf den materiellen Punkt m am Ende der Zeit t wirkende Kräfte auf drei den angenommenen Coordinatenaxen der x, y, z parallele Kräfte X', Y', Z' gebracht, was bekanntlich immer möglich ist, so sind, weil man diese Kräfte während des Zeitintervalls Δt mit desto grösserer Genauigkeit als constant betrachten kann, je kleiner Δt ist, nach dem Vorhergehenden

$$\frac{X'\Delta t}{m}, \quad \frac{Y'\Delta t}{m}, \quad \frac{Z'\Delta t}{m}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$X=\frac{X'}{m}, \quad Y=\frac{Y'}{m}, \quad Z=\frac{Z'}{m}$$

setzen,

$$X\Delta t, \quad Y\Delta t, \quad Z\Delta t$$

die von den auf den materiellen Punkt m stetig wirkenden Kräften X', Y', Z' in der Zeit Δt hervorgebrachten Geschwindigkeiten, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist; und da nun der materielle Punkt m am Ende der Zeit t nach dem Obigen, parallel mit den Coordinatenaxen der x, y, z, schon die Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

als Anfangsgeschwindigkeiten hat, so sind, parallel mit den Coordinatenaxen der x, y, z, seine Geschwindigkeiten am Ende der Zeit $t+\Delta t$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + X\Delta t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} + Y\Delta t, \quad \frac{\partial z}{\partial t} + Z\Delta t;$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist, wobei, wi wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, vom End der Zeit t an, und also auch am Ende der Zeit $t+\Delta t$, der mate rielle Punkt m offenbar als ein freier, nicht mehr mit den übri gen Punkten zu einem Systeme von Punkten verbundener Punk betrachtet worden ist.

Nimmt man nun alles Bisherige zusammen, so ergiebt sicl auf der Stelle ohne alle Zweideutigkeit, dass am Ende der Zei $t+\Delta t$, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist, di den Coordinatenaxen der x, y, z parallelen, mit den gehöriger Vorzeichen genommenen, Composanten der gewonnenen oder ver lorenen Quantitäten der Bewegung des Punktes m

$$m\left\{\frac{\partial x}{\partial t} + X\Delta t - \left(\frac{\partial x}{\partial t} + \Delta\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right\},$$

$$m\left\{\frac{\partial y}{\partial t} + Y\Delta t - \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \Delta\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right\},$$

$$m\left\{\frac{\partial z}{\partial t} + Z\Delta t - \left(\frac{\partial z}{\partial t} + \Delta\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right\};$$

d. i.

$$m\left(X\Delta t - \Delta\frac{\partial x}{\partial t}\right), \quad m\left(Y\Delta t - \Delta\frac{\partial y}{\partial t}\right), \quad m\left(Z\Delta t - \Delta\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

sind.

Auf ganz ähnliche Art sind überhaupt für alle Punkte

$$m, m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$$

des Systems am Ende der Zeit $t+\Delta t$, mit desto grösserer Ge nauigkeit, je kleiner Δt ist, die den drei Coordinatenaxen der x, y, z parallelen, mit den gehörigen Vorzeichen genommenen, Com posanten der gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung:

$$m\left(X\Delta t - \Delta\frac{\partial x}{\partial t}\right), \quad m\left(Y\Delta t - \Delta\frac{\partial y}{\partial t}\right), \quad m\left(Z\Delta t - \Delta\frac{\partial z}{\partial t}\right);$$

$$m_1\left(X_1\Delta t - \Delta\frac{\partial x_1}{\partial t}\right), \quad m_1\left(Y_1\Delta t - \Delta\frac{\partial y_1}{\partial t}\right), \quad m_1\left(Z_1\Delta t - \Delta\frac{\partial z_1}{\partial t}\right);$$

$$m_2\left(X_2\Delta t - \Delta\frac{\partial x_2}{\partial t}\right), \quad m_2\left(Y_2\Delta t - \Delta\frac{\partial y_2}{\partial t}\right), \quad m_2\left(Z_2\Delta t - \Delta\frac{\partial z_2}{\partial t}\right);$$

$$m_3\left(X_3\Delta t - \Delta\frac{\partial x_3}{\partial t}\right), \quad m_3\left(Y_3\Delta t - \Delta\frac{\partial y_3}{\partial t}\right), \quad m_3\left(Z_3\Delta t - \Delta\frac{\partial z_3}{\partial t}\right);$$

u. s. w.

und da nun in Folge von d'Alembert's Princip zwischen den gewonnenen und verlorenen Quantitäten der Bewegung aller Punkte des Systems stets Gleichgewicht Statt finden muss, so erhalten wir nach den allgemeinen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines völlig freien Systems, welche wir, wie schon in der Einleitung erwähnt worden ist, hier als bekannt voraussetzen, die folgenden, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist, geltenden Gleichungen:

$$\Sigma m(X\Delta t - \Delta\frac{\partial x}{\partial t})=0,\quad \Sigma m(Y\Delta t-\Delta\frac{\partial y}{\partial t})=0,\quad \Sigma m(Z\Delta t-\Delta\frac{\partial z}{\partial t})=0;$$

$$\Sigma m\{x(Y\Delta t-\Delta\frac{\partial y}{\partial t}-y\,(X\Delta t-\Delta\frac{\partial x}{\partial t})\}=0,$$

$$\Sigma m\{y(Z\Delta t-\Delta\frac{\partial z}{\partial t})-z(Y\Delta t-\Delta\frac{\partial y}{\partial t})\}=0,$$

$$\Sigma m\{z(X\Delta t-\Delta\frac{\partial x}{\partial t})-x(Z\Delta t-\Delta\frac{\partial z}{\partial t})\}=0;$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\Sigma m\left(X-\frac{\Delta\frac{\partial x}{\partial t}}{\Delta t}\right)=0,\quad \Sigma m\left(Y-\frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial t}}{\Delta t}\right)=0,\quad \Sigma m\left(Z-\frac{\Delta\frac{\partial z}{\partial t}}{\Delta t}\right)=0;$$

$$\Sigma m\left\{x\left(Y-\frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial t}}{\Delta t}\right)-y\left(X-\frac{\Delta\frac{\partial x}{\partial t}}{\Delta t}\right)\right\}=0,$$

$$\Sigma m\left\{y\left(Z-\frac{\Delta\frac{\partial z}{\partial t}}{\Delta t}\right)-z\left(Y-\frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial t}}{\Delta t}\right)\right\}=0,$$

$$\Sigma m\left\{z\left(X-\frac{\Delta\frac{\partial x}{\partial t}}{\Delta t}\right)-x\left(Z-\frac{\Delta\frac{\partial z}{\partial t}}{\Delta t}\right)\right\}=0.$$

Weil diese Gleichungen mit desto grösserer Genauigkeit gelten, je kleiner Δt ist, so erhält man die völlig genauen Gleichungen, wenn man in den vorhergehenden Gleichungen Δt sich der Null nähern lässt, und zu den Gränzen übergeht. Dadurch erhält man aber nach den bekannten Begriffen und Bezeichnungen der Differentialrechnung auf der Stelle die folgenden Gleichungen:

$$\Sigma m(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=0,\quad \Sigma m(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})=0,\quad \Sigma m(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2})=0;$$

$$\Sigma m\{x(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})-y(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})\}=0,$$

$$\Sigma m\left\{y\left(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)-z\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\right\}=0,$$

$$\Sigma m\left\{z\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)-x\left(Z-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\right\}=0;$$

oder die Gleichungen:

$$\Sigma m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\Sigma mX,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\Sigma mY,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\Sigma mZ;$$

$$\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(xY-yX),$$

$$\Sigma m\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(yZ-zY),$$

$$\Sigma m\left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(zX-xZ);$$

oder auch die Gleichungen:

$$\Sigma m\partial^2 x=\Sigma mX\partial t^2,\quad \Sigma m\partial^2 y=\Sigma mY\partial t^2,\quad \Sigma m\partial^2 z=\Sigma mZ\partial t^2;$$

$$\Sigma m(x\partial^2 y-y\partial^2 x)=\Sigma m(xY-yX)\,\partial t^2,$$

$$\Sigma m(y\partial^2 z-z\partial^2 y)=\Sigma m(yZ-zY)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(z\partial^2 x-x\partial^2 z)=\Sigma m(zX-xZ)\partial t^2.$$

Ist das System um einen festen Punkt drehbar, so erhält man nach der Lehre vom Gleichgewichte, wenn man den festen Punkt als Anfang der Coordinaten annimmt, für die Bewegung des Systems bloss die drei folgenden Gleichungen:

$$\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(xY-yX),$$

$$\Sigma m\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(yZ-zY),$$

$$\Sigma m\left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(zX-xZ)$$

oder

$$\Sigma m(x\partial^2 y-y\partial^2 x)=\Sigma m(xY-yX)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(y\partial^2 z-z\partial^2 y)=\Sigma m(yZ-zY)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(z\partial^2 x-x\partial^2 z)=\Sigma m(zX-xZ)\partial t^2.$$

Digitized by Google

Ist das System um eine feste Axe drehbar, so erhält man nach der Lehre vom Gleichgewichte, wenn man diese feste Axe als Axe der z annimmt, wie leicht erhellen wird, für die Bewegung des Systems bloss die eine Gleichung:

$$\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(xY-yX)$$

oder

$$\Sigma m(x\partial^2 y-y\partial^2 x)=\Sigma m(xY-yX)\partial t^2.$$

Wenn das System bloss aus einem Punkte besteht, so werden die sechs obigen Gleichungen, wie leicht erhellet:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z;$$

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=xY-yX,$$

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=yZ-zY,$$

$$z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=zX-xZ.$$

Weil aber in diesem Falle die drei letzten Gleichungen offenbar eine unmittelbare Folge aus den drei ersten Gleichungen, und also jederzeit erfüllt sind, wenn die drei ersten Gleichungen erfüllt sind, so hat man in diesem Falle für die Bewegung des in Rede stehenden Punktes offenbar nur die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z;$$

oder, weil nach dem Obigen

$$X=\frac{X'}{m},\qquad Y=\frac{Y'}{m},\qquad Z=\frac{Z'}{m}$$

ist, die drei Gleichungen:

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X',\quad m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y',\quad m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z'.$$

Digitized by Google

§. 4.

Wenn am Ende der Zeit t die Coordinaten des Schwerpunkts des Systems der Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots.$$

durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; und die Coordinaten dieser Massen in Bezug auf ein durch den Schwerpunkt des Systems als Anfang gelegtes, dem primitiven Coordinatensysteme paralleles Coordinatensystem respective durch

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z};\ \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{z}_1;\ \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{z}_2;\ \mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{y}_3,\ \mathfrak{z}_3;\ \ldots.$$

bezeichnet werden; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in völliger Allgemeinheit:

$$x=\mathfrak{X}+\mathfrak{x},\quad y=\mathfrak{Y}+\mathfrak{y},\quad z=\mathfrak{Z}+\mathfrak{z};$$

$$x_1=\mathfrak{X}+\mathfrak{x}_1,\ y_1=\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}_1,\ z_1=\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}_1;$$

$$x_2=\mathfrak{X}+\mathfrak{x}_2,\ y_2=\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}_2,\ z_2=\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}_2;$$

$$x_3=\mathfrak{X}+\mathfrak{x}_3,\ y_3=\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}_3,\ z_3=\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}_3;$$

u. s. w.

Ferner ist nach der Lehre vom Schwerpunkte bekanntlich

$$\mathfrak{X}\Sigma m=\Sigma mx,\ \mathfrak{Y}\Sigma m=\Sigma my,\ \mathfrak{Z}\Sigma m=\Sigma mz;$$

also, wenn man nach t differentiirt, wie leicht erhellet:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Nach §. 3. ist aber

$$\Sigma m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\Sigma mX,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\Sigma mY,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\Sigma mZ;$$

also ist

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma mX,\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma mY,\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma mZ;$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{\Sigma m X}{\Sigma m}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} = \frac{\Sigma m Y}{\Sigma m}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = \frac{\Sigma m Z}{\Sigma m}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$= (\mathfrak{X}+\mathfrak{x})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right) - (\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

und

$$xY - yX = (\mathfrak{X}+\mathfrak{x})Y - (\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})X.$$

Also ist offenbar

$$\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

$$= \Sigma m\left\{(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right) - (\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\right\}$$

und

$$\Sigma m(xY - yX) = \Sigma m\{(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})Y - (\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})X\}$$

Aber

$$\Sigma m\left\{(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right) - (\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\right\}$$

$$= \Sigma m\left(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} - \mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}\right) + \Sigma m\left(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} - \mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

$$+ \Sigma m\left(x\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + \mathfrak{X}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

$$= \left(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} - \mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}\right)\Sigma m + \Sigma m\left(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} - \mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}\Sigma m\mathfrak{x} - \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}\Sigma m\mathfrak{y} + \mathfrak{X}\Sigma m\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} - \mathfrak{Y}\Sigma m\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2},$$

und folglich, weil die Coordinaten

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}; \quad \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1; \quad \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{z}_2; \quad \mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_3, \mathfrak{z}_3; \ldots.$$

sich auf den Schwerpunkt des Systems als Anfang beziehen, also nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\Sigma m\mathfrak{x} = 0, \quad \Sigma m\mathfrak{y} = 0, \quad \Sigma m\mathfrak{z} = 0;$$

daher offenbar auch

$$\Sigma m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0$$

ist:

$$\Sigma m\left\{(\mathfrak{X}+x)\left(\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)-(\mathfrak{Y}+y)\left(\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\right\}$$
$$=(\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2})\Sigma m+\Sigma m(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}).$$

Ferner ist

$$\Sigma m\{(\mathfrak{X}+x)\,Y-(\mathfrak{Y}+y)\,X\}$$
$$=\Sigma m(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X)+\Sigma m(xY-yX)$$
$$=\mathfrak{X}\Sigma m\,Y-\mathfrak{Y}\Sigma m\,X+\Sigma m(xY-yX),$$

d. i. nach dem Obigen

$$\Sigma m\{(\mathfrak{X}+x)\,Y-(\mathfrak{Y}+y)\,X\}$$
$$=(\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2})\,\Sigma m+\Sigma m(xY-yX).$$

Weil nun nach §. 3.

$$\Sigma m\,(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=\Sigma m(xY-yX)$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$(\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2})\,\Sigma m+\Sigma m(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})$$
$$=(\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2})\,\Sigma m+\Sigma m(xY-yX),$$

also

$$\Sigma m\,(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=\Sigma m\,(xY-yX),$$

und man hat daher offenbar überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$\Sigma m\,(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=\Sigma m(xY-yX),$$

Digitized by Google

$$\Sigma m\left(\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y),$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z).$$

Fasst man alles Bisherige zusammen, so ergeben sich die sechs folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mX}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mY}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mZ}{\Sigma m};$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X),$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y),$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z).$$

Eine unmittelbare Folge aus den drei ersten dieser sechs Gleichungen sind, wie man leicht übersieht, die drei Gleichungen:

$$\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z)}{\Sigma m};$$

und für die Bewegung des Schwerpunkts $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ der Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots.$$

bei der Bewegung des Systems dieser Massen hat man also die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mX}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mY}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mZ}{\Sigma m};$$

$$\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z)}{\Sigma m}.$$

Denken wir uns jetzt die sämmtlichen zu einem Systeme verbundenen Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots.$$

in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte, dessen Coordinaten wir im Allgemeinen wieder durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnen wollen, mit einander vereinigt, und alle auf die einzelnen Massen im Systeme wirkenden Kräfte im gemeinschaftlichen Schwerpunkte der Massen nach Richtungen angebracht, die den ursprünglichen Richtungen dieser Kräfte parallel sind; so sind unter dieser Voraussetzung die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunkts, d. h. überhaupt des Punktes $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$, nach §. 3. offenbar:

$$\Sigma m\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\Sigma mX,\quad \Sigma m\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\Sigma mY,\quad \Sigma m\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\Sigma mZ;$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m\left(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X\right),$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m\left(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y\right),$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m\left(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z\right);$$

also, wie leicht erhellen wird:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma mX,\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma mY,\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma mZ;$$

$$\left(\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\right)\Sigma m=\Sigma m\left(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X\right)$$

$$\left(\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\right)\Sigma m=\Sigma m\left(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y\right),$$

$$\left(\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\right)\Sigma m=\Sigma m\left(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z\right);$$

oder

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mX}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mY}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mZ}{\Sigma m};$$

$$\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m\left(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X\right)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m\left(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y\right)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{m\left(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z\right)}{\Sigma m}.$$

Da diese Gleichungen mit den oben für die Bewegung des Schwerpunkts der Massen

$$m, m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$$

bei der Bewegung des Systems dieser Massen gefundenen Gleichungen völlig identisch sind, so ergiebt sich unmittelbar der folgende merkwürdige und in vielen Beziehungen wichtige Satz:

Der Schwerpunkt eines Systems von Massen, welches keinen festen Punkt hat, bewegt sich bei jeder Bewegung dieses Systems immer ganz auf dieselbe Weise, wie er sich bewegen würde, wenn in ihm die sämmtlichen das System bildenden Massen vereinigt, und alle auf die einzelnen Massen in dem Systeme wirkenden Kräfte nach ihren ursprünglichen Richtungen parallelen Richtungen angebracht wären.

§ 5.

Wenn wir in einer völlig zur Ruhe gekommenen Wassermasse uns einen beliebigen nach allen Seiten hin begränzten Theil derselben denken und uns vorstellen, dass dieser Theil einmal, ohne seine Gestalt zu verlieren, von der übrigen Wassermasse abgesondert wäre, so würde derselbe von einer seinem Gewichte gleichen, nach der durch seinen Schwerpunkt gehenden Vertikallinie abwärts wirkenden Kraft nach der Oberfläche der Erde hin getrieben werden. Betrachten wir aber diesen Wassertheil wieder als einen Bestandtheil der ganzen Wassermasse, so bleibt sein Bestreben, im Wasser zu sinken, natürlich noch ganz dasselbe wie vorher, wo wir ihn uns von der ganzen Wassermasse abgesondert vorstellten. Weil er nun aber, indem wir die ganze Wassermasse als vollkommen ruhend vorausgesetzt haben, nicht sinkt, sondern vielmehr sich selbst in vollkommener Ruhe befindet, so kann dieser Zustand der Ruhe offenbar nur durch den Druck der ihn umgebenden Wassermasse herbeigeführt werden, und da auch kein Steigen des in Rede stehenden Wassertheils, keine Seitenbewegung irgend einer Art desselben, sondern, wie gesagt, überhaupt der Zustand vollkommenster Ruhe Statt findet, so muss der Druck, welchen das diesen Wassertheil umgebende Wasser in seiner Gesammtheit auf denselben ausübt, nothwendig gerade eben so gross sein wie das Gewicht des in Rede stehenden Wassertheils, und die Richtung dieses Drucks muss mit der durch den Schwerpunkt des Wassertheils gehenden Vertikallinie zusammenfallen, natürlich auch dieser Druck nach oben hin gerichtet sein.

Stellen wir uns jetzt ferner ein Schiff in einer beliebigen Lage auf dem Wasser vor, so dass ein gewisser Theil desselben in das Wasser eingetaucht ist, welchen wir daher den eingetauch-

ten Theil des Schiffs*) nennen werden, und untersuchen nun die auf das Schiff wirkenden Kräfte. Die erste dieser Kräfte, welche sich sogleich ganz von selbst darbietet, ist das Gewicht des ganzen Schiffs, das man sich als eine durch den Schwerpunkt des ganzen Schiffs, alle zu demselben gehörenden Theile natürlich eingeschlossen, gehende, nach vertikaler Richtung abwärts wirkende Kraft vorzustellen, und als eine solche Kraft bei allen folgenden Untersuchungen in Rechnung zu bringen hat. Die zweite auf das Schiff wirkende Kraft ist aber der Druck, welchen das umgebende Wasser auf dasselbe ausübt, und da dieser Druck offenbar gar keine Veränderung erleiden würde, wenn man sich statt des eingetauchten Theils des Schiffs einen demselben der Grösse und Gestalt nach völlig gleichen Wasserkörper gesetzt dächte, so ergiebt sich aus der am Anfange dieses Paragraphen angestellten Betrachtung ganz von selbst und auf völlig unzweideutige Weise, dass der Druck des das Schiff umgebenden Wassers auf dasselbe als eine Kraft zu betrachten und bei allen Untersuchungen als eine solche Kraft in Rechnung zu bringen ist, welche dem Gewichte des den eingetauchten Theil des Schiffs vollständig ausfüllenden Wassers, oder, was dasselbe ist, dem Gewichte des von dem Schiffe verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wasserkörpers gleich ist, durch den Schwerpunkt dieses Wasserkörpers geht, und nach vertikaler Richtung aufwärts wirkt. Wir sehen hieraus, dass wir es im Folgenden immer mit diesen beiden Kräften zu thun haben werden, welche wir daher, weil sie die Hauptgrundlage bilden, von der wir bei unseren fol-

---

*) In deutschen Werken über die Schiffsbaukunst heisst der eingetauchte, d. h. der unter dem Wasser befindliche Theil des Schiffs, der zwischen der Unterkante des Kiels und dem Wasserspiegel liegende Theil desselben, gewöhnlich der Wasserraum, worüber man z. B. Anfangsgründe der Schiffbaukunst oder practische Abhandlung über den Schiffbau. Aus dem Französischen des Herrn Du Hamel de Monceau nach der zweiten Ausgabe des Originals übersetzt von C. G. D. Müller. Berlin. 1791. 4. S. 410. nachsehen kann. Im Französischen heisst dieser Theil des Schiffs la carène. In der Encyclopédie méthodique. Marine. T. I. Paris. 1783. 4. p. 266. findet sich folgende Erklärung bei diesem Worte: *Carène*, s. f. c'est la partie submergée du bâtiment, lorsqu'il est à son point de charge, que l'on appelle aussi *oeuvre-vive*, par opposition à *l'oeuvre-morte*, qui est toute la partie du corps du navire au-dessus de la flottaison. Gleichbedeutend mit carène wird auch zuweilen déplacement de vaisseau genommen. A. a. O. p. 688. heisst es: *Deplacement de vaisseau*, s. m. on voit que les corps flottans plongent dans l'eau d'une partie de leur volume; cette partie de leur volume, ou, la quantité d'eau qu'elle deplace, s'appelle le déplacement. Streng genommen ist aber déplacement nur die von dem Schiffe verdrängte Wassermasse, und so sagt auch z. B. Chapman im Traité de la construction des vaisseaux par Frédéric Henri de Chapman. Traduit du Suédois et publié par M. Vial du Clairbois. Paris 1839. 4. p. 1. ganz bestimmt: Le Déplacement est le vuide que le Vaisseau fait dans l'eau tranquille par le volume de sa carène, en raison du poids qui l'y plonge.

Digitized by Google

genden Untersuchungen auszugehen haben, jetzt nochmals in der Kürze genau bestimmen wollen, indem wir jedoch dieser Bestimmung erst noch die folgenden Bemerkungen vorausschicken.

Was wir unter dem Schwerpunkte des Schiffs verstehen, bedarf natürlich eigentlich gar keiner weiteren Erläuterung; indess mag völliger Deutlichkeit und Bestimmtheit wegen in dieser Beziehung doch noch besonders bemerkt werden, dass wir darunter immer den Schwerpunkt des ganzen Schiffs und aller seiner einzelnen Theile, der Masten, der ganzen Takelasche, aller Rundhölzer, der Ladung, des Ballastes u. s. w. verstehen. Dagegen soll im Folgenden unter dem Schwerpunkte des eingetauchten Theils des Schiffs immer der Schwerpunkt eines diesem Theile des Schiffs der Grösse und Gestalt nach gleichen, aber, was wohl zu beachten und in der Folge stets festzuhalten ist, völlig homogenen Körpers, oder, mit anderen Worten, der Schwerpunkt des von dem Schiffe verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wasserkörpers verstanden werden. Euler in der Scientia navalis. P. I. Petropoli. 1749. 4. p. 14. Nr. 28. nennt den Punkt, welchen wir so eben den Schwerpunkt des eingetauchten Theils genannt und genau bestimmt haben, centrum magnitudinis partis submersae, indem er den Schwerpunkt des Schiffs wie gewöhnlich centrum gravitatis navis nennt, und sagt darüber a. a. O.: Centrum igitur magnitudinis partis submersae invenietur, si pars submersa tanquam ex materia homogenea constans consideretur, eiusque centrum gravitatis definiatur. Hoc itaque centrum magnitudinis partis submersae quoque erit centrum gravitatis aquae de suo loco depulsae. Auch in der Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux, mise à la portée de ceux qui s'appliquent à la navigation. Paris. 1776. 8. bedient sich Euler immer der den vorhergehenden entsprechenden Benennungen *centre de gravité* du vaisseau tout entier und *centre* de la partie submergée, ou bien simplement le *centre* de la carène. Ich halte jedoch den von Euler gemachten Unterschied zwischen Mittelpunkt der Schwere und Mittelpunkt der Grösse nicht für unbedingt nöthig, wenn man nur unter dem Schwerpunkte des eingetauchten Theils immer den vorher mit diesem Namen belegten, und zu bestimmen gelehrten Punkt versteht. Auch Bouguer im Traité du navire. Paris. 1746. 4. p. 249. nennt diesen Punkt Centre de gravité de la Carène und fügt hinzu: dans lequel se réunit la poussée verticale de l'eau.

Dies vorausgeschickt, kann nun der aus dem Obigen sich unmittelbar ergebende, für alle späteren Untersuchungen höchst wichtige Satz auf folgende Art ausgesprochen werden:

Jedes auf dem Wasser in irgend einer Lage befindliche Schiff wird von zwei nach vertikalen, also einander parallelen Richtungen wirkenden Kräften sollicitirt, nämlich von einer im Schwerpunkte des Schiffs nach unten hin wirkenden, dem Gewichte des ganzen

Schiffs gleichen, und von einer im Schwerpunkte des eingetauchten Theils nach oben hin wirkenden, dem Gewichte des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers gleichen Kraft.

Die Bewegungen, welche diese beiden das Schiff sollicitirenden, einander parallelen, aber nach entgegengesetzten Seiten hin wirkenden Kräfte dem Schiffe ertheilen, wollen wir jetzt etwas genauer betrachten. Nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen wichtigen Satze bewegt sich der Schwerpunkt eines völlig freien, d. h. keinen festen Punkt habenden Systems von Massen, — und als ein solches System ist ja natürlich jedes Schiff auf dem Wasser zu betrachten, — ganz eben so, als wenn die sämmtlichen Massen in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte vereinigt, und in demselben alle auf die einzelnen Massen des Systems wirkenden Kräfte nach ihren ursprünglichen Richtungen parallelen Richtungen angebracht wären. Wenden wir nun diesen Satz, wie es verstattet ist, auf unsern vorliegenden Fall an, so ist zuvörderst klar, dass die beiden das Schiff sollicitirenden Kräfte demselben eine solche Bewegung ertheilen werden, dass sein Schwerpunkt in einer vertikalen geraden Linie sich aufwärts oder abwärts bewegt, und diese in einer vertikalen geraden Linie aufwärts oder abwärts vor sich gehende Bewegung des Schwerpunkts des Schiffs wird nur dann nicht mehr Statt finden, wenn die beiden nach einander entgegengesetzten vertikalen Richtungen auf das Schiff wirkenden Kräfte einander gleich geworden sind, d. h. nach dem Obigen, wenn das Schiff sich so weit in das Wasser eingetaucht hat, dass sein Gewicht dem Gewichte des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers genau gleich ist. Nehmen wir nun der Einfachheit wegen jetzt an, dass dieser Zustand eingetreten sei, so muss sich nach dem obigen Satze bei der ferneren Bewegung des Schiffs, wobei wir aber ausdrücklich bemerken, dass wir diese Bewegung durchaus nur bei ihrem ersten Beginnen, gewissermassen nur im ersten Moment ihres Entstehens betrachten wollen, sein Schwerpunkt nothwendig in vollkommener Ruhe befinden, und man wird die fernere Bewegung des Schiffs als eine drehende Bewegung desselben um seinen als einen festen Drehpunkt gedachten Schwerpunkt zu betrachten haben, so dass also auch die fernere Drehung des Schiffs um seinen Schwerpunkt gar nicht mehr eine Wirkung der durch den Schwerpunkt des Schiffs gehenden, seinem Gewichte gleichen, nach vertikaler Richtung abwärts wirkenkenden Kraft, sondern nur eine Wirkung der durch den Schwerpunkt des eingetauchten Theils gehenden, dem Gewichte des verdrängten Wassers gleichen, nach vertikaler Richtung aufwärts wirkenden Kraft sein, und daher bei der Drehung des Schiffs um seinen als fest gedachten Schwerpunkt auch nur diese letztere Kraft in Betracht kommen kann. Geht zuvörderst auch die Richtung dieser letzteren Kraft durch den Schwerpunkt des Schiffs, oder mit anderen Worten, liegen der Schwerpunkt des Schiffs und der Schwerpunkt seines eingetauchten Theils in einer und derselben Vertikallinie, so wird natürlich gar keine Drehung des Schiffs um seinen Schwerpunkt erfolgen, und dasselbe wird daher unter den gemachten Voraussetzungen, d. h. wenn das Gewicht

des ganzen Schiffs dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist und der Schwerpunkt des Schiffs mit dem Schwerpunkte seines eingetauchten Theils in einer und derselben vertikalen geraden Linie liegt, in vollkommener Ruhe auf dem Wasser schwimmen. Wenn aber der Schwerpunkt des Schiffs und der Schwerpunktseines eingetauchten Theils nicht in einer und derselben vertikalen geraden Linie liegen, so wird die durch den Schwerpunkt des eingetauchten Theils gehende, dem Gewichte des verdrängten Wassers gleiche, nach vertikaler Richtung aufwärts wirkende Kraft eine Drehung des Schiffs um seinen als ruhend gedachten Schwerpunkt hervorbringen, und da die vertikale Richtung dieser letzteren Kraft ganz in der durch den als ruhenden Drehpunkt gedachten Schwerpunkt des Schiffs und den Schwerpunkt des eingetauchten Theils gehenden Vertikalebene liegt, so braucht man bei der Drehung des Schiffs um seinen ruhenden Schwerpunkt offenbar auch nur diese Vertikalebene in's Auge zu fassen, indem man von dem Schiffskörper als solchen übrigens ganz abstrahirt, und wird sich daher hieraus nun auch sogleich überzeugen, dass die Drehung des Schiffs um seinen als fest gedachten Schwerpuukt nothwendig zugleich um eine durch denselben gehende, auf der in Rede stehenden Vertikalebene senkrechte, also horizontale gerade Linie als eine feste Drehungsaxe vor sich gehen muss. Ob aber diese so eben näher charakterisirte Drehung des Schiffs in einem solchen Sinne, dass dasselbe dadurch nach und nach in die Lage, in welcher es völlig ruhig auf dem Wasser schwimmt, gebracht wird, oder in entgegengesetztem Sinne, so dass das Schiff, wie man zu sagen pflegt. völlig umschlägt, vor sich geht, und welche Bedingungen nothwendig erfüllt sein müssen, wenn entweder das Erste oder das Zweite eintreten soll, wollen wir eben in der vorliegenden Abhandlung mit aller nur möglichen Genauigkeit untersuchen, indem durch diese Untersuchungen hauptsächlich die Bedingungen festgestellt werden sollen, welche erfüllt sein müssen, wenn das durch irgend welche Ursachen bis zu einem gewissen Grade aus seiner ruhigen Gleichgewichtslage auf dem Wasser gebrachte Schiff von selbst wieder in diese Lage zurückkehren, oder die ihm mitgetheilte Bewegung nach deren Richtung hin weiter fortsetzen und völlig umschlagen soll, d. h., wie man zu sagen pflegt, ob das Schiff eine gewisse Standfähigkeit oder Stabilität*) besitzt oder nicht, deren Grösse zugleich auch in allen Fällen nach einem gewissen Maasse bestimmt werden soll. Wie wichtig aber Untersuchungen dieser Art für den Bau der Schiffe sind, wenn dieselben bei ihrem Laufe auf der See in und durch sich selbst vor Unglücksfällen möglichst sicher gestellt sein sollen, leuchtet sogleich ein und braucht kaum noch besonders hervorgehoben zu werden.

Bevor wir zu diesen Untersuchungen übergehen, wollen wir dem Obigen nur noch hinzufügen, dass, wenn die oben gemachte Voraussetzung, welche wir auch im Folgenden festhalten werden,

---

*) Auch die Steife der Schiffe genannt. Ein Schiff, welches sich sehr leicht auf die Seite neigt, heisst rank.

dass nämlich das Schiff schon bis zu dem Grade der Einsenkung in's Wasser gelangt ist, dass sein Gewicht genau mit dem Gewichte des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers übereinstimmt, nicht erfüllt ist, so lange ein Aufsteigen und Niedersteigen des Schwerpunkts des Schiffs in vertikaler geradliniger Richtung und gleichzeitige Drehungen des Schiffs um durch seinen Schwerpunkt gehende horizontale Axen Statt finden werden, bis jener Zustand, wo das Gewicht des Schiffs dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist und demzufolge der Schwerpunkt des Schiffs zur Ruhe kommt, wie wir bei den obigen Betrachtungen angenommen haben, eingetreten ist; diese Bewegungen des Schiffs aber weiter zu verfolgen, scheint ihrer Complication wegen dem Zwecke der vorliegenden Abhandlung nicht angemessen zu sein, indem es namentlich für den praktischen Schiffsbau genügen wird, die Sache nur aus dem vorher festgehaltenen Gesichtspunkte zu betrachten, dass nämlich das Gewicht des Schiffs dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist, und ein Aufsteigen und Niedersteigen des Schwerpunkts des Schiffs nicht weiter Statt findet, sondern derselbe als ruhend angenommen werden kann, und die Drehung des Schiffs um eine durch den ruhenden Schwerpunkt desselben gehende horizontale Axe vor sich geht, welche letztere auf der durch den Schwerpunkt des Schiffs und den Schwerpunkt des eingetauchten Theils gehenden Vertikalebene senkrecht steht, wobei zugleich, wie auch schon oben bemerkt worden ist, diese Drehung des Schiffs immer nur bei ihrem ersten Beginnen, gewissermassen im ersten Momente ihres Entstehens betrachtet wird, welches Alles man im Folgenden stets vor Augen zu behalten hat, wenn die betreffenden Untersuchungen mit völliger Deutlichkeit und Bestimmtheit aufgefasst und verstanden werden sollen. Allgemeinere analytische Untersuchungen über die Stabilität schwimmender Körper überhaupt werden wir vielleicht später in einer anderen, weniger als die vorliegende das unmittelbare praktische Bedürfniss im Auge habenden Abhandlung veröffentlichen.

§. 6.

Wir wollen jetzt ganz im Allgemeinen das Schiff in zwei verschiedenen Lagen auf dem Wasser betrachten. Die erste dieser beiden Lagen sei die Lage, in welcher das Schiff völlig ruhig auf dem Wasser schwimmt, und die zweite Lage sei eine andere beliebige Lage desselben, in welche es aus der ersten Lage durch Drehung um eine gewisse Axe gelangt ist, wobei wir immer annehmen, dass, so wie natürlich in der ersten Lage, auch in der zweiten Lage das Gewicht des ganzen Schiffs dem Gewichte des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers gleich sei. Im Folgenden werden wir in der Kürze die beiden so eben näher bezeichneten Lagen des Schiffs respective seine erste und seine zweite Lage nennen, und wollen nun zuvörderst die folgenden Bezeichnungen einführen.

Das Volumen und das Gewicht des ganzen Schiffs sollen respective durch V und G bezeichnet werden.

Das Volumen des unter dem Wasser befindlichen Theils des Schiffs wollen wir bei der ersten Lage desselben durch $\mathfrak{V}'$, bei der zweiten Lage dagegen durch $\mathfrak{V}_1$ bezeichnen.

Bei der Drehung des Schiffs um eine gewisse Axe aus seiner ersten in seine zweite Lage wird ein Theil desselben, welcher bei der ersten Lage sich unter dem Wasser befand, über das Wasser kommen, ein anderer Theil dagegen, welcher bei der ersten Lage über dem Wasser war, wird unter das Wasser kommen. Diese beiden Theile des Schiffs sollen respective der aufgetauchte Theil und der untergetauchte Theil *) desselben genannt werden. Das Volumen des aufgetauchten Theils wollen wir durch V', das Volumen des untergetauchten Theils dagegen durch V_1 bezeichnen.

Bezeichnet man endlich das Volumen des Körpers, welcher übrig bleibt, wenn man entweder von dem unter Wasser befindlichen Theile des Schiffs bei seiner ersten Lage den aufgetauchten Theil, oder von dem unter Wasser befindlichen Theile desselben bei seiner zweiten Lage den untergetauchten Theil wegnimmt, durch $\mathfrak{V}$, so ist nach den vorher eingeführten Bezeichnungen

$$\mathfrak{V}=\mathfrak{V}'-V', \quad \mathfrak{V}=\mathfrak{V}_1-V_1;$$

und wir haben daher auch die folgende Gleichung:

$$\mathfrak{V}'-V'=\mathfrak{V}_1-V_1.$$

Weil aber in beiden Lagen des Schiffs das Gewicht des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers dem Gewichte des ganzen Schiffs gleich ist, so muss offenbar

$$\mathfrak{V}'=\mathfrak{V}_1$$

sein, und wegen der obigen Gleichung ist also auch

$$V'=V_1.$$

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz annehmen, dessen Anfangspunkt durch O bezeichnet werden mag, und wollen die Coordinaten des Schwerpunkts des ganzen Schiffs V in seiner ersten und in seiner zweiten Lage in Bezug auf das zum Grunde gelegte Coordinatensystem der xyz respective durch X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 bezeichnen. Die Coordinaten der Schwerpunkte des aufgetauchten Theils V' und des untergetauchten Theils V_1 des Schiffs seyen respective x', y', z' und x_1, y_1, z_1; die Coordinaten der Schwerpunkte der

*) Natürlich zu unterscheiden von dem eingetauchten Theile des Schiffs; s. oben.

unter dem Wasser befindlichen Theile des Schiffs bei seiner ersten und bei seiner zweiten Lage, deren Volumina durch $\mathfrak{V}'$ und $\mathfrak{V}_1$ bezeichnet worden sind, seien respective $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$; und die Coordinaten des Schwerpunkts des Körpers, dessen Volumen wir oben durch $\mathfrak{V}$ bezeichnet haben, wollen wir durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen; natürlich auch alle diese Coordinaten in Bezug auf das zum Grunde gelegte System der xyz genommen. Endlich sollen in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem die Coordinaten des Schwerpunkts des Körpers, dessen Volumen wir oben durch $\mathfrak{V}'$ bezeichnet haben, nämlich des unter dem Wasser befindlichen Theils bei seiner ersten Lage, insofern man sich, was wohl zu beachten ist, diesen Körper als der zweiten Lage des Schiffs angehörend, oder als einen Theil des Schiffskörpers bei seiner zweiten Lage denkt, durch $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ bezeichnet werden.

Hierzu fügen wir nun aber noch die allgemeine Bemerkung, dass, wenn im Folgenden irgend ein Theil des Schiffskörpers als homogen betrachtet wird, oder wir uns für denselben eigentlich den äquivalenten, d. h. ihm dem Volumen nach gleichen Wasserkörper gesetzt denken, den diesem Theile des Schiffskörpers entsprechenden, im Vorhergehenden eingeführten Symbolen oberhalb noch das Zeichen oder der Index w beigefügt werden soll, was übrigens natürlich auf die sich immer gleich bleibenden Volumina keine Anwendung findet.

Das zum Grunde gelegte rechtwinklige Coordinatensystem der xyz wollen wir nun in der Weise specialisiren, dass wir die Axe der z als horizontal annehmen, und wollen zugleich, was nach den im vorhergehenden Paragraphen angestellten Betrachtungen verstattet ist, voraussetzen, dass die Drehung des Schiffs um diese horizontale Axe der z erfolgt sei, wobei wir übrigens diese Axe nicht unbedingt durch den Schwerpunkt des Schiffs gehen lassen, sondern dieselbe vielmehr als eine ganz beliebige horizontale Axe auffassen; die Axe der x kann dann auch als horizontal, also die Axe der y als vertikal angenommen werden, und alle der Axe der y parallelen Kräfte werden wir im Folgenden als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem sie nach der Seite der positiven oder nach der Seite der negativen y hin wirken. Endlich wollen wir annehmen, dass die Drehung des Schiffs um die horizontale Axe der z nach derselben Richtung hin erfolgt sei, nach welcher man sich bewegen muss, wenn man von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y gelangen will, und dass bei dieser Drehung jede von der Axe der z ausgehende Ebene den nach der in Rede stehenden Richtung hin von 0^0 bis 360^0 *) wachsenden Winkel ω beschrieben habe.

Bezeichnet nun ψ einen andern gewissen von 0^0 bis 360^0 wachsenden Winkel, dessen Bedeutung aus den folgenden Glei-

*) Den Winkel ω noch weiter wachsen zu lassen, ist bei dieser Theorie unnöthig.

Digitized by Google

chungen sogleich ganz von selbst erhellen wird, weshalb wir eine besondere Erläuterung darüber zu geben der Kürze wegen unterlassen; so kann

$$X=\cos\psi\sqrt{X^2+Y^2},\quad Y=\sin\psi\sqrt{X^2+Y^2}$$

und

$$X_1=\cos(\psi+\omega)\sqrt{X^2+Y^2},\quad Y_1=\sin(\psi+\omega)\sqrt{X^2+Y^2};$$

also

$$X_1=\cos\psi\cos\omega\sqrt{X^2+Y^2}-\sin\psi\sin\omega\sqrt{X^2+Y^2},$$

$$Y_1=\sin\psi\cos\omega\sqrt{X^2+Y^2}+\cos\psi\sin\omega\sqrt{X^2+Y^2};$$

folglich

$$X_1=X\cos\omega-Y\sin\omega,$$

$$Y_1=X\sin\omega+Y\cos\omega,$$

$$Z_1=Z$$

gesetzt werden.

Weil das Schiff in seiner ersten Lage als auf dem Wasser ruhig schwimmend vorausgesetzt wird, so ist offenbar mit Rücksicht auf die oben eingeführte Bezeichnungsart nach den aus dem Vorhergehenden bekannten Gesetzen:

$$X=\overset{w}{\mathfrak{x}}',\quad Z=\overset{w}{\mathfrak{z}}';$$

also nach den obigen Gleichungen:

$$X_1=\overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega-Y\sin\omega,$$

$$Y_1=\overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega+Y\cos\omega,$$

$$Z_1=\overset{w}{\mathfrak{z}}'.$$

In seiner zweiten Lage wird das Schiff bekanntlich von den beiden in den Punkten $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ und $(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1\overset{w}{\mathfrak{y}}_1\overset{w}{\mathfrak{z}}_1)$ nach entgegengesetzten Seiten hin wirkenden, der Axe der y parallelen einander gleichen Kräften G und G sollicitirt. Nehmen wir von jetzt an den positiven Theil der Axe der y nach oben, den negativen Theil dieser Axe nach unten hin, so ist die in dem Punkte $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ wirkende Kraft $-G$, die in dem Punkte $(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1\overset{w}{\mathfrak{y}}_1\overset{w}{\mathfrak{z}}_1)$ wirkende Kraft dagegen ist $+G$. Betrachten wir nun die Momente dieser beiden Kräfte in Bezug auf die durch die horizontale Drehungsaxe ge-

hende vertikale Ebene der yz, oder, wie wir der Kürze wegen im Folgenden immer sagen wollen, die Momente der beiden in Rede stehenden Kräfte in Bezug auf die angenommene horizontale Drehungsaxe, als positiv oder als negativ, jenachdem sie in demselben Sinne, in welchem die Drehung des Schiffs erfolgt ist, oder in entgegengesetztem Sinne wirken; so ist das Moment der Kraft $-G$ offenbar $-GX_1$, und das Moment der Kraft $+G$ ist $+G\overset{w}{x}_1$. Bezeichnen wir also die Summe dieser beiden Momente durch S, so ist

$$S = G(\overset{w}{x}_1 - X_1).$$

Bezeichnet man aber die Stabilität des Schiffs in Bezug auf die angenommene horizontale Drehungsaxe, indem man dieselbe als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem das Schiff von selbst wieder in die Lage des ruhigen Schwimmens auf dem Wasser zurückkehrt oder sich weiter von dieser Lage entfernt, durch $\mathfrak{S}$, so ist offenbar $\mathfrak{S} = -S$, also

$$\mathfrak{S} = G(X_1 - \overset{w}{x}_1),$$

und folglich nach dem Obigen, da

$$X_1 = \overset{w}{x}'\cos\omega - Y\sin\omega$$

war:

$$\mathfrak{S} = G(\overset{w}{x}'\cos\omega - Y\sin\omega - \overset{w}{x}_1).$$

Weil der Körper $\mathfrak{V}'$, insofern man sich denselben als der zweiten Lage des Schiffs angehörend denkt, aus den beiden Theilen $\mathfrak{V}$ und V' besteht, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{X}' = \mathfrak{V}\overset{w}{x} + V'\overset{w}{x}',$$

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{Y}' = \mathfrak{V}\overset{w}{y} + V'\overset{w}{y}',$$

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{Z}' = \mathfrak{V}\overset{w}{z} + V'\overset{w}{z}';$$

und weil der Körper $\mathfrak{V}_1$ aus den beiden Theilen $\mathfrak{V}$ und V_1 besteht, so ist eben so nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$\mathfrak{V}_1\overset{w}{x}_1 = \mathfrak{V}\overset{w}{x} + V_1\overset{w}{x}_1,$$

$$\mathfrak{V}_1\overset{w}{y}_1 = \mathfrak{V}\overset{w}{y} + V_1\overset{w}{y}_1,$$

$$\mathfrak{V}_1\overset{w}{z}_1 = \mathfrak{V}\overset{w}{z} + V_1\overset{w}{z}_1.$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen ergiebt sich:

Digitized by Google

$$\mathfrak{v}\overset{w}{x}=\mathfrak{v}'\overset{w}{\mathfrak{X}}'-V'\overset{w}{x'}=\mathfrak{v}_1\overset{w}{x_1}-V_1\overset{w}{x_1},$$

$$\mathfrak{v}\overset{w}{y}=\mathfrak{v}'\overset{w}{\mathfrak{Y}}'-V'\overset{w}{y'}=\mathfrak{v}_1\overset{w}{y_1}-V_1\overset{w}{y_1},$$

$$\mathfrak{v}\overset{w}{\mathfrak{z}}=\mathfrak{v}'\overset{w}{\mathfrak{Z}}'-V'\overset{w}{z'}=\mathfrak{v}_1\overset{w}{\mathfrak{z}_1}-V_1\overset{w}{z_1};$$

oder

$$\mathfrak{v}'\overset{w}{\mathfrak{X}}'-\mathfrak{v}_1\overset{w}{x_1}=V'\overset{w}{x'}-V_1\overset{w}{x_1},$$

$$\mathfrak{v}'\overset{w}{\mathfrak{Y}}'-\mathfrak{v}_1\overset{w}{y_1}=V'\overset{w}{y'}-V_1\overset{w}{y_1},$$

$$\mathfrak{v}'\overset{w}{\mathfrak{Z}}'-\mathfrak{v}_1\overset{w}{\mathfrak{z}_1}=V'\overset{w}{z'}-V_1\overset{w}{z_1}.$$

Bezeichnet aber $\overset{w}{\varphi}$ einen gewissen von 0^0 bis 360^0 wachsenden Winkel, dessen Bedeutung aus den folgenden Gleichungen sogleich ganz von selbst erhellen wird, ohne dass darüber noch eine besondere Erläuterung nöthig ist, so ist offenbar

$$\overset{w}{x'}=\cos\overset{w}{\varphi}\sqrt{\overset{w}{x'^2}+\overset{w}{y'^2}},\quad \overset{w}{y'}=\sin\overset{w}{\varphi}\sqrt{\overset{w}{x'^2}+\overset{w}{y'^2}}$$

und

$$\overset{w}{\mathfrak{X}}'=\cos(\overset{w}{\varphi}+\omega)\sqrt{\overset{w}{x'^2}+\overset{w}{y'^2}},\quad \overset{w}{\mathfrak{Y}}'=\sin(\overset{w}{\varphi}+\omega)\sqrt{\overset{w}{x'^2}+\overset{w}{y'^2}};$$

also

$$\overset{w}{\mathfrak{X}}'=\cos\overset{w}{\varphi}\cos\omega\sqrt{\overset{w}{x'^2}+\overset{w}{y'^2}}-\sin\overset{w}{\varphi}\sin\omega\sqrt{\overset{w}{x'^2}+\overset{w}{y'^2}},$$

$$\overset{w}{\mathfrak{Y}}'=\sin\overset{w}{\varphi}\cos\omega\sqrt{\overset{w}{x'^2}+\overset{w}{y'^2}}+\cos\overset{w}{\varphi}\sin\omega\sqrt{\overset{w}{x'^2}+\overset{w}{y'^2}};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\overset{w}{\mathfrak{X}}'=\overset{w}{x'}\cos\omega-\overset{w}{y'}\sin\omega,$$

$$\overset{w}{\mathfrak{Y}}'=\overset{w}{x'}\sin\omega+\overset{w}{y'}\cos\omega,$$

$$\overset{w}{\mathfrak{Z}}'=\overset{w}{\mathfrak{z}'}.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{v}'(\overset{w}{x'}\cos\omega-\overset{w}{y'}\sin\omega)-\mathfrak{v}_1\overset{w}{x_1}=V'\overset{w}{x'}-V_1\overset{w}{x_1},$$

$$\mathfrak{v}'(\overset{w}{x}'\sin\omega+\overset{w}{y}'\cos\omega)-\mathfrak{v}_1\overset{w}{y}_1=V'\overset{w}{y}'-V_1\overset{w}{y}_1,$$

$$\mathfrak{v}'\overset{w}{z}'-\mathfrak{v}_1\overset{w}{z}_1=V'\overset{w}{z}'-V_1\overset{w}{z}_1;$$

also

$$\mathfrak{v}_1\overset{w}{x}_1=\mathfrak{v}'(\overset{w}{x}'\cos\omega-\overset{w}{y}'\sin\omega)-V'\overset{w}{x}'+V_1\overset{w}{x}_1,$$

$$\mathfrak{v}_1\overset{w}{y}_1=\mathfrak{v}'(\overset{w}{x}'\sin\omega+\overset{w}{y}'\cos\omega)-V'\overset{w}{y}'+V_1\overset{w}{y}_1,$$

$$\mathfrak{v}_1\overset{w}{z}_1=\mathfrak{v}'\overset{w}{z}'-V'\overset{w}{z}'+V_1\overset{w}{z}_1;$$

folglich

$$\mathfrak{S}=G\left\{\frac{\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}_1}\overset{w}{x}'\cos\omega-(Y-\frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}_1}\overset{w}{y}')\sin\omega+\frac{V'}{\mathfrak{v}_1}\overset{w}{x}'-\frac{V_1}{\mathfrak{v}_1}\overset{w}{x}_1\right\}.$$

Weil nun aber, wie wir oben gesehen haben,

$$\mathfrak{v}'=\mathfrak{v}_1 \text{ und } V'=V_1$$

ist, so ist

$$\mathfrak{S}=-G\{(Y-\overset{w}{y}')\sin\omega-\frac{V'}{\mathfrak{v}'}(\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1)\}$$

oder

$$\mathfrak{S}=-G\{(Y-\overset{w}{y}')\sin\omega-\frac{V_1}{\mathfrak{v}_1}(\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1)\}.$$

Die ganze Figur im Raume wollen wir uns jetzt auf die Ebene der xy projicirt denken, und von nun an auch nur diese Projection auf der Ebene der xy, welche letztere bekanntlich auf der angenommenen Drehungsaxe senkrecht steht, in's Auge fassen. Legen wir nun durch den Punkt $(\overset{w}{x}_1\overset{w}{y}_1)$ eine vertikale und durch den Punkt $(X_1 Y_1)$ eine auf der durch die Gleichung

$$y=x\,\text{tang}\,\omega$$

charakterisirten geraden Linie senkrecht stehende gerade Linie, so ist die Gleichung der ersten dieser beiden geraden Linien

$$x=\overset{w}{x}_1,$$

und die Gleichung der zweiten Linie hat die Form

$$y-Y_1=A(x-X_1),$$

wo, weil diese Linie auf der durch die Gleichung

Digitized by Google

$$y = x \operatorname{tang} \omega$$

charakterisirten geraden Linie senkrecht stehen soll,

$$1 + A \operatorname{tang} \omega = 0, \quad A = -\cot \omega;$$

folglich die Gleichung der zweiten der beiden in Rede stehenden geraden Linien

$$y - Y_1 = -(x - X_1) \cot \omega$$

ist.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden durch die Gleichungen

$$x = \overset{w}{x}_1 \text{ und } y - Y_1 = -(x - X_1) \cot \omega$$

charakterisirten geraden Linien durch x, y selbst, so müssen wir x, y aus den beiden vorstehenden Gleichungen mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination bestimmen, was sogleich

$$x = \overset{w}{x}_1, \quad y = Y_1 - (\overset{w}{x}_1 - X_1) \cot \omega$$

giebt; und weil nun nach dem Obigen

$$\overset{w}{x}_1 = \frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}_1} (\overset{w}{x}' \cos \omega - \overset{w}{y}' \sin \omega) - \frac{V'}{\mathfrak{v}_1} \overset{w}{x}' + \frac{V_1}{\mathfrak{v}_1} x_1 ,$$

d. i.

$$\overset{w}{x}_1 = \overset{w}{x}' \cos \omega - \overset{w}{y}' \sin \omega - \frac{V'}{\mathfrak{v}'} (\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1),$$

und

$$X_1 = \overset{w}{x}' \cos \omega - Y \sin \omega,$$

$$Y_1 = \overset{w}{x}' \sin \omega + Y \cos \omega$$

ist; so ist

$$x = \overset{w}{x}' \cos \omega - \overset{w}{y}' \sin \omega - \frac{V'}{\mathfrak{v}'} (\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1),$$

$$y = \overset{w}{x}' \sin \omega + \overset{w}{y}' \cos \omega + \frac{V'}{\mathfrak{v}'} (\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1) \cot \omega .$$

Nehmen wir nun die von dem Anfange der xy ausgehende gerade Linie, welche mit dem positiven Theile der Axe der x nach der Seite des positiven Theils der Axe der y hin den Winkel ω einschliesst, als den positiven Theil der Axe der (x) eines

Digitized by Google

neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $(x)(y)$ an, in welchem der positive Theil der Axe der (y) so angenommen wird, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der (x) durch den rechten Winkel $((x)(y))$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der (y) zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, und bezeichnen die Coordinaten desselben Punktes, dessen Coordinaten in dem Systeme der xy vorher durch x, y bezeichnet worden sind, in dem Systeme der $(x)(y)$ durch (x), (y), einen gewissen von 0^0 bis 360^0 wachsenden Winkel, dessen Bedeutung sogleich aus den folgenden Gleichungen ganz von selbst erhellen wird, aber durch χ; so ist offenbar

$$(x) = \cos\chi\sqrt{x^2+y^2}, \quad (y) = \sin\chi\sqrt{x^2+y^2}$$

und

$$x = \cos(\omega+\chi)\sqrt{x^2+y^2}, \quad y = \sin(\omega+\chi)\sqrt{x^2+y^2};$$

also

$$x = \cos\omega\cos\chi\sqrt{x^2+y^2} - \sin\omega\sin\chi\sqrt{x^2+y^2},$$

$$y = \sin\omega\cos\chi\sqrt{x^2+y^2} + \cos\omega\sin\chi\sqrt{x^2+y^2};$$

d. i.

$$x = (x)\cos\omega - (y)\sin\omega,$$

$$y = (x)\sin\omega + (y)\cos\omega;$$

und folglich, wie man hieraus leicht findet:

$$(x) = \quad x\cos\omega + y\sin\omega,$$

$$(y) = -x\sin\omega + y\cos\omega.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$(x) = \overset{w}{x}'\cos\omega^2 - \overset{w}{y}'\sin\omega\cos\omega - \frac{V'}{\mathfrak{v}'}(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1)\cos\omega$$
$$+ \overset{w}{x}'\sin\omega^2 + \overset{w}{y}'\sin\omega\cos\omega + \frac{V'}{\mathfrak{v}'}(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1)\cos\omega,$$

$$(y) = -\overset{w}{x}'\sin\omega\cos\omega + \overset{w}{y}'\sin\omega^2 + \frac{V'}{\mathfrak{v}'}(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1)\sin\omega$$
$$+ \overset{w}{x}'\sin\omega\cos\omega + \overset{w}{y}'\cos\omega^2 + \frac{V'}{\mathfrak{v}'}(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1)\cos\omega\cot\omega;$$

Digitized by Google

d. i.

$$(x)=\overset{w}{x}, \quad (y)=\overset{w}{y'}+\frac{V'}{\mathfrak{V}'}\cdot\frac{\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1}}{\sin\omega}.$$

Folglich ist

$$Y-(y)=Y-\overset{w}{y'}-\frac{V'}{\mathfrak{V}'}\cdot\frac{\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1}}{\sin\omega},$$

und daher

$$|Y-(y)|\sin\omega=(Y-\overset{w}{y'})\sin\omega-\frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1});$$

also nach dem Obigen

$$\mathfrak{S}=-G|Y-(y)|\sin\omega.$$

Denken wir uns das Schiff in seine erste Lage zurückgeführt, und bezeichnen die, jenachdem der durch die Coordinaten x, y, oder (x), (y) bestimmte Punkt in dieser Lage des Schiffs über oder unter der Projection seines Schwerpunkts auf der Ebene der xy oder $(x)(y)$ liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung des durch die Coordinaten x, y oder (x), (y) bestimmten Punktes von der Projection des Schwerpunkts des ganzen Schiffs auf der Ebene der xy oder $(x)(y)$ durch u; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar in völliger Allgemeinheit

$$(y)=Y+u,$$

also

$$u=(y)-Y, \quad -u=Y-(y);$$

folglich nach dem Obigen

$$\mathfrak{S}=Gu\sin\omega.$$

Bezeichnen wir die, jenachdem die Projection des Schwerpunkts des eingetauchten Theils $\mathfrak{V}'$ des Schiffs bei seiner ersten Lage, d. h. bekanntlich immer die Projection des Schwerpunkts des von dem Schiffe bei seiner ersten Lage verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wasserkörpers, auf der Ebene der xy über oder unter der Projection des Schwerpunkts des ganzen Schiffs bei seiner ersten Lage auf der Ebene der xy liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung der Projection des Schwerpunkts des eingetauchten Theils $\mathfrak{V}'$ des Schiffs bei seiner ersten Lage auf der Ebene der xy von der Projection des Schwerpunkts des ganzen Schiffs bei seiner ersten Lage auf der Ebene der xy durch v; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein

Digitized by Google

$$\overset{w}{y'} = Y + v,$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$(y) = Y + u$$

ist:

$$(y) - \overset{w}{y'} = u - v.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$(y) = \overset{w}{y'} + \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}}{\sin\omega},$$

d. i.

$$(y) - \overset{w}{y'} = u - v = \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}}{\sin\omega};$$

also

$$u = v + \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}}{\sin\omega},$$

und folglich, wenn man dies in den obigen Ausdruck der Stal lität einführt:

$$\mathfrak{S} = G\left(v + \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}}{\sin\omega}\right) \sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S} = G\left|v\sin\omega + \frac{V'}{\mathfrak{V}'}\left(\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}\right)\right|.$$

Bezeichnet man endlich die mit dem gehörigen Zeichen g nommene horizontale Entfernung der Projection des Schwerpunk des als aus Wasser bestehend gedachten aufgetauchten The auf der Ebene der xy von der Projection des Schwerpunkts d als aus Wasser bestehend gedachten untergetauchten Theils a der Ebene der xy durch v; so ist nach der Lehre von der V wandlung der Coordinaten allgemein

$$\overset{w}{x'} = \overset{w}{x_1} + v, \quad \overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1} = v;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{S} = G\left(\frac{V'}{\mathfrak{V}'} v + v\sin\omega\right).$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir das Gewicht einer Volumeneinheit Wasser mit $\bar{\omega}$, so ist, da das Gewicht des ganzen Schiffs dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist,

$$G = \bar{\omega}\mathfrak{V}',$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega}\mathfrak{V}' u \sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega}\,(V' v + \mathfrak{V}' v \sin\omega).$$

Noch einen anderen bemerkenswerthen, und in manchen Fällen eine vortheilhafte Anwendung gestattenden Ausdruck für die Stabilität kann man auf folgende Art entwickeln.

Nach dem Obigen ist

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{X}}' - \mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = V'\overset{w}{x}' - V_1\overset{w}{x}_1,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}_1, \quad V' = V_1$$

ist:

$$\mathfrak{V}'(\overset{w}{\mathfrak{X}}' - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1) = V'(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1)$$

oder

$$\mathfrak{V}_1(\overset{w}{\mathfrak{X}}' - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1) = V_1(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1).$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{S} = G\{v\sin\omega + \frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1)\}$$

ist, so ist auch

$$\mathfrak{S} = G(\overset{w}{\mathfrak{X}}' - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1 + v\sin\omega).$$

Nach dem Obigen ist aber auch

$$\overset{w}{\mathfrak{X}}' = (\overset{w}{\mathfrak{X}}')\cos\omega - (\overset{w}{\mathfrak{Y}}')\sin\omega,$$

$$\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = (\overset{w}{\mathfrak{x}}_1)\cos\omega - (\overset{w}{\mathfrak{y}}_1)\sin\omega;$$

wo die Coordinaten $(\overset{w}{\mathfrak{X}}')$, $(\overset{w}{\mathfrak{Y}}')$ und $(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1)$, $(\overset{w}{\mathfrak{y}}_1)$ den durch die Coor-

dinaten $\overset{w}{\mathfrak{X}}'$, $\overset{w}{\mathfrak{Y}}'$ und $\overset{w}{x_1}$, $\overset{w}{y_1}$ im Systeme der xy bestimmten Punkten im Systeme der $(x)(y)$ angehören sollen; also ist

$$\overset{w}{\mathfrak{X}}' - \overset{w}{x_1} = [(\overset{w}{\mathfrak{X}}') - (\overset{w}{x_1})]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}}') - (\overset{w}{y_1})]\sin\omega,$$

und folglich

$$\mathfrak{S} = G\{v\sin\omega + [(\overset{w}{\mathfrak{X}}') - (\overset{w}{x_1})]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}}') - (\overset{w}{y_1})]\sin\omega\},$$

oder

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega}\mathfrak{v}'\{v\sin\omega + [(\overset{w}{\mathfrak{X}}') - (\overset{w}{x_1})]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}}') - (\overset{w}{y_1})]\sin\omega\}.$$

Weil bekanntlich

$$v = \overset{w}{x}' - \overset{w}{x_1}$$

ist, so ist auch

$$v = \frac{\mathfrak{v}'}{V'}(\overset{w}{\mathfrak{X}}' - \overset{w}{x_1}),$$

also

$$V'v = \mathfrak{v}'\{[(\overset{w}{\mathfrak{X}}') - (\overset{w}{x_1})]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}}') - (\overset{w}{y_1})]\sin\omega\}.$$

Wir werden späterhin von diesen Ausdrücken Anwendung zu machen Gelegenheit finden.

§. 7.

Weil wir die Drehungsaxe, d. h. die Axe der z, als horizontal angenommen haben, so ist klar, dass der aufgetauchte und der untergetauchte Theil in einer der Axe der z parallelen geraden Linie mit einander zusammenstossen müssen. Diese gerade Linie wollen wir jetzt als die Axe der ζ eines dem Systeme der xyz parallelen Coordinatensystems der $\xi\eta\zeta$ annehmen, indem wir zugleich den Anfang dieses neuen Coordinatensystems in den Endpunkt der in Rede stehenden geraden Linie, so weit dieselbe dem aufgetauchten und dem untergetauchten Theile gemeinschaftlich angehört, verlegen, von welchem aus dieselbe nach der Seite der positiven z oder ζ hin liegt; auch wollen wir die ihrer Länge nach bestimmte gerade Linie, in welcher der aufgetauchte und der untergetauchte Theil mit einander zusammenstossen, durch a bezeichnen. Von dem auf die vorher angegebene Weise bestimmten Anfangspunkte der $\xi\eta\zeta$ an theile man nun die Linie a in n einander gleiche Theile ein, deren jeder durch i bezeichnet wer-

den mag, und nehme an, dass in Bezug auf die Curve, in welcher die horizontale Wasserfläche von der Oberfläche des Schiffs bei seiner ersten Lage geschnitten wird, den Werthen

$$0,\ i,\ 2i,\ 3i,\ 4i,\ldots.ni;$$

wo $ni=a$ ist, von ζ als Abscissen für den aufgetauchten und für den untergetauchten Theil, welche zwei Theile wir hier immer als homogen oder als aus Wasser bestehend betrachten, respective die Werthe

$$\overset{0}{\xi'},\ \overset{1}{\xi'},\ \overset{2}{\xi'},\ \overset{3}{\xi'},\ \overset{4}{\xi'},\ldots.\overset{n}{\xi'}$$

und

$$\overset{0}{\xi_1},\ \overset{1}{\xi_1},\ \overset{2}{\xi_1},\ \overset{3}{\xi_1},\ \overset{4}{\xi_1},\ldots.\overset{n}{\xi_1}$$

von ξ als Ordinaten entsprechen. Setzen wir nun voraus, dass ω unendlich klein sei, und bezeichnen den diesen Winkel messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise durch (ω), so ergiebt sich, da wir die auf der Axe der ζ senkrecht stehenden Schnitte des aufgetauchten und des untergetauchten Theils mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner der Winkel ω ist, als Kreissectoren betrachten können, nach bekannten Sätzen aus der Lehre vom Kreise und aus der Lehre vom Schwerpunkte, dass, wenn wir die ξ der Schwerpunkte des aufgetauchten Theils V' und des untergetauchten Theils V_1 respective durch ξ' und ξ_1 bezeichnen, die Grössen

$$V'\xi' \text{ und } V_1\xi_1$$

die Gränzen sind, denen respective die Grössen

$$\frac{1}{2}i\overset{0}{\xi'^2}(\omega).\frac{4\overset{0}{\xi'}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

$$+\frac{1}{2}i\overset{1}{\xi'^2}(\omega).\frac{4\overset{1}{\xi'}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

$$+\frac{1}{2}i\overset{2}{\xi'^2}(\omega).\frac{4\overset{2}{\xi'}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{2}i\overset{n-1}{\xi'^2}(\omega).\frac{4\overset{n-1}{\xi'}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

und

$$\frac{1}{2}i\overset{0}{\xi_1}^2(\omega).\frac{4\overset{0}{\xi_1}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

$$+\frac{1}{2}i\overset{1}{\xi_1}^2(\omega).\frac{4\overset{1}{\xi_1}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

$$+\frac{1}{2}i\overset{2}{\xi_1}^2(\omega).\frac{4\overset{2}{\xi_1}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{2}i\overset{n-1}{\xi_1}^2(\omega).\frac{4\overset{n-1}{\xi_1}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega,$$

d. i. respective die Grössen

$$\frac{1}{3}i(\overset{0}{\xi'}^3+\overset{1}{\xi'}^3+\overset{2}{\xi'}^3+\overset{3}{\xi'}^3+\ldots+\overset{n-1}{\xi'}^3)\sin\omega$$

und

$$\frac{1}{3}i(\overset{0}{\xi_1}^3+\overset{1}{\xi_1}^3+\overset{2}{\xi_1}^3+\overset{3}{\xi_1}^3+\ldots+\overset{n-1}{\xi_1}^3)\sin\omega$$

sich nähern, wenn n in's Unendliche wächst, oder, was dasselbe ist, wenn i in's Unendliche abnimmt oder sich der Null nähert.

Setzen wir aber allgemein für den aufgetauchten Theil

$$\xi=F(\zeta),$$

und für den untergetauchten Theil

$$\xi=f(\zeta);$$

so ist

$$\overset{0}{\xi'}=F(0),\quad \overset{1}{\xi'}=F(i),\quad \overset{2}{\xi'}=F(2i),\ldots\overset{n-1}{\xi'}=F((n-1)i);$$

$$\overset{0}{\xi_1}=f(0),\quad \overset{1}{\xi_1}=f(i),\quad \overset{2}{\xi_1}=f(2i),\ldots\overset{n-1}{\xi_1}=f((n-1)i);$$

und

$$V'\xi' \text{ und } V_1\xi_1$$

sind also die Gränzen, denen respective

$$\frac{1}{3}i\{(F(0))^3+(F(i))^3+(F(2i))^3+\ldots+(F((n-1)i))^3\}\sin\omega$$

Digitized by Google

und

$$\frac{1}{3}i\{(f(0))^3+(f(i))^3+(f(2i))^3+\ldots+(f((n-1)i))^3\}\sin\omega,$$

oder, was offenbar ganz dasselbe ist, respective

$$\frac{1}{3}i\{(F(0))^3+(F(i))^3+(F(2i))^3+\ldots+(F(ni))^3\}\sin\omega$$

und

$$\frac{1}{3}i\{(f(0))^3+(f(i))^3+(f(2i))^3+\ldots+(f(ni))^3\}\sin\omega$$

sich nähern, wenn i sich der Null nähert. Weil nun $ni=a$ ist, so sind nach einem bekannten Satze von den bestimmten Integralen die Gränzen, denen die Grössen

$$\frac{1}{3}i\{(F(0))^3+(F(i))^3+(F(2i))^3+\ldots+(F(ni))^3\}\sin\omega$$

und

$$\frac{1}{3}i\{(f(0))^3+(f(i))^3+(f(2i))^3+\ldots+(f(ni))^3\}\sin\omega$$

sich nähern, wenn i sich der Null nähert, respective die mit der hier natürlich als constant zu betrachtenden Grösse $\frac{1}{3}\sin\omega$ multiplicirten bestimmten Integrale

$$\int_0^a (F(\xi))^3\partial\xi \text{ und } \int_0^a (f(\xi))^3\partial\xi;$$

und es ist also

$$V'\xi'=\frac{1}{3}\sin\omega\int_0^a (F(\xi))^3\partial\xi,$$

$$V_1\xi_1=\frac{1}{3}\sin\omega\int_0^a (f(\xi))^3\partial\xi;$$

folglich, weil bekanntlich $V'=V_1$ ist:

$$V'(\xi'-\xi_1)=\frac{1}{3}\sin\omega\int_0^a \{(F(\xi))^3-(f(\xi))^3\}\partial\xi$$

oder

Digitized by Google

$$V'.\frac{\xi'-\xi_1}{\sin\omega}=\frac{1}{3}\int_0^a \{(F(\xi))^3-(f(\xi))^3\}\partial\xi.$$

Wegen der Parallellität der beiden Coordinatensysteme der xyz und $\xi\eta\zeta$ ist

$$\xi'-\xi_1=\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1},$$

also

$$V'.\frac{\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1}}{\sin\omega}=\frac{1}{3}\int_0^a \{(F(\xi))^3-(f(\xi))^3\}\partial\xi$$

oder, weil

$$\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1}=v$$

gesetzt worden ist:

$$V'.\frac{v}{\sin\omega}=\frac{1}{3}\int_0^a \{(F(\xi))^3-(f(\xi))^3\}\partial\xi$$

oder

$$V'v=\frac{1}{3}\sin\omega\int_0^a \{(F(\xi))^3-(f(\xi))^3\}\partial\xi.$$

Folglich ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$u=v+\frac{\int_0^a \{(F(\xi))^3-(f(\xi))^3\}\partial\xi}{3\mathfrak{V}'}$$

und

$$\mathfrak{S}=Gu\sin\omega=G\{v+\frac{\int_0^a [(F(\xi))^3-(f(\xi))^3]\partial\xi}{3\mathfrak{V}'}\}\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\mathfrak{V}'u\sin\omega=\bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v+\frac{1}{3}\int_0^a [(F(\xi))^3-(f(\xi))^3]\partial\xi\}\sin\omega.$$

Weil ω als unendlich klein angenommen worden ist, so kann e an auch

$$\mathfrak{S}=Gu(\omega)=G\{v+\frac{\int_0^a [(F(\xi))^3-(f(\xi))^3]\partial\xi}{3\mathfrak{V}'}\}(\omega)$$

Digitized by Google

oder

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\mathfrak{V}'u(\omega)=\bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v+\frac{1}{3}\int_0^a[(F(\xi))^3-(f(\xi))^3]\partial\xi\}(\omega),$$

oder, wenn ω in Secunden ausgedrückt angenommen wird, folglich

$$(\omega)=\omega\mathrm{Arc}\,1''$$

ist:

$$\mathfrak{S}=Gu\omega\mathrm{Arc}1''=G\{v+\frac{\int_0^a[(F(\xi))^3-(f(\xi))^3]\partial\xi}{3\mathfrak{V}'}\}\omega\mathrm{Arc}\,1''$$

oder

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\mathfrak{V}'u\omega\mathrm{Arc}1''=\bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v+\frac{1}{3}\int_0^a[(F(\xi))^3-(f(\xi))^3]\partial\xi\}\omega\mathrm{Arc}1''$$

setzen. Bekanntlich ist

$$\mathrm{Arc}1''=\frac{1}{206264,8}.$$

Wenn die Linie, in welcher die horizontale Wasserfläche von der Oberfläche des Schiffs in seiner ersten Lage geschnitten wird, von einer geraden Linie, gewissermassen als Axe, in zwei einander völlig gleiche und ähnliche Theile getheilt, und die Drehungsaxe oder die Axe der z dieser Linie parallel angenommen wird, so kann, wie leicht erhellet, immer unter Voraussetzung eines unendlich kleinen ω, nur dann, wie es erforderlich ist, $V'=V_1$ sein, wenn der aufgetauchte und untergetauchte Theil in der in Rede stehenden geraden Linie oder Axe mit einander zusammenstossen, d. h. wenn mit dieser Linie die Axe der ξ zusammenfällt, und folglich allgemein

$$F(\xi)=-f(\xi),\quad f(\xi)=-F(\xi)$$

ist. Also ist unter der gemachten Voraussetzung nach dem Obigen

$$u=v+\frac{2\int_0^a(F(\xi))^3\partial\xi}{3\mathfrak{V}'}$$

$$=v-\frac{2\int_0^a(f(\xi))^3\partial\xi}{3\mathfrak{V}'}$$

oder

$$u = v + \frac{\int^{a} (2F(\xi))^3 \partial\xi}{12\mathfrak{V}'}$$

$$= v - \frac{\int_0^{a} (2f(\xi))^3 \partial\xi}{12\mathfrak{V}'}$$

und

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega = G\{v + \frac{2\int_0^{a} (F(\xi))^3 \partial\xi}{3\mathfrak{V}'}\}\sin\omega$$

$$= G\{v - \frac{2\int_0^{a} (f(\xi))^3 \partial\xi}{3\mathfrak{V}'}\}\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega = G\{v + \frac{\int_0^{a} (2F(\xi))^3 \partial\xi}{12\mathfrak{V}'}\}\sin\omega$$

$$= G\{v - \frac{\int_0^{a} (2f(\xi))^3 \partial\xi}{12\mathfrak{V}'}\}\sin\omega.$$

Auch ist

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega}\mathfrak{V}'u\sin\omega = \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v + \frac{2}{3}\int_0^{a} (F(\xi))^3 \partial\xi\}\sin\omega$$

$$= \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v - \frac{2}{3}\int_0^{a} (f(\xi))^3 \partial\xi\}\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega}\mathfrak{V}'u\sin\omega = \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v + \frac{1}{12}\int_0^{a} (2F(\xi))^3 \partial\xi\}\sin\omega$$

$$= \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v - \frac{1}{12}\int_0^{a} (2f(\xi))^3 \partial\xi\}\sin\omega.$$

Endlich ist, wenn ω in Secunden ausgedrückt ist:

$$\mathfrak{S} = Gu\omega \mathrm{Arc}1'' = G\{v + \frac{2\int_0^a (F(\zeta))^3 \partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}\}\omega \mathrm{Arc}1''$$

$$= G\{v - \frac{2\int_0^a (f(\zeta))^3 \partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}\}\omega \mathrm{Arc}1''$$

oder

$$\mathfrak{S} = Gu\omega \mathrm{Arc}1'' = G\{v + \frac{\int_0^a (2F(\zeta))^3 \partial\zeta}{12\mathfrak{V}'}\}\omega \mathrm{Arc}1''$$

$$= G\{v - \frac{\int_0^a (2f(\zeta))^3 \partial\zeta}{12\mathfrak{V}'}\}\omega \mathrm{Arc}1'',$$

und

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega}\mathfrak{V}'u\omega \mathrm{Arc}1'' = \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v + \frac{2}{3}\int_0^a (F(\zeta))^3 \partial\zeta\}\omega \mathrm{Arc}1''$$

$$= \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v - \frac{2}{3}\int_0^a (f(\zeta))^3 \partial\zeta\}\omega \mathrm{Arc}1''$$

oder

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega}\mathfrak{V}'u\omega \mathrm{Arc}1'' = \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v + \frac{1}{12}\int_0^a (2F(\zeta))^3 \partial\zeta\}\omega \mathrm{Arc}1''$$

$$= \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v - \frac{1}{12}\int_0^a (2f(\zeta))^3 \partial\zeta\}\omega \mathrm{Arc}1''.$$

§. 8.

Wenn alle auf der Drehungsaxe senkrecht stehenden Schnitte des Schiffs einander gleiche und ähnliche ebene Figuren sind, und diese Figuren auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit sämmtlich vollständig mit einander übereinstimmen, so kann man, wie aus den in §. 6. entwickelten allgemeinen Formeln und aus der Lehre vom Schwerpunkte sogleich erhellet, alle in diesen Formeln vorkommenden Grössen, natürlich mit Ausnahme der

Digitized by Google

immer das Gewicht des ganzen Schiffs bezeichnenden Grösse G, auf nur einen dieser einander gleichen und ähnlichen und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit vollständig mit einander übereinstimmenden Schnitte, als eine ebene Figur betrachtet, den wir unserer ferneren Betrachtung zum Grunde legen wollen, beziehen. Daher ist nach §. 6. unter dieser Voraussetzung

$$u = v + \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}}{\sin\omega} = v + \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{v}{\sin\omega}$$

und

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega$$
$$= G\{v\sin\omega + \frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1})\} = G(\frac{V'}{\mathfrak{V}'}v + v\sin\omega),$$

so wie auch

$$\mathfrak{S} = G\{v\sin\omega + [(\overset{w}{\mathfrak{X}'}) - (\overset{w}{\mathfrak{x}_1})]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}'}) - (\overset{w}{\mathfrak{y}_1})]\sin\omega\}.$$

Genügt nun zugleich der Schiffskörper der am Ende des vorhergehenden Paragraphen zum Grunde gelegten Bedingung, wird ferner wie dort die Drehungsaxe der geraden Linie, welche die Durchschnittslinie der Oberfläche des Schiffs in seiner ersten Lage mit der horizontalen Wasserfläche in zwei völlig gleiche und ähnliche Theile theilt, parallel angenommen, und bezeichnet, dies vorausgesetzt, ϱ die Länge der geraden Linie, in welcher von dem unserer Betrachtung zum Grunde gelegten Schnitte des Schiffs in dessen erster Lage die horizontale Wasserfläche geschnitten wird; so ist, weil immer angenommen worden ist, dass die Drehung des Schiffs um die Drehungsaxe in demselben Sinne erfolgt sei, in welchem man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y, welcher bekanntlich nach oben hin gerichtet angenommen worden ist, zu gelangen, also die positiven ersten Coordinaten, wenn man sie sich vom Mittelpunkte der in Rede stehenden geraden Linie ausgehend denkt, nach der Seite des aufgetauchten Theils hin genommen werden müssen, für ein unendlich kleines ω offenbar nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1} = v = \frac{2\varrho\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega - \{-\frac{2\varrho\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega\},$$

d. i.

$$\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1} = v = \frac{2\varrho\sin\omega}{3(\omega)}.$$

Nun ist aber

$$V' = \frac{1}{8}\varrho^2(\omega),$$

also

$$\overset{\bullet}{V}'(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1) = V'v = \frac{1}{12}\varrho^3 \sin\omega,$$

folglich nach dem Obigen:

$$u = v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'},$$

also

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega = G(v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'})\sin\omega,$$

oder

$$\mathfrak{S} = Gu(\omega) = G(v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'})(\omega),$$

oder, wenn ω in Secunden ausgedrückt ist:

$$\mathfrak{S} = Gu\omega\mathrm{Arc}1'' = G(v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'})\,\omega\mathrm{Arc}1''.$$

Der in der durch den Schwerpunkt des Schnitts in seiner ersten Lage gehenden Vertikale oder, was dasselbe ist, der in der durch die Schwerpunkte des Schnitts und seines eingetauchten Theils in der ersten Lage des Schnitts gehenden geraden Linie liegende Punkt, dessen nach dem Obigen gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung von dem Schwerpunkte des Schnitts die von ω, welches aber jetzt immer als unendlich klein betrachtet worden ist, so dass das Schiff nur eine unendlich kleine Drehung erlitten hat, ganz unabhängige völlig bestimmte Grösse

$$u = v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}$$

ist, ist zuerst von Bouguer in dem Traité du navire. Paris. 1746. 4. p. 257. das Metacentrum des Schnitts genannt worden, und da nun nach dem Obigen

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega,$$

nach §. 6. aber u positiv oder negativ ist, jenachdem das Metacentrum des Schnitts über oder unter dessen Schwerpunkte liegt, so ist klar, dass unter allen vorher gemachten Voraussetzungen die Stabilität des Schiffs in Bezug auf die angenommene Drehungsaxe positiv oder negativ ist, d. h. dass dasselbe bei unendlich kleinen Drehungen von selbst wieder in die ursprüngliche

Digitized by Google

Lage des ruhigen Schwimmens zurückkehrt, oder die angefangene Drehung nach deren Richtung hin weiter fortsetzt, jenachdem das Metacentrum eines der einander gleichen und ähnlichen Schnitte des Schiffs, welche auf der Drehungsaxe senkrecht stehen, über oder unter dessen Schwerpunkte liegt, wobei man sich das Schiff in der Lage des ruhigen Schwimmens auf dem Wasser zu denken hat.

Von den in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln wollen wir nun einige Anwendungen auf specielle Fälle machen.

§. 9.

Aufgabe. Ein gerades dreiseitiges völlig gleichförmig dichtes Prisma, dessen Grundflächen gleichschenklige Dreiecke sind, schwimme so auf dem Wasser, dass in Taf. I. Fig. 1. die Grundfläche ABC, in welcher $AC=BC$ ist, sich in vertikaler Lage befindet und die Grundlinie AB des gleichschenkligen Dreiecks ABC horizontal, die Spitze C aber nach unten gekehrt ist; man soll die Stabilität dieses Prismas für auf seinen Grundflächen senkrechte horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Sei $A'B'C$, wo $A'B'$ horizontal ist, der eingetauchte Theil des Dreiecks ABC, und werde, wenn CD die auf AB senkrecht stehende Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ABC ist, $AB=a$, $CD=b$ und $A'B'=x$, $CD'=y$ gesetzt. Bezeichnet dann μ das specifische Gewicht der Materie des Prismas, so ist aus bekannten Gründen

$$\Delta ABC : \Delta A'B'C = 1 : \mu,$$

also

$$\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}xy = ab : xy = 1 : \mu.$$

Nun ist aber

$$a : b = x : y,$$

also

$$y = \frac{b}{a}x, \quad x = \frac{a}{b}y;$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$ab : \frac{b}{a}x^2 = a^2 : x^2 = 1 : \mu,$$

$$ab:\frac{a}{b}y^2=b^2:y^2=1:\mu;$$

d. i.

$$x^2=\mu a^2,\quad y^2=\mu b^2;$$

also

$$x=a\sqrt{\mu},\quad y=b\sqrt{\mu}.$$

Mit Rücksicht auf die aus dem Obigen bekannte Bedeutung von v ist aber nach einem bekannten Satze vom Schwerpunkte

$$v=-(\frac{2}{3}\,CD-\frac{2}{3}\,CD')=-\frac{2}{3}(b-y),$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$v=-\frac{2}{3}b(1-\sqrt{\mu}),$$

und folglich, weil

$$\varrho=x=a\sqrt{\mu},\quad \mathfrak{V}'=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\mu ab$$

ist, wo wir die Bedeutung von ϱ und $\mathfrak{V}'$ aus dem vorhergehenden Paragraphen als bekannt voraussetzen, nach diesem Paragraphen

$$u=\frac{a^2\sqrt{\mu}}{6b}-\frac{2}{3}b(1-\sqrt{\mu})=\frac{a^2\sqrt{\mu}-4b^2(1-\sqrt{\mu})}{6b},$$

oder auch

$$u=\frac{(a^2+4b^2)\sqrt{\mu}-4b^2}{6b}.$$

Weil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\mathfrak{S}=Gu\omega\,\mathrm{Arc}1''$$

ist, wo immer ω in Secunden ausgedrückt angenommen wird, so ist

$$\mathfrak{S}=G\frac{(a^2+4b^2)\sqrt{\mu}-4b^2}{6b}\omega\mathrm{Arc}1'',$$

oder, wenn man $a=2\alpha$, $b=\beta$ setzt:

$$\mathfrak{S}=2G\frac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\mu}-\beta^2}{3\beta}\omega\mathrm{Arc}1''.$$

Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, so ist $\beta^2=4\alpha^2-\alpha^2=3\alpha^2$, und folglich, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{S}=2\alpha G\frac{4\sqrt{\mu}-3}{3\sqrt{3}}\omega\text{Arc}1''.$$

Wenn in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC der Winkel ACB ein rechter Winkel ist, so ist $\beta=\alpha$, und folglich, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{S}=\frac{2}{3}\alpha G(2\sqrt{\mu}-1)\omega\text{Arc}1''.$$

Für das gleichschenklige Dreieck im Allgemeinen ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\mu}-\beta^2>0,$$

d. i.

$$\sqrt{\mu}>\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\text{ oder }\mu>\frac{\beta^4}{(\alpha^2+\beta^2)^2},$$

folglich, wenn wir jede der beiden gleichen Seiten des Dreiecks durch γ bezeichnen,

$$\mu>\frac{\beta^4}{\gamma^4}\quad\text{oder}\quad\frac{\beta}{\gamma}<\sqrt[4]{\mu}$$

ist.

Für das gleichseitige Dreieck ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$4\sqrt{\mu}-3>0,\ \sqrt{\mu}>\frac{3}{4},\quad\mu>\frac{9}{16}$$

ist.

Für das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$2\sqrt{\mu}-1>0,\quad\sqrt{\mu}>\frac{1}{2},\quad\mu>\frac{1}{4}$$

ist.

Anmerkung. Der Auflösung dieser Aufgabe füge ich nun noch die folgenden Bemerkungen über den Ausdruck der Stabilität bei unendlich kleinen Drehungen im Allgemeinen hinzu. Nämlich Bouguer, Euler, Chapman und andere Schriftsteller über diesen Gegenstand betrachten überhaupt nur die Stabilität unter Voraussetzung unendlich kleiner Drehungen, und bei allen diesen Schriftstellern erscheint der Ausdruck der Stabilität als von dem Drehungswinkel ω ganz unabhängig, so dass z. B. bei

Digitized by Google

Euler in der Scientia navalis. T. I. p. 99. im vorliegenden Falle der Ausdruck der Stabilität nicht wie oben

$$2G\frac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\mu-\beta^2}}{3\beta}\omega\text{Arc1}''$$

oder eigentlich

$$2G\frac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\mu-\beta^2}}{3\beta}\sin\omega,$$

sondern

$$2G\frac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\mu-\beta^2}}{3\beta}$$

ist. Wenn sich nun nach meiner Meinung dies auch durchaus nicht billigen lässt, da insbesondere die sämmtlichen obigen Ausdrücke für die Stabilität bei unendlich kleinen Drehungen nur Näherungsausdrücke sind, welche desto genauere Resultate liefern, je kleiner der Drehungswinkel ω ist, und also schon deshalb diese Ausdrücke nicht von ω unabhängig sein können, so ist doch auf der anderen Seite zu bemerken, dass die von den genannten und anderen Schriftstellern befolgte Methode darin ihre Rechtfertigung findet, dass es sich hierbei eigentlich nur um die Vergleichung verschiedener Stabilitaten handelt, und wenn man dann, um eben solche Vergleichungen mit Leichtigkeit anstellen zu können, immer denselben unendlich kleinen Drehungswinkel zum Grunde legt, und, wie jene Schriftsteller sämmtlich thun, überhaupt nur Stabilitäten für unendlich kleine Drehungswinkel betrachtet, so ist es allerdings verstattet, den Factor ωArc1″ aus den Ausdrücken der Stabilität wegzulassen. Der erste Schriftsteller aber, welcher die Stabilität der Schiffe aus einem allgemeineren und allein wirklich sachgemässen Gesichtspunkte für endliche bestimmte Drehungswinkel, betrachtet hat, scheint, was hier als besonders verdienstlich hervorgehoben werden muss, Atwood zu sein, in einer in den Philosophical Transactions for the year 1798. Part. I. p. 201. unter dem Titel: A Disquisition on the Stability of Ships. By George Atwood erschienenen Abhandlung, die, wie ich aus einem der neuesten englischen Werke über die Schiffsbaukunst: Treatise on the Theory and Practice of Naval Architecture: beeing the Article „Ship-Building“ in the Encyclopaedia Britannica. By Augustin F. B. Creuze, Membre of the late School of Naval Architecture, President of the Portsmouth Philosophical Society. Edinburgh. 1841. 4°. an verschiedenen Stellen desselben ersehe, namentlich auch in England mit Recht sehr geschätzt wird, so wie auch eine frühere Abhandlung desselben Verfassers, die in den Philosophical Transactions for the year 1796. Part I. p. 46. unter dem Titel: The Construction and Analysis of geometrical Propositions, determining the Positions assumed by

homogoneal Bodies which float freely, and at rest, on a Fluid's Surface; also determining the Stability of Ships, and of other floating Bodies. By George Atwood erschienen ist. Wenn man die Sache aus einem solchen allgemeineren Gesichtspunkte für Drehungswinkel von bestimmter endlicher Grösse betrachtet, sollte man nach meiner Ansicht auch aus den dem Falle eines unendlich kleinen Drehungswinkels entsprechenden Ausdrücken der Stabilität den Factor ωArcl″ nicht weglassen, weshalb wir denselben auch in dieser Abhandlung stets beibehalten werden.

§. 10.

Aufgabe. Ein gerades dreiseitiges völlig gleichförmig dichtes Prisma, dessen Grundflächen gleichschenklige Dreiecke sind, schwimme so auf dem Wasser, dass in Taf. I. Fig. 2. die Grundfläche ABC, in welcher $AC=BC$ ist, sich in vertikaler Lage befindet und die Grundlinie AB des gleichschenkligen Dreiecks horizontal, die Spitze C aber nach oben gekehrt ist; man soll die Stabilität dieses Prismas für auf seinen Grundflächen senkrechte horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Sei $ABA'B'$, wo $A'B'$ horizontal und also mit AB parallel ist, der eingetauchte Theil des Dreiecks ABC, und werde, wenn CD die auf AB senkrecht stehende Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ABC ist, $AB=a$, $CD=b$ und $A'B'=x$, $CD'=y$ gesetzt. Bezeichnet dann μ das specifische Gewicht der Materie des Prismas, so ist aus bekannten Gründen

$$\Delta ABC : \mathrm{Trap}\,ABA'B' = 1 : \mu,$$

also

$$\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}(a+x)(b-y) = ab : (a+x)(b-y) = 1 : \mu.$$

Nun ist aber ganz wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$y = \frac{b}{a}x, \quad x = \frac{a}{b}y;$$

also

$$ab : (a+x)\left(b-\frac{b}{a}x\right) = a^2 : a^2 - x^2 = 1 : \mu,$$

$$ab : \left(a+\frac{a}{b}y\right)(b-y) = b^2 : b^2 - y^2 = 1 : \mu;$$

Digitized by Google

d. i

$$x^2=(1-\mu)a^2, \quad y^2=(1-\mu)b^2;$$

also

$$x=a\sqrt{1-\mu}, \quad y=b\sqrt{1-\mu}.$$

Mit Rücksicht auf die aus den früheren Paragraphen bekannte Bedeutung von v ist aber nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte des Dreiecks und des Trapeziums

$$v=\frac{a+2x}{3(a+x)}(b-y)-\frac{1}{3}b,$$

d. i., wie man leicht findet:

$$v=\frac{1}{3}b\{(1+2\sqrt{1-\mu})\frac{1-\sqrt{1-\mu}}{1+\sqrt{1-\mu}}-1\}$$

oder

$$v=-\frac{2}{3}b\frac{1-\mu}{1+\sqrt{1-\mu}}=-\frac{2}{3}b\frac{(1-\mu)(1-\sqrt{1-\mu})}{\mu},$$

und folglich, weil

$$\varrho=x=a\sqrt{1-\mu},$$

$$\mathfrak{V}'=\frac{1}{2}(a+x)(b-y)=\frac{1}{2}ab(1+\sqrt{1-\mu})(1-\sqrt{1-\mu});$$

d. i.

$$\varrho=a\sqrt{1-\mu}, \quad \mathfrak{V}'=\frac{1}{2}\mu ab$$

ist:

$$u=\frac{(1-\mu)a^2\sqrt{1-\mu}}{6\mu b}-\frac{2}{3}b\frac{(1-\mu)(1-\sqrt{1-\mu})}{\mu},$$

also, wie man hieraus mittelst leichter Rechnung findet:

$$u=\frac{1-\mu}{6\mu b}\{(a^2+4b^2)\sqrt{1-\mu}-4b^2\}.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{S}=\frac{1-\mu}{6\mu b}G\{(a^2+4b^2)\sqrt{1-\mu}-4b^2\}\omega\mathrm{Arc}1''.$$

Digitized by Google

Setzt man $a=2\alpha$, $b=\beta$, so ist

$$\mathfrak{S}=\frac{2(1-\mu)}{3\mu\beta}G\{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{1-\mu}-\beta^2\}\omega\mathrm{Arc}1''.$$

Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, so ist $\beta^2=3\alpha^2$, und folglich, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{S}=\frac{2\alpha(1-\mu)}{3\mu\sqrt{3}}G(4\sqrt{1-\mu}-3)\omega\,\mathrm{Arc}1''.$$

Wenn in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC der Winkel ACB ein rechter Winkel ist, so ist $\beta=\alpha$, also

$$\mathfrak{S}=\frac{2\alpha(1-\mu)}{3\mu}G(2\sqrt{1-\mu}-1)\omega\mathrm{Arc}1''.$$

Für das gleichschenklige Dreieck im Allgemeinen ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{1-\mu}-\beta^2>0,$$

d. i., wie man hieraus leicht findet:

$$\mu<\frac{\alpha^2(\alpha^2+2\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\quad\text{oder}\quad\mu<\frac{1+2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right\}^2}$$

ist. Bezeichnet man die beiden einander gleichen Seiten des Dreiecks durch γ, so lässt sich, weil $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ ist, diese Bedingung leicht auf den Ausdruck

$$\mu<\frac{(\gamma^2-\beta^2)(\gamma^2+\beta^2)}{\gamma^4}\quad\text{oder}\quad\mu<1-\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^4$$

bringen.

Für das gleichseitige Dreieck ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$4\sqrt{1-\mu}-3>0,$$

d. i. wenn $\mu<\frac{7}{16}$ ist.

Für das rechtwinklige gleichschschenklige Dreieck ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$2\sqrt{1-\mu}-1>0,$$

d. i. wenn $\mu<\frac{3}{4}$ ist.

Digitized by Google

§. 11.

Soll das in den beiden vorhergehenden Paragraphen betrachtete Prisma sowohl in der in §. 9., als auch in der in §. 10. angenommenen Lage schwimmen können, ohne umzuschlagen, d. h. soll dieses Prisma in beiden Fällen mit einer gewissen positiven Stabilität auf dem Wasser schwimmen können, so muss

$$\frac{\beta^4}{\gamma^4} < \mu < 1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4}$$

sein, was offenbar nur dann der Fall sein kann, wenn

$$1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4} > \frac{\beta^4}{\gamma^4}, \quad 2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^4 < 1, \quad \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^4 < \frac{1}{2};$$

also

$$\frac{\beta}{\gamma} < \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{oder} \quad \gamma > \beta\sqrt[4]{2}$$

ist; und weil nun

$$\cos\frac{1}{2}ACB = \frac{\beta}{\gamma}$$

ist, so muss

$$\cos\frac{1}{2}ACB < \frac{1}{\sqrt[4]{2}},$$

also

$$\frac{1}{2}\angle ACB > 32^{\circ}.46', \quad \angle ACB > 65^{\circ}.32'$$

sein.

§. 12.

Aufgabe. Ein rechtwinkliges völlig gleichförmig dichtes Parallelepipedon schwimme so auf dem Wasser, dass in Taf. I. Fig. 3. seine Grundfläche *ABCD* sich in vertikaler Lage befindet, und deren einander parallele Seiten *AB* und *CD* horizontal sind; man soll die Stabilität dieses Parallelepipedons für auf der Grund-

Digitized by Google

fläche $ABCD$ senkrechte horizontale Axen und unen lich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Sei $ABA'B'$, wo $A'B'$ horizontal und also $\parallel$ AB und CD parallel ist, der eingetauchte Theil des Rechtec $ABCD$, und werde $AB=CD=a$, $AC=BD=b$ und $AA'=BB'=$ gesetzt; so ist aus bekannten Gründen, wenn wieder μ das sp cifische Gewicht der Materie des Parallelepipedons bezeichnet,

$$ABCD:ABA'B'=1:\mu;$$

also

$$ab:ax=b:x=1:\mu,$$

folglich $x=\mu b$. Aber offenbar

$$v=\frac{1}{2}(x-b)=-\frac{1}{2}(1-\mu)b$$

und $\varrho=a$, $\mathfrak{V}'=ax=\mu ab$; also

$$u=\frac{a^2}{12\mu b}-\frac{1}{2}(1-\mu)b=\frac{a^2-6\mu(1-\mu)b^2}{12\mu b},$$

und folglich

$$\mathfrak{S}=\frac{a^2-6\mu(1-\mu)b^2}{12\mu b}G\omega\mathrm{Arc}1''.$$

Es ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$a^2-6\mu(1-\mu)b^2>0,\ \text{d. i.}\ \frac{a}{b}>\sqrt{6\mu(1-\mu)}$$

ist.

Soll das Parallelepipedon sowohl wenn die Seite a, als au wenn die Seite b horizontal ist, mit einer gewissen Stabili schwimmen können, so müssen die beiden Bedingungen

$$\frac{a}{b}>\sqrt{6\mu(1-\mu)},\quad \frac{b}{a}>\sqrt{6\mu(1-\mu)}$$

zugleich erfüllt sein, d. h. es muss

$$\sqrt{6\mu(1-\mu)}<\frac{a}{b}<\frac{1}{\sqrt{6\mu(1-\mu)}}$$

sein, welches nur dann möglich ist, wenn

$$\sqrt{6\mu(1-\mu)}<\frac{1}{\sqrt{6\mu(1-\mu)}},$$

Digitized by Google

d. i. wenn

$$6\mu(1-\mu)<1,$$

oder, was Dasselbe ist, wenn

$$\mu^2-\mu>-\frac{1}{6},\ (\mu-\frac{1}{2})^2>\frac{1}{12}$$

ist. Für $\mu=\frac{1}{2}$ ist dies offenbar nicht möglich. Jenachdem μ, welches natürlich immer kleiner als die Einheit sein muss, zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 oder zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt, ist die Bedingung

$$(\mu-\frac{1}{2})^2>\frac{1}{12}$$

erfüllt, wenn

$$\mu-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\ \text{, oder}\ \ \frac{1}{2}-\mu>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}},$$

d. i.

$$\mu>\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{3}})\ \text{ oder }\ \mu<\frac{1}{2}(1-\sqrt{\frac{1}{3}}),$$

d. i.

$$\mu>\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\ \text{ oder }\ \mu<\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}},$$

d. i.

$$\mu>\frac{1}{3-\sqrt{3}}\ \text{ oder }\ \mu<\frac{1}{3+\sqrt{3}},$$

d. i.

$$\mu>\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\ \text{ oder }\ \mu<\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})$$

ist.

Dass

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})<1,\ \ 0<\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})<\frac{1}{2}$$

ist, erhellet auf der Stelle.

Für $a=b$, d. h. im Falle eines Quadrats, ist

$$\mathfrak{S} = \frac{1-6\mu(1-\mu)}{12\mu}\, aG\omega \operatorname{Arc} 1''.$$

und es ist nur $\mathfrak{S} > 0$, wenn

$$6\mu(1-\mu) < 1$$

ist, d. h. nach dem Vorhergehenden für

$$\mu > \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}) \text{ oder } \mu < \frac{1}{6}(3-\sqrt{3}),$$

jenachdem μ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 oder zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt. Für $\mu = \frac{1}{2}$ ist

$$6\mu(1-\mu) = \frac{3}{2},$$

und folglich

$$6\mu(1-\mu) > 1.$$

§. 13.

Aufgabe. Ein über einem Quadrate als Grundfläche errichtetes rechtwinkliges, völlig gleichförmig dichtes Parallelepipedon schwimme so auf dem Wasser, dass in Taf. I. Fig. 4. die quadratförmige Grundfläche *ABCD* und zugleich auch die Diagonale *AB* sich in vertikaler Lage befinden; man soll die Stabilität dieses rechtwinkligen Parallelepipedons für auf der Grundfläche *ABCD* senkrechte horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Das specifische Gewicht der Materie des Parallelepipedons sei μ, und die Seite des Quadrats *ABCD* werde durch *a* bezeichnet.

Wenn $\mu < \frac{1}{2}$ ist, so sei *BEF* in Taf. I. Fig. 4. *a.*, wo *EF* horizontal ist, der eingetauchte Theil des Quadrats *ABCD*. Dann ist

$$ABCD : BEF = 1 : \mu.$$

und folglich, wenn wir $EF = x$, $BG = y$ setzen:

$$a^2 : \frac{1}{2}xy = 1 : \mu.$$

Digitized by Google

Offenbar ist aber $x=2y$, also

$$a^2:\frac{1}{4}x^2=1:\mu,$$

$$a^2:y^2=1:\mu;$$

folglich

$$x=2a\sqrt{\mu},\quad y=a\sqrt{\mu}.$$

Nach bekannten Sätzen ist

$$v=\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}a\sqrt{2}=a(\frac{2}{3}\sqrt{\mu}-\frac{1}{2}\sqrt{2}),$$

und weil nun

$$\varrho=x=2a\sqrt{\mu},\quad \mathfrak{V}'=\frac{1}{2}xy=\mu a^2$$

ist, so ist

$$u=\frac{2}{3}a\sqrt{\mu}+a(\frac{2}{3}\sqrt{\mu}-\frac{1}{2}\sqrt{2})=a(\frac{4}{3}\sqrt{\mu}-\frac{1}{2}\sqrt{2});$$

folglich

$$\mathfrak{S}=aG(\frac{4}{3}\sqrt{\mu}-\frac{1}{2}\sqrt{2})\omega\,\mathrm{Arcl}''=aG(\frac{4}{3}\sqrt{\mu}-\sqrt{\frac{1}{2}})\omega\mathrm{Arcl}''.$$

Wenn $\mu=\frac{1}{2}$ ist, so sei *BCD* in Taf. I. Fig. 4. *b.*, wo *CD* horizontal ist, der eingetauchte Theil des Quadrats *ABCD*. In diesem Falle ist nach dem vorhergehenden Ausdrucke der Stabilität, wenn man in demselben $\mu=\frac{1}{2}$ setzt:

$$\mathfrak{S}=aG.\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}.\ \omega\,\mathrm{Arcl}''.$$

Wenn $\mu>\frac{1}{2}$ ist, so sei *BCDEF* in Taf. I. Fig. 4. *c.*, wo *EF* horizontal ist, der eingetauchte Theil des Quadrats *ABCD*. Dann ist

$$ABCD:BCDEF=1:\mu,$$

und folglich, wenn wir $EF=x$, $AG=y$ setzen:

$$a^2:a^2-\frac{1}{2}xy=1:\mu,$$

also, weil $x=2y$ ist:

$$a^2 : a^2 - \frac{1}{4}x^2 = 1 : \mu,$$

$$a^2 : a^2 - y^2 = 1 : \mu$$

oder

$$a^2 : \frac{1}{4}x^2 = 1 : 1-\mu,$$

$$a^2 : y^2 = 1 : 1-\mu;$$

folglich

$$x = 2a\sqrt{1-\mu}, \quad y = a\sqrt{1-\mu}.$$

Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunkts des eingetauchten Theils $BCDEF$ von dem Punkte B durch z, so hat man nach der Lehre vom Schwerpunkte die Gleichung

$$\frac{1}{2}a\sqrt{2}.ABCD = z.BCDEF + (a\sqrt{2} - \frac{2}{3}y).AEF,$$

d. i.

$$\frac{1}{2}a^3\sqrt{2} = (a^2 - \frac{1}{2}xy)z + \frac{1}{2}xy(a\sqrt{2} - \frac{2}{3}y),$$

und folglich, wenn man für x und y ihre Werthe aus dem Vorhergehenden einführt:

$$\frac{1}{2}a\sqrt{2} = \mu z + (1-\mu)(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu})a,$$

woraus sich

$$z = \frac{\sqrt{2} - 2(1-\mu)(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu})}{2\mu}a$$

ergiebt. Also ist

$$v = \frac{\sqrt{2} - 2(1-\mu)(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu})}{2\mu}a - \frac{1}{2}a\sqrt{2},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$v = -\frac{1-\mu}{\mu}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu}\right)a;$$

und weil nun

$$\varrho = x = 2a\sqrt{1-\mu},\ \mathfrak{V}' = a^2 - \frac{1}{2}xy = \mu a^2$$

ist, so ist

$$u = \frac{2(1-\mu)\sqrt{1-\mu}}{3\mu}a - \frac{1-\mu}{\mu}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu}\right)a,$$

also

$$u = \frac{1-\mu}{\mu}\left(\frac{4}{3}\sqrt{1-\mu} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)a.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{S} = \frac{1-\mu}{\mu}aG\left(\frac{4}{3}\sqrt{1-\mu} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\omega\,\mathrm{Arc}1''$$

oder

$$\mathfrak{S} = \frac{1-\mu}{\mu}aG\left(\frac{4}{3}\sqrt{1-\mu} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\omega\mathrm{Arc}1''.$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ ergiebt sich auch hieraus

$$\mathfrak{S} = aG.\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}.\omega\,\mathrm{Arc}1''.$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ ist jedenfalls $\mathfrak{S} > 0$.

Für $\mu < \frac{1}{2}$ ist $\mathfrak{S} > 0$, wenn

$$\frac{4}{3}\sqrt{\mu} > \sqrt{\frac{1}{2}},\quad \text{d. i. } \mu > \frac{9}{32}$$

ist.

Für $\mu > \frac{1}{2}$ ist $\mathfrak{S} > 0$, wenn

$$\frac{4}{3}\sqrt{1-\mu} > \sqrt{\frac{1}{2}}\quad \text{d. i. } 1-\mu > \frac{9}{32}\quad \text{oder}\quad \mu < \frac{23}{32}$$

ist.

§. 14.

Aufgabe. Ein über dem Parabelsegment *ACB* in Taf. I. Fig. 5., wo *CD* die Axe der Parabel ist und *AB* auf *CD* senkrecht steht, als Grundfläche beschriebener, völlig gleichförmig dichter gerader prismatischer Körper schwimme so auf dem Wasser, dass die parabolische Grundfläche *ACB* sich in vertikaler Lage befindet und *AB* horizontal ist; man soll die Stabilität dieses prismatischen Körpers für auf der Grundfläche senkrecht stehende horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Das specifische Gewicht der Materie des in Rede stehenden prismatischen Körpers sei μ, und *CD* und *AB* mögen respective durch a und b, der Parameter der parabolischen Grundfläche soll durch p bezeichnet werden. Ist nun $A'CB'$, wo $A'B'$ horizontal ist, der eingetauchte Theil der parabolischen Grundfläche, so ist

$$ACB : A'CB' = 1 : \mu,$$

also, wenn CD' und $A'B'$ respective durch x und y bezeichnet werden, nach einem bekannten Satze von der Quadratur der Parabel

$$\frac{2}{3}ab : \frac{2}{3}xy = ab : xy = 1 : \mu.$$

Nun ist aber ferner bekanntlich

$$b = 2\sqrt{pa}, \quad y = 2\sqrt{px};$$

also

$$a\sqrt{a} : x\sqrt{x} = 1 : \mu,$$

oder

$$a^3 : x^3 = 1 : \mu^2,$$

folglich

$$x = a\sqrt[3]{\mu^2}, \quad y = 2\sqrt[3]{ap} \cdot \sqrt{\mu}.$$

Nach einem bekannten Satze von dem Schwerpunkte der Parabel ist

$$v = \frac{3}{5}(x-a) = -\frac{3}{5}a(1-\sqrt[3]{\mu^2}),$$

und weil nun

Digitized by Google

$$\varrho = y = 2\sqrt{ap}.\sqrt[3]{\mu},\quad \mathfrak{V}' = \frac{2}{3}xy = \frac{4}{3}\mu a\sqrt{ap};$$

also

$$\frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'} = \frac{8\mu ap\sqrt{ap}}{16\mu a\sqrt{ap}} = \frac{1}{2}p$$

ist, so ist

$$u = \frac{1}{2}p - \frac{3}{5}a(1-\sqrt[3]{\mu^2}),$$

folglich

$$\mathfrak{S} = \{\frac{1}{2}p - \frac{3}{5}a(1-\sqrt[3]{\mu^2})\}G\omega\,\mathrm{Arc}\,1''.$$

Soll $\mathfrak{S} > 0$ sein, so muss

$$\frac{1}{2}p - \frac{3}{5}a(1-\sqrt[3]{\mu^2}) > 0,$$

d. i., wie man leicht findet:

$$\sqrt[3]{\mu^2} > 1 - \frac{5p}{6a}$$

sein.

§. 15.

Aufgabe. Ein gerades vierseitiges Prisma von völlig gleichförmiger Dichtigkeit, dessen eine Grundfläche in Taf. I. Fig. 6. des Trapezium *ABCD* ist, in welchem letzteren die Seiten *AC*, *BD* einander gleich und gegen die parallelen Seiten *AB*, *CD* unter gleichen Winkeln geneigt sind, schwimme so auf dem Wasser, dass die Grundfläche *ABCD* sich in vertikaler Lage befindet und ihre parallelen Seiten *AB*, *CD* horizontal sind; man soll die Stabilität dieses Prismas für auf seinen Grundflächen senkrechte horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Sei $ABA'B'$, wo $A'B'$ horizontal und also den Linien AB, CD parallel ist, der eingetauchte Theil des Trapeziums $ABCD$, und werde $AB = a$, $CD = b$, $A'B' = x$ gesetzt, die Höhe des Trapeziums $ABCD$ aber durch h, die Höhe des Trapeziums $ABA'B'$ durch y bezeichnet. Ist dann μ das specifische Gewicht der Materie des Prismas, so ist aus bekannten Gründen

$$ABCD : ABA'B' = 1 : \mu,$$

also

$$\frac{1}{2}(a+b)h : \frac{1}{2}(a+x)y = (a+b)h : (a+x)y = 1 : \mu.$$

Nun ist aber, wie leicht erhellet, allgemein

$$a-b : a-x = h : y,$$

also

$$y = \frac{a-x}{a-b}h,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$a^2-b^2 : a^2-x^2 = 1 : \mu,$$

also

$$x = \sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)}, \quad y = \frac{h}{a-b}\left\{a-\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)}\right\}.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist, wie man leicht findet:

$$v = \frac{1}{3}\left(\frac{a+2x}{a+x}y - \frac{a+2b}{a+b}h\right),$$

und weil nun

$$\varrho = x, \quad \mathfrak{V}' = \frac{1}{2}(a+x)y$$

ist, so ist

$$u = \frac{1}{3}\left(\frac{a+2x}{a+x}y - \frac{a+2b}{a+b}h\right) + \frac{x^3}{6(a+x)y},$$

also, weil

$$y = \frac{a-x}{a-b}h, \quad (a+x)y = \mu(a+b)h$$

ist:

$$u = \frac{1}{3}h\left\{\frac{a+2x}{a+x}\cdot\frac{a-x}{a-b} - \frac{a+2b}{a+b}\right\} + \frac{x^3}{6\mu(a+b)h}$$

oder

$$u = \frac{h}{3(a-b)}\left\{(a+2x)\frac{a-x}{a+x} - (a+2b)\frac{a-b}{a+b}\right\} + \frac{x^3}{6\mu(a+b)h}.$$

Digitized by Google

Führt man nun in diesen Ausdruck den aus dem Obigen bekannten Werth von x ein, so erhält man:

$$u = \frac{h}{3(a-b)}\left\{(a+2\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)})\,\frac{a-\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)}}{a+\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)}} - (a+2b)\,\frac{a-b}{a+b}\right\}$$
$$+\frac{(a^2-\mu(a^2-b^2))\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)}}{6\mu(a+b)h},$$

und für die Stabilität $\mathfrak{S}$ hat man den bekannten Ausdruck:

$$\mathfrak{S} = Gu\omega \mathrm{Arc}\,1'',$$

wobei unendlich kleine Drehungen vorausgesetzt werden.

Die Möglichkeit der Aufgabe erfordert, dass

$$a^2-\mu(a^2-b^2) \gtreqless 0, \quad \text{d. i} \quad \mu(a^2-b^2) \lesseqgtr a^2$$

sei. Dies ist für $a \lesseqgtr b$ immer der Fall, für $a > b$ aber nur dann, wenn

$$\mu \lesseqgtr \frac{a^2}{a^2-b^2} \quad \text{oder} \quad \mu \lesseqgtr \frac{a}{(a-b)(a+b)}$$

ist.

Die Stabilität ist nur dann positiv, wenn u positiv ist, wofür wir der Kürze wegen die Bedingung nicht weiter entwickeln wollen.

Setzt man in dem obigen Ausdrucke von u die Seite $a=0$, so wird, wie man leicht findet,

$$u = \frac{b^2\sqrt{\mu}}{6h} - \frac{2h}{3}(1-\sqrt{\mu})$$

oder

$$u = \frac{(b^2+4h^2)\sqrt{\mu}-4h^2}{6h},$$

also

$$\mathfrak{S} = G\frac{(b^2+4h^2)\sqrt{\mu}-4h^2}{6h}\,\omega\,\mathrm{Arc}\,1'',$$

was ganz mit dem in §. 9. gefundenen Ausdrucke der Stabilität übereinstimmt.

Setzt man in dem obigen allgemeinen Ausdrucke von u die Seite $b=0$, so erhält man:

$$u=\frac{a^2(1-\mu)\sqrt{1-\mu}}{6\mu h}+\frac{1}{3}h\{(1+2\sqrt{1-\mu})\frac{1-\sqrt{1-\mu}}{1+\sqrt{1-\mu}}-1\}$$

$$=\frac{a^2(1-\mu)\sqrt{1-\mu}}{6\mu h}-\frac{2}{3}h\frac{1-\mu}{1+\sqrt{1-\mu}}$$

$$=\frac{a^2(1-\mu)\sqrt{1-\mu}}{6\mu h}-\frac{2h(1-\mu)(1-\sqrt{1-\mu})}{3\mu}$$

$$=\frac{1-\mu}{6\mu h}\{(a^2+4h^2)\sqrt{1-\mu}-4h^2\},$$

also

$$\mathfrak{S}=\frac{1-\mu}{6\mu h}G\{(a^2+4h^2)\sqrt{1-\mu}-4h^2\}\,\omega\mathrm{Arc}\,1'',$$

was ganz mit dem in §. 10. gefundenen Ausdrucke der Stabilität übereinstimmt.

§. 16.

Bei den vorhergehenden Aufgaben nahmen wir immer das Schiff als einen homogenen oder völlig gleichförmig dichten Körper an, die auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden Schnitte des Schiffs wurden als unter einander völlig gleiche und ähnliche Figuren angenommen, und es wurden nur unendlich kleine Drehungen des Schiffs betrachtet. Jetzt wollen wir nun einige Aufgaben auflösen, bei denen wir den Drehungswinkel nicht unendlich klein, sondern von einer endlichen bestimmten Grösse, und das Schiff nicht als homogen oder als einen völlig gleichförmig dichten Körper annehmen, aber voraussetzen werden, dass die auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden Schnitte desselben sämmtlich gleiche und ähnliche Figuren sind, und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit vollkommen mit einander übereinstimmen. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir uns nun zuerst mit der folgenden Aufgabe beschäftigen.

§. 17.

Aufgabe. Einer der auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden, sämmtlich einander gleichen und ähnlichen, und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit völlig miteinander übereinstimmenden Schnitte des Schiffs sei in Taf. II. Fig. 7. die dreieckige ebene Figur DCE, und das Schiff schwimme so auf dem Wasser, dass die Ebene DCE und in derselben die den Winkel DCE halbirende Linie vertikal ist; man soll die Stabilität dieses Schiffs in Bezug auf die zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen für den beliebigen Drehungswinkel ω bestimmen.

Auflösung. Wenn wir annehmen, dass ACB der eingetauchte Theil des Schnitts DCE bei der ersten Lage des Schiffs, und also AB die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts DCE mit der Oberfläche des Wassers ist, auf welchem das Schiff schwimmt, so kommt es zunächst auf die Bestimmung des aufgetauchten und des untergetauchten Theils an. Nehmen wir nun ferner an, dass $A'CB'$ der eingetauchte Theil des Schnitts DCE bei der zweiten Lage des Schiffs ist, und dass AOA' und BOB' respective der aufgetauchte und der untergetauchte Theil des Schnitts DCE sind, so müssen wir, weil der aufgetauchte und der untergetauchte Theil bekanntlich immer einander gleich sind, die Gleichheit dieser beiden Theile aber unter den gemachten Voraussetzungen augenscheinlich durch die Gleichheit der beiden Dreiecke AOA', BOB' bedingt wird, offenbar die Lage der Linie $A'B'$ so bestimmen, dass dieselbe in ihrem Durchschnittspunkte O mit der als gegeben zu betrachtenden Linie AB gegen diese letztere Linie unter dem gegebenen Winkel $AOA' = BOB' = \omega$ geneigt ist, und die beiden Dreiecke AOA', BOB' einander gleich sind. Auf diese Weise wollen wir nun die Linie $A'B'$ zu bestimmen suchen.

Zu dem Ende werde der als gegeben zu betrachtende Winkel DCE durch Θ bezeichnet; dann ist jeder der Winkel CAB, CBA, die offenbar einander gleich sind, weil unter den gemachten Voraussetzungen das Dreieck ACB jedenfalls ein gleichschenkliges Dreieck und AB seine Grundlinie ist, $= 90^0 - \frac{1}{2}\Theta$. Wegen der Gleichheit der beiden Dreiecke AOA', BOB' ist aber

$$AO.A'O = BO.B'O,$$

und nach einem bekannten trigonometrischen Satze ist

$$AO : A'O = \sin(180^0 - \omega - 90^0 + \tfrac{1}{2}\Theta) : \sin(90^0 - \tfrac{1}{2}\Theta),$$

$$BO : B'O = \sin(180^0 - \omega - 90^0 - \tfrac{1}{2}\Theta) : \sin(90^0 + \tfrac{1}{2}\Theta);$$

Digitized by Google

d. i.

$$AO_1 : A'O = \cos(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta) : \cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

$$BO : B'O = \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta) : \cos\tfrac{1}{2}\Theta.$$

Setzen wir nun ferner die als bekannt zu betrachtende Linie $AB = \varrho$, so haben wir zwischen den vier unbekannten Grössen AO, BO, $A'O$, $B'O$ die vier folgenden Gleichungen:

$$AO + BO = \varrho,$$
$$AO \,.\, A'O = BO \,.\, B'O,$$
$$AO \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\Theta = A'O \,.\, \cos(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta),$$
$$BO \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\Theta = B'O \,.\, \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta);$$

und es wird nun darauf ankommen, aus diesen vier Gleichungen die vier in Rede stehenden unbekannten Grössen zu bestimmen.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$AO = A'O \,.\, \frac{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\Theta}, \quad BO = B'O \,.\, \frac{\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\Theta};$$

also ist wegen der beiden ersten Gleichungen:

$$A'O \,.\, \cos(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta) + B'O \,.\, \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta) = \varrho \cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

$$A'O^2 \,.\, \cos(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta) - B'O^2 \,.\, \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta) = 0.$$

Man setze

$$A'O \,.\, \cos(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta) - B'O \,.\, \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta) = \tau,$$

so ist

$$A'O^2 \,.\, \cos(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta)^2 - B'O^2 \,.\, \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta)^2 = \varrho\tau \cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

und wenn man nun die beiden Gleichungen

$$A'O^2 \,.\, \cos(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta)^2 - B'O^2 \,.\, \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta)^2 = \varrho\tau \cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

Digitized by Google

$$A'O^2.\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)-B'O^2.\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)=0$$

mit einander verbindet, so erhält man:

$$A'O^2.\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\{\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)-\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)\}=\varrho\tau\cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

$$B'O^2.\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)\{\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)-\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)\}=\varrho\tau\cos\tfrac{1}{2}\Theta;$$

d. i., wie man leicht findet:

$$A'O^2=\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}\tau,$$

$$B'O^2=\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\tau.$$

Nehmen wir nun an, dass ω nicht 90^0 und, wie sich schon von selbst versteht, Θ nicht 180^0 übersteigt, so kann offenbar der absolute Werth von $\omega-\frac{1}{2}\Theta$ nie 90^0 übersteigen, und $\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)$ ist also unter den gemachten Voraussetzungen immer positiv. Weil nun auch ϱ, $\sin\omega$, $\cot\frac{1}{2}\Theta$ positiv sind, so ist

$$\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}$$

positiv, und wegen der Gleichung

$$A'O^2=\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}\tau$$

muss folglich nothwendig τ eine positive Grösse sein. Also muss offenbar wegen der Gleichung

$$B'O^2=\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\tau$$

nothwendig $\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)$ positiv sein, wenn überhaupt die Aufgabe möglich sein soll, d. h. $\omega+\frac{1}{2}\Theta$, welches unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls 180^0 nicht übersteigt, darf 90^0 nicht übersteigen, wenn die Aufgabe überhaupt möglich sein soll.

Weil nun nach dem Bisherigen

$$\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}, \quad \frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}$$

und τ, sowie ihrer Natur nach auch $A'O$ und $B'O$ positiv sind, so erhalten wir aus dem Obigen die beiden folgenden Gleichungen:

$$A'O=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}}.\sqrt{\tau},$$

$$B'O=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}.\sqrt{\tau};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$M=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}},$$

$$N=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

setzen:

$$A'O=M\sqrt{\tau},\ B'O=N\sqrt{\tau}.$$

Führt man diese Ausdrücke in die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$A'O.\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)+B'O.\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)=\varrho\cos\tfrac{1}{2}\Theta$$

ein, so erhält man

Digitized by Google

$$\{M\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)+N\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)\}\sqrt{\tau}=\varrho\cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

also

$$\sqrt{\tau}=\frac{\varrho\cos\frac{1}{2}\Theta}{M\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)+N\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)},$$

oder, wenn man

$$M'=M\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)=\sqrt{\frac{\varrho\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}},$$

$$N'=N\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)=\sqrt{\frac{\varrho\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}}$$

setzt:

$$\sqrt{\tau}=\frac{\varrho\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$A'O=\frac{\varrho M\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'},\quad B'O=\frac{\varrho N\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'};$$

also

$$A'B'=\varrho\,\frac{M+N}{M'+N'}\cos\tfrac{1}{2}\Theta.$$

In Bezug auf O als Anfang und OA' als den positiven Theil der Axe der Abscissen sind die Abscissen der Schwerpunkte der Dreiecke AOA' und BOB' nach der Lehre vom Schwerpunkte des Dreiecks respective:

$$\tfrac{1}{3}(AO.\cos\omega+A'O)\text{ und }-\tfrac{1}{3}(BO.\cos\omega+B'O);$$

folglich ist

$$v=\tfrac{1}{3}(AO.\cos\omega+A'O)+\tfrac{1}{3}(BO.\cos\omega+B'O),$$

d. i.

$$v=\tfrac{1}{3}\{(AO+BO)\cos\omega+(A'O+B'O)\}$$

oder

$$v=\tfrac{1}{3}(AB.\cos\omega+A'B'),$$

also nach dem Obigen

$$v=\frac{1}{3}\varrho\,(\cos\omega+\frac{M+N}{M'+N'}\cos\frac{1}{2}\Theta).$$

Weil nach dem Obigen

$$AO=A'O.\frac{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\Theta},\quad BO=B'O.\frac{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\Theta}$$

und

$$A'O=\frac{\varrho M\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'},\quad B'O=\frac{\varrho N\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'}$$

ist, so ist

$$AO=\frac{\varrho M\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}{M'+N'},\quad BO=\frac{\varrho N\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}{M'+N'};$$

und weil nun

$$V'=\frac{1}{2}AO.A'O.\sin\omega$$

ist, so ist

$$V'=\frac{\varrho^2M^2\cos\frac{1}{2}\Theta\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}{2(M'+N')^2}\sin\omega.$$

Endlich ist, als der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie ϱ, und dessen Winkel an der Spitze Θ ist, offenbar

$$\mathfrak{v}'=\frac{1}{2}\varrho.\frac{1}{2}\varrho\,\mathrm{tang}\,(90^0-\frac{1}{2}\Theta)=\frac{1}{4}\varrho^2\cot\frac{1}{2}\Theta.$$

Es ist nun

$$M+N=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}}+\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$=\left\{\sqrt{\sec(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)}+\sqrt{\sec(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)}\right\}\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}},$$

$$M'+N'=\sqrt{\frac{\varrho\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}}+\sqrt{\frac{\varrho\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}}$$

$$= \left\{\sqrt{\cos(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta)} + \sqrt{\cos(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta)}\right\} \sqrt{\frac{\varrho \cot \tfrac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}};$$

also

$$\frac{M+N}{M'+N'} = \frac{\sqrt{\sec(\omega - \frac{1}{2}\Theta)} + \sqrt{\sec(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}}{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)} + \sqrt{\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$= \frac{\left\{\sqrt{\sec(\omega - \frac{1}{2}\Theta)} + \sqrt{\sec(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}\right\}\left\{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)} - \sqrt{\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}\right\}}{\left\{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)} + \sqrt{\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}\right\}\left\{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)} - \sqrt{\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}\right\}}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist

$$\sqrt{\frac{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}} - \sqrt{\frac{\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)}}$$

Digitized by Google

$$= \frac{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta) - \cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$= \frac{2\sin\omega \sin\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}},$$

und der Nenner ist

$$\cos(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta) - \cos(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta) = 2\sin\omega \sin\tfrac{1}{2}\Theta;$$

also ist

$$\frac{M+N}{M'+N'} = \frac{1}{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$= \sqrt{\sec(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta)\sec(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta)};$$

folglich nach dem Obigen:

$$v = \frac{1}{3}\varrho\left\{\cos\omega + \cos\tfrac{1}{2}\Theta\sqrt{\sec(\omega - \tfrac{1}{2}\Theta)\sec(\omega + \tfrac{1}{2}\Theta)}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\varrho \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta + \cos\omega\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}}{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}}.$$

Ferner ist

$$M = \frac{1}{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)}}\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{M}{M'+N'} = \frac{1}{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)}\left\{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)} + \sqrt{\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}\right\}},$$

also

$$\frac{M^2\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)}{(M'+N')^2} = \frac{1}{\left\{\sqrt{\cos(\omega - \frac{1}{2}\Theta)} + \sqrt{\cos(\omega + \frac{1}{2}\Theta)}\right\}^2}$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{2\{\cos\omega\cos\frac{1}{2}\Theta + \sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\}},$$

daher nach dem Obigen

$$V' = \frac{\rho^2\cos\frac{1}{2}\Theta\sin\omega}{4\{\cos\omega\cos\frac{1}{2}\Theta + \sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\}}.$$

Also ist

$$= a'A \quad \frac{\rho^2\cos\frac{1}{2}\Theta\sin\omega}{12\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta + \cos\omega\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}{\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\omega + \sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta + \cos\omega\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}{\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\omega + \sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

mit

$$\cos\frac{1}{2}\Theta - \cos\omega\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\Theta)},$$

so wird der Zähler.

$$\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 - \cos\omega^2\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)$$

$$= \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 - \cos\omega^2(\cos\omega^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 - \sin\omega^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2)$$

$$= (1-\cos\omega^4)\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \sin\omega^2\cos\omega^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2$$

$$= \sin\omega^2(\cos\omega^2 + \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2),$$

und der Nenner wird:

$$\cos\omega\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \cos\tfrac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)}$$

$$-\cos\omega^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)} - \cos\omega\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)$$

$$= \cos\omega\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 - \cos\omega^3\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 + \sin\omega^2\cos\omega\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2$$

$$+\sin\omega^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)}$$

$$= \sin\omega^2\left\{\cos\omega + \cos\tfrac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)}\right\}.$$

Also ist nach dem Obigen

Digitized by Google

$$V'_{\omega} = \frac{\rho^3 \cos\frac{1}{2}\Theta \sin\omega}{12\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}} \cdot \frac{\cos\omega^2+\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{\cos\omega+\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$= \frac{\rho^3 \cos\frac{1}{2}\Theta \sin\omega}{12} \cdot \frac{\cos\omega^2+\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{\cos\frac{1}{2}\Theta\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)+\cos\omega\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

Multiplicirt man aber Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{1}{\cos\omega+\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

mit

$$\cos\omega - \cos\tfrac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)},$$

so wird der Nenner

$$\cos\omega^2 - \cos\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)$$

$$=\cos\omega^2-\cos\omega^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^4+\sin\omega^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2$$

$$=\cos\omega^2(1-\cos\tfrac{1}{2}\Theta^4)+\sin\omega^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2(\cos\omega^2+\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2),$$

also offenbar

$$V'v=$$

$$\frac{\rho^3\cos\frac{1}{2}\Theta\sin\omega}{12}\cdot\frac{\cos\omega-\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}{\sin\frac{1}{2}\Theta^2\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$=\frac{\rho^3\sin\omega}{12\tan\frac{1}{2}\Theta^2}\left\{\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}-1\right\};$$

aber es ist auch

$$\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)$$

$$=\cos\omega^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-\sin\omega^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2$$

$$=\cos\omega^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2(1-\tan\omega^2\tan\tfrac{1}{2}\Theta^2),$$

also

$$V'v=\frac{\rho^3\sin\omega}{12\tan\frac{1}{2}\Theta^2}\left\{\frac{\sec\frac{1}{2}\Theta^2}{\sqrt{1-\tan\omega^2\tan\frac{1}{2}\Theta^2}}-1\right\}.$$

Daher ist

Digitized by Google

$$\frac{V'}{\mathfrak{V}'}v=\frac{1}{3}\varrho\sin\omega\cot\frac{1}{2}\Theta\left\{\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\varrho\sin\omega\cot\frac{1}{2}\Theta\left\{\frac{\sec\frac{1}{2}\Theta^2}{\sqrt{1-\tang\omega^2\tang\frac{1}{2}\Theta^2}}-1\right\}.$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\mathfrak{S}=G\left\{\frac{V'}{\mathfrak{V}'}v+v\sin\omega\right\}$$

ist:

$$\mathfrak{S}=G\left\{v+\frac{1}{3}\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}-1\right)\right\}\sin\alpha$$

$$=G\left\{v+\frac{1}{3}\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{\sec\frac{1}{2}\Theta^2}{\sqrt{1-\tang\omega^2\tang\frac{1}{2}\Theta^2}}-1\right)\right\}\sin\omega.$$

Weil nach dem Obigen

$$\cot\frac{1}{2}\Theta=\frac{4\mathfrak{V}'}{\varrho^2},\quad \tang\frac{1}{2}\Theta=\frac{\varrho^2}{4\mathfrak{V}'}$$

ist, so ist

$$\sec\frac{1}{2}\Theta^2=1+\frac{\varrho^4}{16\mathfrak{V}'^2}=\frac{16\mathfrak{V}'^2+\varrho^4}{16\mathfrak{V}'^2}$$

und

$$1-\tang\omega^2\tang\frac{1}{2}\Theta^2$$

$$=1-\frac{\varrho^4}{16\mathfrak{V}'^2}\tang\omega^2=\frac{16\mathfrak{V}'^2-\varrho^4\tang\omega^2}{16\mathfrak{V}'^2};$$

also

$$\frac{\sec\frac{1}{2}\Theta^2}{\sqrt{1-\tang\omega^2\tang\frac{1}{2}\Theta^2}}=\frac{16\mathfrak{V}'^2+\varrho^4}{4\mathfrak{V}'\sqrt{16\mathfrak{V}'^2-\varrho^4\tang\omega^2}}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{S}=G\left\{v+\frac{4\mathfrak{V}'}{2\varrho}\left(\frac{16\mathfrak{V}'^2+\varrho^4}{4\mathfrak{V}'\sqrt{16\mathfrak{V}'^2-\varrho^4\,\mathrm{tang}\,\omega^2}}-1\right)\right\}\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S}=G\left\{v+\frac{1}{3\varrho}\left(\frac{16\mathfrak{V}'^2+\varrho^4}{\sqrt{16\mathfrak{V}'^2-\varrho^4\,\mathrm{tang}\,\omega^2}}-4\mathfrak{V}'\right)\right\}\sin\omega.$$

Wenn der Winkel ω unendlich klein ist, und tang ω^2 als eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung als verschwindend betrachtet wird, so ist, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{S}=G\left(v+\frac{\varrho^2}{12\mathfrak{V}'}\right)\sin\omega,$$

was ganz mit §. 8. übereinstimmt.

Wie die Grösse v, deren Bedeutung aus dem Obigen bekannt ist, in jedem einzelnen Falle mittelst der bekannten Sätze vom Schwerpunkte bestimmt werden muss, bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

§. 18.

Der folgenden Aufgabe wollen wir einige allgemeine Betrachtungen über die Parabel vorausschicken.

In Taf. II. Fig. 8. sei MSN eine Parabel, deren Scheitel S und deren Axe SH ist. Die beiden beliebigen Punkte A und A' dieser Parabel seien durch die Sehne AA' mit einander verbunden, und von A und A' seien auf die Axe SH die Perpendikel AB und $A'B'$ gefällt. Man setze

$$SB=x,\ AB=y;\ SB'=x',\ A'B'=y';$$

die Linie $SC=z$, und das parabolische Flächenstück $ASA'=F$.

Bezeichnet man wie gewöhnlich den Parameter der Parabel durch p, so ist

$$y^2=px,\ y'^2=px'.$$

Ferner ist

$$BC:B'C=y:y',\ BC+B'C=BB'=x'-x;$$

also

$$BC+\frac{y'}{y}BC=\frac{y'+y}{y}BC=x'-x,\ BC=\frac{x'-x}{y'+y}y;$$

$$B'C+\frac{y}{y'}B'C=\frac{y'+y}{y'}B'C=x'-x,\ B'C=\frac{x'-x}{y'+y}y'.$$

Digitized by Google

Folglich ist wie leicht erhellen wird, nach bekannten Sätzen von der Parabel und vom Dreieck:

$$F=\frac{2}{3}xy+\frac{2}{3}x'y'+\frac{1}{2}\cdot\frac{x'-x}{y'+y}y^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{x'-x}{y'+y}y'^2$$

$$=\frac{2}{3}xy+\frac{2}{3}x'y'-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x'-x)(y'^2-y^2)}{y'+y}$$

$$=\frac{2}{3}xy+\frac{2}{3}x'y'-\frac{1}{2}(x'-x)(y'-y)$$

$$=\frac{1}{6}(xy+x'y')+\frac{1}{2}(xy'+x'y)$$

$$=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}y+y'\right)+\frac{1}{2}x'\left(\frac{1}{3}y'+y\right)$$

$$=\frac{1}{2}y\left(\frac{1}{3}x+x'\right)+\frac{1}{2}y'\left(\frac{1}{3}x'+x\right),$$

also

$$2pF=px\left(\frac{1}{3}y+y'\right)+px'\left(\frac{1}{3}y'+y\right)$$

$$=y^2\left(\frac{1}{3}y+y'\right)+y'^2\left(\frac{1}{3}y'+y\right)$$

$$=\frac{1}{3}(y^3+y'^3)+yy'(y+y')$$

$$=\frac{1}{3}(y+y')(y^2-yy'+y'^2+3yy')$$

$$=\frac{1}{3}(y+y')(y^2+2yy'+y'^2)=3(y+y')^3$$

oder

$$6pF=(y+y')^3,\ y+y'=\sqrt[3]{6pF}.$$

Bezeichnet man jetzt den Winkel ACB oder $A'CB'$ durch Θ, so ist

$$y=BC.\tang\Theta=\frac{x'-x}{y'+y}y\tang\Theta,$$

$$y'=B'C'.\tang\Theta=\frac{x'-x}{y'+y}y'\tang\Theta;$$

Digitized by Google

also

$$\text{tang}\,\Theta=\frac{y'+y}{x'-x},\ \cot\Theta=\frac{x'-x}{y'+y};$$

folglich

$$\cot\Theta=\frac{1}{p}\cdot\frac{y'^2-y^2}{y'+y}=\frac{1}{p}(y'-y);$$

und wir haben daher jetzt die beiden Gleichungen:

$$y'+y=\sqrt[3]{6pF},\ y'-y=p\cot\Theta;$$

aus denen

$$y=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta),\ y'=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)$$

und folglich

$$x=\frac{(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta)^2}{4p},\ x'=\frac{(\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)^2}{4p}$$

sich ergiebt.

Also ist auch

$$BB'=x'-x=\frac{y'^2-y^2}{p}=\frac{(y'-y)(y'+y)}{p}=\cot\Theta\sqrt[3]{6pF}$$

und

$$BC=y\cot\Theta=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta)\cot\Theta,$$

$$B'C=y'\cot\Theta=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)\cot\Theta;$$

so wie

$$AC=y\,\text{cosec}\,\Theta=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta)\,\text{cosec}\,\Theta,$$

$$A'C=y'\text{cosec}\,\Theta=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)\,\text{cosec}\,\Theta.$$

Endlich ist

$$z=SB+BC=x+\frac{x'-x}{y'+y}y=\frac{xy'+x'y}{y'+y}$$

Digitized by Google

$$=\frac{pxy'+px'y}{p(y'+y)}=\frac{y^2y'+y'^2y}{p(y'+y)}=\frac{yy'}{p},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$z=\frac{(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta((\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)}{4p},$$

also, wie man leicht findet:

$$z=\frac{\sqrt[3]{36F^2}-p\sqrt[3]{p.\cot\Theta^2}}{4\sqrt[3]{p}}.$$

Auf diese Weise sind jetzt die Linien x, y, x', y', z, AC, $A'C$, BC, $B'C$, BB' bloss durch die Grössen p, F, Θ ausgedrückt.

Wir wollen nun die Coordinaten des Schwerpunkts des parabolischen Flächenstücks ASA' bestimmen, indem wir diese Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnen, und $\mathfrak{y}$ als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem der Schwerpunkt des parabolischen Flächenstücks ASA' auf der linken oder auf der rechten Seite der Axe der Parabel liegt. Zu dem Ende haben wir nach der Lehre vom Schwerpunkte die folgenden Gleichungen:

$$F\mathfrak{x}=\frac{3}{5}x.\frac{2}{3}xy+\frac{3}{5}x'.\frac{2}{3}x'y'$$

$$+\frac{1}{3}(2x+z).\frac{1}{2}(z-x)y-\frac{1}{3}(2x'+z).\frac{1}{2}(x'-z)y',$$

$$F\mathfrak{y}=\frac{3}{8}y.\frac{2}{3}xy-\frac{3}{8}y'.\frac{2}{3}x'y'$$

$$+\frac{1}{3}y.\frac{1}{2}(z-x)y+\frac{1}{3}y'.\frac{1}{2}(x'-z)y'.$$

Nach dem Vorhergehenden ist:

$$2x+z=2x+\frac{yy'}{p}=\frac{2px+yy'}{p}=\frac{y(2y+y')}{p},$$

$$2x'+z=2x'+\frac{yy'}{p}=\frac{2px'+yy'}{p}=\frac{y'(2y'+y)}{p}$$

und

$$z-x=\frac{yy'}{p}-x=\frac{yy'-px}{p}=\frac{y(y'-y)}{p},$$

$$x'-z=x'-\frac{yy'}{p}=\frac{px'-yy'}{p}=\frac{y'(y'-y)}{p};$$

und weil nun

$$x^2 = \frac{y^4}{p^2}, \quad x'^2 = \frac{y'^4}{p^2}$$

ist, so ist nach dem Obigen:

$$Fx = \frac{2y^5}{5p^2} + \frac{2y'^5}{5p^2} + \frac{y^3(y'-y)(2y+y')}{6p^2} - \frac{y'^3(y'-y)(2y'+y)}{6p^2},$$

$$Fy = \frac{y^4}{4p} - \frac{y'^4}{4p} + \frac{y^3(y'-y)}{6p} + \frac{y'^3(y'-y)}{6p};$$

oder

$$Fx = \frac{2(y^5+y'^5)}{5p^2} + \frac{(y'-y)\{2(y^4-y'^4)+yy'(y^2-y'^2)\}}{6p^2},$$

$$Fy = \frac{y^4-y'^4}{4p} + \frac{(y'-y)(y^3+y'^3)}{6p};$$

oder

$$Fx = \frac{2(y^5+y'^5)}{5p^2} - \frac{(y-y')(y^2-y'^2)\{2(y^2+y^2)+yy'\}}{6p^2},$$

$$Fy = \frac{y^4-y'^4}{4p} - \frac{(y-y')(y^3+y'^3)}{6p};$$

oder

$$Fx = \frac{2(y^5+y'^5)}{5p^2} - \frac{(y+y')(y-y')^2\{2(y^2+y'^2)+yy'\}}{6p^2},$$

$$Fy = \frac{y^4-y'^4}{4p} - \frac{(y-y')(y^3+y'^3)}{6p}.$$

Nun ist aber

$$y^5+y'^5 = (y+y')(y^4-y^3y'+y^2y'^2-yy'^3+y'^4)$$

und

$$(y-y')^2\{2(y^2+y'^2)+yy'\}$$
$$= 2y^4-3y^3y'+2y^2y'^2-3yy'^3+2y'^4;$$

also ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$Fx = \frac{(y+y')(2y^4+3y^3y'+2y^2y'^2+3yy'^3+2y'^4)}{30p^2},$$

oder, weil

$$2y^4+3y^3y'+2y^2y'^2+3yy'^3+2y'^4$$
$$=(y+y')^2\{2(y^2+y'^2)-yy'\}$$

ist:

$$Fx=\frac{(y+y')^3\{2(y^2+y'^2)-yy'\}}{30p^2}$$
$$=\frac{(y+y')^3}{6p}\cdot\frac{2(y^2+y'^2)-yy'}{5p},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$F=\frac{(y+y')^3}{6p}$$

ist:

$$x=\frac{2(y^2+y'^2)-yy'}{5p}.$$

Ferner ist

$$y^4-y'^4=(y^2-y'^2)(y^2+y'^2),$$
$$y^3+y'^3=(y+y')(y^2-yy'+y'^2);$$

also nach dem Obigen:

$$Fy=\frac{(y^2-y'^2)(y^2+y'^2)}{4p}-\frac{(y^2-y'^2)(y^2-yy'+y'^2)}{6p}$$
$$=\frac{(y^2-y'^2)(y^2+2yy'+y'^2)}{12p}=\frac{(y+y')^3}{6p}\cdot\frac{y-y'}{2},$$

d. i.

$$y=\frac{y-y'}{2}.$$

Zur Bestimmung der beiden Coordinaten x, y des Schwerpunkts des parabolischen Flächenstücks ASA' haben wir daher die Formeln:

$$x=\frac{2(y^2+y'^2)-yy'}{5p},\quad y=\frac{y-y'}{2}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$4(y^2+y'^2)=2\sqrt[3]{36p^2F^2}+2p^2\cot\Theta^2,$$
$$4yy'=\sqrt[3]{36p^2F^2}-p^2\cot\Theta^2;$$

also

$$8(y^2+y'^2)-4yy'=3\sqrt[3]{36p^2F^2}+5p^2\cot\Theta^2$$

oder

$$2(y^2+y'^2)-yy'=\frac{3\sqrt[3]{36p^2F^2}+5p^2\cot\Theta^2}{4}.$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$y-y'=-p\cot\Theta;$$

also

$$x=\frac{3\sqrt[3]{36p^2F^2}+5p^2\cot\Theta^2}{20p},\quad y=-\frac{1}{2}p\cot\Theta$$

oder

$$x=\frac{3\sqrt[3]{36F^2}+5p\sqrt[3]{p}.\cot\Theta^2}{20\sqrt[3]{p}},\quad y=-\frac{1}{2}p\cot\Theta.$$

Nach dem Obigen ist auch

$$p\sqrt[3]{p}.\cot\Theta^2=\sqrt[3]{36F^2}-4z\sqrt[3]{p},$$

also

$$x=\frac{8\sqrt[3]{36F^2}-20z\sqrt[3]{p}}{20\sqrt[3]{p}}=\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{36F^2}{p}}-z.$$

Endlich ist auch

$$\sqrt[3]{36F^2}=p\sqrt[3]{p}.\cot\Theta^2+4z\sqrt[3]{p},$$

folglich

$$x=\frac{8p\sqrt[3]{p}.\cot\Theta^2+12z\sqrt[3]{p}}{20\sqrt[3]{p}}=\frac{2}{5}p\cot\Theta^2+\frac{3}{5}z.$$

Also hat man zur Bestimmung von x, y auch die folgende Ausdrücke:

$$x=\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{36F^2}{p}}-z,\quad y=-\frac{1}{2}p\cot\Theta;$$

Digitized by Google

oder

$$x=\frac{2}{5}p\cot\Theta^2+\frac{3}{5}z,\ y=-\frac{1}{2}p\cot\Theta;$$

oder auch

$$x=\frac{3}{5}z-\frac{4}{5}y\cot\Theta,\ y=-\frac{1}{2}p\cot\Theta.$$

§. 19.

Aufgabe. Einer der auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden, sämmtlich unter einander gleichen und ähnlichen, und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit völlig mit einander übereinstimmenden Schnitte des Schiffs sei in Taf. II. Fig. 9. die parabolische ebene Figur *MSN* mit dem Parameter p, deren Axe *SH* ist, und das Schiff schwimme so auf dem Wasser, dass die Ebene *MSN* und die Axe *SH* vertikal sind; man soll die Stabilität des Schiffs in Bezug auf die zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen für den beliebigen Drehungswinkel ω bestimmen.

Auflösung. Der eingetauchte Theil des Schnitts *MSN* bei der ersten Lage des Schiffs sei *ASB*, so dass also $AB=\varrho$ die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts *MSN* mit der Oberfläche des Wassers ist, auf welchem das Schiff schwimmt. Ist nun grösserer Deutlichkeit wegen *A'SB'* in Taf. II. Fig. 10. der eingetauchte Theil des Schnitts *MSN* bei der zweiten Lage des Schiffs, also *A'B'* die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts *MSN* mit der Oberfläche des Wassers, so erhellet leicht, dass im vorhergehenden Paragraphen $\Theta=90^0-\omega$ zu setzen ist, so wie auch auf der Stelle erhellet, dass man in demselben Paragraphen $F=\mathfrak{V}'$ zu setzen hat.

Nimmt man nun, was jedenfalls verstattet ist, S als Anfang der Coordinaten an, so erhellet leicht aus der Lehre vom Schwerpunkte der Parabel, dass

$$(\overset{w}{\mathfrak{X}}')=0,\ (\overset{w}{\mathfrak{Y}}')=\frac{3}{5}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\varrho\right)^2}{p}=\frac{3\varrho^2}{20p}$$

ist. Ferner ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$(\overset{w}{x_1})=-\frac{1}{2}p\cot(90^0-\omega)=-\frac{1}{2}p\tang\omega,$$

$$(\overset{w}{y_1})=\frac{3\sqrt[3]{36p^2\mathfrak{V}'^2}+5p^2\cot(90^0-\omega)^2}{20p}$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{36p^2\mathfrak{v}'^2 + 5p^2 \operatorname{tang}\omega^2}}{20p};$$

oder, weil

$$\mathfrak{v}' = \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\varrho\right)^2}{p} \cdot \frac{1}{2}\varrho = \frac{\varrho^3}{6p}, \quad \mathfrak{v}'^2 = \frac{\varrho^6}{36p^2}$$

ist:

$$\overset{w}{(\mathfrak{x}_1)} = -\frac{1}{2}p \operatorname{tang}\omega, \overset{w}{(\mathfrak{y}_1)} = \frac{3\varrho^2 + 5p^2 \operatorname{tang}\omega^2}{20p}.$$

Also ist, wie man leicht findet:

$$\overset{w}{(\mathfrak{X}')} - \overset{w}{(\mathfrak{x}_1)} = \frac{1}{2}p \operatorname{tang}\omega, \overset{w}{(\mathfrak{Y}')} - \overset{w}{(\mathfrak{y}_1)} = -\frac{1}{4}p \operatorname{tang}\omega^2;$$

folglich

$$[\overset{w}{(\mathfrak{X}')} - \overset{w}{(\mathfrak{x}_1)}] \cos\omega - [\overset{w}{(\mathfrak{Y}')} - \overset{w}{(\mathfrak{y}_1)}] \sin\omega$$

$$= \frac{1}{4}p(2 + \operatorname{tang}\omega^2)\sin\omega = \frac{1}{4}p(1 + \sec\omega^2)\sin\omega.$$

Weil nun nach §. 8. bekanntlich

$$\mathfrak{S} = G\{v\sin\omega + [\overset{w}{(\mathfrak{X}')} - \overset{w}{(\mathfrak{x}_1)}]\cos\omega - [\overset{w}{(\mathfrak{Y}')} - \overset{w}{(\mathfrak{y}_1)}]\sin\omega\}$$

ist, so ist

$$\mathfrak{S} = G\{v + \frac{1}{4}p(1 + \sec\omega^2)\}\sin\omega,$$

oder auch, weil

$$(1 + \sec\omega^2)\sin\omega$$

$$= \frac{\sin\omega}{\cos\omega}(\cos\omega + \cos\omega\sec\omega^2) = \operatorname{tang}\omega(\cos\omega + \sec\omega)$$

ist:

$$\mathfrak{S} = G\{v\sin\omega + \frac{1}{4}p\operatorname{tang}\omega(\cos\omega + \sec\omega)\}.$$

Da nach dem Obigen

$$p = \frac{\varrho^3}{6\mathfrak{v}'}$$

Digitized by Google

ist, so ist auch

$$\mathfrak{S} = G\{v \sin\omega + \frac{\varrho^3}{24\mathfrak{V}'} \operatorname{tang}\omega (\cos\omega + \sec\omega)\}$$

oder

$$\mathfrak{S} = \frac{G}{\mathfrak{V}'}\{v\mathfrak{V}' \sin\omega + \frac{1}{24}\varrho^3 \operatorname{tang}\omega (\cos\omega + \sec\omega)\}.$$

Wie v in jedem einzelnen Falle zu bestimmen ist, wird keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

§. 20

Aufgabe. Einer der auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden, sämmtlich einander gleichen und ähnlichen, und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit völlig mit einander übereinstimmenden Schnitte des Schiffs sei in Taf. II. Fig. 11. die kreisförmige ebene Figur MSN, und das Schiff schwimme so auf dem Wasser, dass die Ebene MSN und der Durchmesser SH des Kreises, von welchem der Schnitt MSN ein Theil ist, sich in vertikaler Lage befinden; man soll die Stabilität des Schiffs in Bezug auf die zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen und den beliebigen Drehungswinkel ω bestimmen.

Auflösung. Der eingetauchte Theil des Schnitts MSN bei der ersten Lage des Schiffs sei ASB, so dass also $AB = \varrho$ die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts MSN mit der Oberfläche des Wassers ist, auf welchem das Schiff schwimmt. Ist nun grösserer Deutlichkeit wegen $A'SB'$ in Taf. II. Fig. 12. der eingetauchte Theil des Schnitts MSN bei der zweiten Lage des Schiffs, also $A'B'$ die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts mit der Oberfläche des Wassers bei der zweiten Lage des Schiffs, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar, wenn wir, was jedenfalls verstattet ist, den Mittelpunkt des Kreises, von welchem der Schnitt MSN ein Theil ist, als Anfang der Coordinaten annehmen:

$$(\overset{w}{\mathfrak{X}}') = 0, \quad (\overset{w}{\mathfrak{Y}}') = -\frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}$$

und

$$\overset{w}{x}_1 = 0, \quad \overset{w}{y}_1 = -\frac{\varrho^2}{12\mathfrak{V}'}.$$

Weil nun aber bekanntlich nach §. 6. allgemein

$$(\overset{w}{x}_1) = \overset{w}{x}_1 \cos\omega + \overset{w}{y}_1 \sin\omega,$$
$$(\overset{w}{y}_1) = -\overset{w}{x}_1 \sin\omega + \overset{w}{y}_1 \cos\omega$$

ist, so ist

$$(\overset{w}{x}_1) = -\frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\sin\omega, \quad (\overset{w}{y}_1) = -\frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\cos\omega;$$

folglich

$$[(\overset{w}{\mathfrak{X}}') - (\overset{w}{x}_1)]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}}') - (\overset{w}{y}_1)]\sin\omega$$
$$= \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\sin\omega\cos\omega + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}(1-\cos\omega)\sin\omega$$
$$= \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\sin\omega.$$

Nach §. 8. ist aber

$$\mathfrak{S} = G\{v\sin\omega + [(\overset{w}{\mathfrak{X}}') - (\overset{w}{x}_1)]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}}') - (\overset{w}{y}_1)]\sin\omega\},$$

also

$$\mathfrak{S} = G\left(v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\right)\sin\omega$$

Diese Formel, welche mit der aus dem Obigen bekannten allgemeinen Näherungsformel für unendlich kleine Drehungswinkel völlig identisch ist, gilt also im vorliegenden Falle unter den gemachten Voraussetzungen in völliger Strenge für jeden endlichen bestimmten Drehungswinkel.

Wenn r der Halbmesser des Kreises ist, welchem der Schnitt *MSN* angehört, so lässt sich $\mathfrak{V}'$ aus r und ϱ bestimmen, was hier, als aus der Geometrie hinreichend bekannt, nicht weiter erläutert zu werden braucht.

§. 21.

Bei wirklichen für praktische Zwecke bestimmten Stabilitätsbestimmungen von Schiffen wird man sich, um nicht in zu weitläufige Untersuchungen und Rechnungen verwickelt zu werden, damit begnügen müssen, die Stabilität nur unter Annahme unendlich kleiner Drehungswinkel und zugleich unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass die Curve, in welcher die horizontale Oberfläche des Wassers von der Oberfläche des auf demselben ruhig schwimmenden Schiffs geschnitten wird, die sogenannte Wasserlinie, von einer gewissen geraden Linie in zwei einander völlig gleiche und ähnliche Theile getheilt wird.

Hauptsächlich unterscheidet und betrachtet man nur zwei Arten von Drehungen des Schiffs um horizontale Axen, die wir hier bekanntlich allein in's Auge fassen. Das Rollen oder Schlingern, auch wohl Schwanken*), des Schiffs ist die Bewegung desselben nach der Richtung der Breite von einer Seite zur andern; das Stampfen**) dagegen ist seine Bewegung nach der Richtung der Länge vom Achterschiff zum Vorderschiff oder umgekehrt. In Bezug auf das Schlingern oder Rollen ist die Voraussetzung, dass die Wasserlinie von einer gewissen geraden Linie in zwei einander völlig gleiche und ähnliche Theile getheilt werde, immer in völliger Strenge erfüllt, und dieser geraden Linie, welche wir die Längenaxe der Wasserlinie nennen wollen, können die horizontalen Drehungsaxen des Schiffs bekanntlich parallel angenommen werden. In Bezug auf das Stampfen ist dagegen die Voraussetzung, dass die Wasserlinie durch eine gewisse gerade Linie, welche wir die Breitenaxe der Wasserlinie nennen wollen, und der wieder die horizontalen Drehungsaxen des Schiffs parallel angenommen werden sollen, in zwei einander völlig gleiche und ähnliche Theile getheilt wird, nur als näherungsweise erfüllt anzusehen. Uebrigens werden wir aber späterhin sehen, dass die Stabilität des Schiffs in Bezug auf das Stampfen im Allgemeinen grösser ist als die Stabilität in Bezug auf das Schlingern oder Rollen, so dass also, wenn nur in Bezug auf das Schlingern oder Rollen das Schiff hinreichende Stabilität besitzt, dies um so mehr rücksichtlich des Stampfens der Fall sein wird, und man sich daher meistens damit wird begnügen können, die Stabilität nur rücksichtlich des Schlingerns oder Rollens, wo die in Rede stehende Voraussetzung in völliger Strenge erfüllt ist, zu bestimmen.

Dies vorausgesetzt, sind nun aber bei Stabilitätsbestimmungen eigentlich zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem man nämlich bloss aus vorliegenden Plänen oder Rissen die Stabilität des erst zu bauenden Schiffs ermitteln soll, oder bei dieser Ermittelung das schon fertige Schiff mit völliger Ausrüstung und Ladung auf dem Wasser schwimmend annimmt. Jedoch kommen, wie man leicht übersieht, beide Fälle auf einen zurück. Auf jedem Plane oder Risse eines zu bauenden Schiffs soll nämlich wenigstens die Ladewasserlinie, d. h. diejenige Wasserlinie, bis zu welcher das völlig ausgerüstete und beladene Schiff sich in's Wasser einsenkt, angegeben sein, und bei jeder Prüfung eines Risses wird die Richtigkeit dieser Linie sorgfältig geprüft werden müssen. Wie diese Prüfung anzustellen ist, kann für Keinen, der die Grundlehren der Hydrostatik kennt, im Geringsten zweifelhaft sein, und gehört gar nicht hierher, wo wir bloss von der Stabilität der Schiffe zu handeln beabsichtigen. Ist aber auf dem Risse die Ladewasserlinie richtig befunden worden, so kann man dann offenbar die Bestimmung der Stabilität des Schiffs nach dem vorliegenden Risse ganz eben so vornehmen, als wenn man das völlig ausgerüstete und beladene Schiff auf dem Wasser schwimmend vor sich hätte, weshalb wir auch von nun an im

*) Französisch: roulis.
**) Französisch: tangage.

Folgenden diesen letzteren Fall allein stets im Auge behalten wollen.

Unter allen vorhergehenden Voraussetzungen bedient man sich zur Bestimmung der Stabilität des Schiffs am besten der aus §. 7. bekannten Formel:

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\mathfrak{V}'v+\frac{1}{12}\int_0^a (2F(\xi))^3\partial\xi\,\omega\,\mathrm{Arc}\,1'',$$

wo ω in Secunden ausgedrückt ist, und $F(\xi)$, welches nach §. 7. eigentlich als dem aufgetauchten Theile angehörend betrachtet werden muss, unter den wegen des Coordinatensystems immer festgehaltenen Voraussetzungen, natürlich als positiv anzusehen ist. Setzen wir grösserer Einfachheit wegen

$$\mathfrak{F}(\xi)=2F(\xi),$$

so hat man zur Bestimmung der Stabilität die Formel:

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\mathfrak{V}'v+\frac{1}{12}\int_0^a (\mathfrak{F}(\xi))^3\partial\xi\,\omega\,\mathrm{Arc}\,1''.$$

Diese Formel wollen wir nun im Folgenden genau zergliedern, und untersuchen, welche Grössen bei dem Gebrauche derselben zur Bestimmung der Stabilität einzeln zur Berechnung kommen müssen.

I. Nach der schon vorher gemachten Bemerkung muss der sehr kleine Drehungswinkel ω in Secunden ausgedrückt sein. Ferner ist

$$\mathrm{Arc}\,1''=\frac{1}{206264{,}8},\quad \log\mathrm{Arc}\,1''=0{,}6855749-6.$$

II. Das Symbol $\bar{\omega}$ bezeichnet bekanntlich das Gewicht einer Volumeneinheit Seewasser. Der preussische Cubikfuss destillirten Wassers wiegt bei einer Temperatur von 15° der 80theiligen Scale 66 preussische Pfund. Das specifische Gewicht des Seewassers ist nicht überall gleich und variirt von 1,02 bis 1,04. Eine sehr ausführliche Uebersicht der specifischen Gewichte des Seewassers nach den verschiedenen Meeren und Breiten findet man im Artikel „Meer“ im Gehler'schen physikalischen Wörterbuche. N. A. Thl. VI. Abth. 3. S. 1628. Für den atlantischen Ocean kann man nach Horner's Bestimmungen des specifischen Gewichts des Seewassers für dasselbe im Mittel 1,02875 annehmen; für die Südsee ist dagegen das specifische Gewicht des Seewassers im Mittel 1,02692, woraus sich leicht nach dem Obigen das Gewicht eines preussischen Cubikfusses Seewasser in diesen Meeren berechnen lässt. Brommy (Die Marine. Berlin. 1848. 8. S. 9.) sagt: „Gewöhnlich nimmt man 70 Pfund Gewicht für den Cubikfuss Seewasser an“, wobei aber nicht angegeben ist, was für Fusse und Pfunde gemeint sind. Nach der Encyclopédie méthodique. Marine. T.

II. p. 746. soll ein französischer Cubikfuss Seewasser ungefähr 72 livres wiegen, nach Du Hamel de Monceau (Anfangsgründe der Schiffsbaukunst. Berlin. 1791 4. Vorrede S. LXVIII.) dagegen 74. Meiner obigen Angabe nach preussischen Fussen und Pfunden und des specifischen Gewichts des Seewassers wird man sich in der Praxis am besten zur Bestimmung des Werthes von ϖ bedienen.

III. Hauptsächlich kommt es nun auf die Berechnung des Werths des bestimmten Integrals

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta$$

in dem Ausdrucke der Stabilität an.

Die horizontale oder wasserpasse Axe der Wasserlinie ist die Axe der ζ, eine auf derselben senkrecht stehende horizontale gerade Linie ist die Axe der ξ, und eine auf diesen beiden Axen senkrecht stehende vertikale gerade Linie die Axe der η. Den Anfangspunkt der $\xi\eta\zeta$ verlegen wir in einen der beiden Endpunkte der Axe der Wasserlinie, und a ist die jederzeit zu messende und als positiv zu betrachtende Länge der Axe der Wasserlinie. Die positiven η werden nach oben hin angenommen.

Ist die Wasserlinie eine nach einem bestimmten, durch eine Gleichung auszudrückenden Gesetze gekrümmte Curve, so lässt sich natürlich das Integral

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta$$

nach den bekannten Regeln der Integralrechnung entwickeln, welchen Fall wir zunächst durch einige leichte Beispiele erläutern wollen.

1. Die Wasserlinie sei der Umfang des Rechtecks *ABCD* in Taf. II. Fig. 13. Die Längenaxe sei a, die Breitenaxe dagegen b.

Für die Stabilität in Bezug auf die Längenaxe ist

$$\mathfrak{F}(\zeta) = b,$$

also

$$(\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta = b^3 \partial\zeta, \int (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta = b^3 \zeta$$

und folglich

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta = ab^3.$$

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt des Rechtecks *ABCD* durch J, so ist $J = ab$, und folglich für die Längenaxe:

$$\int_0^a (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = b^2 J.$$

Für die Bereitenaxe ist eben so:

$$\int_0^b (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = a^2 J.$$

Insofern $a > b$ ist, ist das letztere Integral grösser als das erstere.

2. Die Wasserlinie sei der Umfang des Rhombus *ABCD* in Taf. II. Fig. 14. Die Längenaxe sei a, die Breitenaxe dagegen b.

Für die Langenaxe ist, wenn man zuvörderst bloss eine der beiden Hälften betrachtet, in welche der Rhombus *ABCD* durch die Breitenaxe getheilt wird:

$$\zeta : \mathfrak{S}(\zeta) = \frac{1}{2}a : b,$$

also

$$\mathfrak{S}(\zeta) = \frac{2b}{a}\zeta,$$

und folglich

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{8b^3}{a^3}\zeta^3, \int (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{2b^3}{a^3}\zeta^4;$$

woraus

$$\int_0^{\frac{1}{2}a} (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{8}ab^3.$$

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt des Rhombus *ABCD* durch J, so ist bekanntlich $J = \frac{1}{2}ab$, also

$$\int_0^{\frac{1}{2}a} (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{4}b^2 J,$$

und folglich für die Längenaxe:

$$\int_0^a (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{2}b^2 J.$$

Für die Breitenaxe ist eben so:

$$\int_0^b (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{2}a^2 J.$$

Insofern $a > b$ ist, ist das letztere Integral grösser als das erstere.

3. Die Wasserlinie sei der Umfang der aus den beiden gleichen parabolischen Segmenten *ABC* und *ADC* in Taf. II. Fig. 15., deren Scheitel *B* und *D* sind, zusammengesetzten Figur *ABCD*.

Der Parameter der betreffenden Parabel sei p, die Längenaxe und die Breitenaxe seien respective a und b.

Für die Längenaxe ist, wenn wir zuvörderst bloss eine der beiden Hälften betrachten, in welche die Figur *ABCD* durch die Breitenaxe getheilt wird, nach der Lehre von der Parabel:

$$\left(\frac{1}{2}a-\zeta\right)^2=p\left\{\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}(\mathfrak{S}(\zeta)\right\}=\frac{1}{2}p\{b-\mathfrak{S}(\zeta)\},$$

oder, wenn wir $\frac{1}{2}a-\zeta=z$ setzen:

$$2z^2=p\{b-\mathfrak{S}(\zeta)\}=p\{b-\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}a-z\right)\};$$

also

$$\mathfrak{S}(\zeta)=\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}a-z\right)=b-\frac{2}{p}z^2.$$

Folglich ist

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=-(b-\frac{2}{p}z^2)^3\partial z$$

oder

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\left(\frac{2}{p}z^2-b\right)^3\partial z,$$

d. i.

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\left(\frac{8}{p^3}z^6-\frac{12b}{p^2}z^4+\frac{6b^2}{p}z^2-b^3\right)\partial z,$$

woraus

$$\int_0^{\frac{1}{2}a}(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta$$

$$=\int_{\frac{1}{2}a}\left(\frac{8}{p^3}z^6-\frac{12b}{p^2}z^4+\frac{6b^2}{p}z^2-b^3\right)\partial z$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}a}(b^3-\frac{6b^2}{p}z^2+\frac{12b}{p^2}z^4-\frac{8}{p^3}z^6)\partial z$$

$$= \frac{1}{2}ab^3 - \frac{a^3b^2}{4p} + \frac{3a^5b}{40p^2} - \frac{a^7}{112p^3}$$

folgt. Weil nun aber

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}pb, \quad p = \frac{a^2}{2b}, \quad \frac{1}{p} = \frac{2b}{a^2}$$

ist, so ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}a} (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{2}ab^3 - \frac{1}{2}ab^3 + \frac{3}{10}ab^3 - \frac{1}{14}ab^3 = \frac{8}{35}ab^3.$$

Bezeichnen wir den Flächeninhalt der Figur $ABCD$ durch J, so ist bekanntlich $J = 4.\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\,a.\,\frac{1}{2}b = \frac{2}{3}ab$, also

$$\int_0^{\frac{1}{2}a} (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{12}{35}b^2 J,$$

und folglich für die Längenaxe:

$$\int_0^{a} (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{24}{35}b^2 J.$$

Für die Breitenaxe ist, wenn wir wieder zuvörderst bloss eine der beiden Hälften betrachten, in welche die Figur $ABCD$ durch die Längenaxe getheilt wird, nach der Lehre von der Parabel:

$$\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}(\zeta)\right)^2 = p\zeta, \quad \mathfrak{S}(\zeta) = 2p^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{2}};$$

folglich

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = 8p^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{3}{2}}, \int (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{16}{5}p^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{5}{2}};$$

also, wie man leicht findet:

$$\int_0^{\frac{1}{2}b} (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{2\sqrt{2}}{5}pb^2\sqrt{pb}.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$p = \frac{a^2}{2b}, \quad J = \frac{2}{3}ab$$

ist, so ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}b} (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{5}a^3b = \frac{3}{10}a^2 J,$$

und folglich für die Breitenaxe:

$$\int_0^b (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{3}{5} a^2 J.$$

Insofern

$$\frac{3}{5} a^2 > \frac{24}{35} b^2, \quad a^2 > \frac{8}{7} b^2, \quad a > b\sqrt{\frac{8}{7}}$$

ist, ist das letztere Integral grösser als das erstere.

4. Die Wasserlinie sei der Umfang der Ellipse *ABCD* in Taf. II. Fig. 16. Die Längenaxe und die Breitenaxe seien respective $2a$ und $2b$.

Für die Längenaxe ist, wenn wir zuvörderst bloss eine der beiden Hälften betrachten, in welche die Ellipse *ABCD* durch die Breitenaxe getheilt wird:

$$\mathfrak{S}(\zeta) = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2-(a-\zeta)^2}$$

oder, wenn wir $a-\zeta=z$ setzen:

$$\mathfrak{S}(\zeta) = \mathfrak{S}(a-z) = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2-z^2},$$

also

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta = -\frac{8b^3}{a^3}(a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z,$$

und folglich

$$\int_0^a (\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta = -\frac{8b^3}{a^3}\int_a^0 (a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z = \frac{8b^3}{a^3}\int_0^a (a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z.$$

Nach einer bekannten Reductionsformel ist

$$\int (a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z$$

$$= \frac{5a^2-2z^2}{8} z\sqrt{a^2-z^2} + \frac{3}{8}a^4 \int \frac{\partial z}{\sqrt{a^2-\zeta^2}},$$

d. i.

$$\int (a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z$$

$$= \frac{5a^2-2z^2}{8} z\sqrt{a^2-z^2} + \frac{3}{8}a^4 \operatorname{Arctang} \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}},$$

Digitized by Google

also

$$\int_0^a (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \partial z = \frac{3}{8} a^4 . \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{16} a^4 \pi ;$$

folglich

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta = \frac{3}{2} a b^3 \pi ,$$

oder, weil der Flächeninhalt E der ganzen Ellipse durch die Formel $E = ab\pi$ dargestellt wird,

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta = \frac{3}{2} b^2 E .$$

Daher ist für die Längenaxe:

$$\int_0^{2a} (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta = 3b^2 E = \frac{3}{4} (2b)^2 E .$$

Ganz eben so ist für die Breitenaxe:

$$\int_0^{2b} (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta = 3a^2 E = \frac{3}{4} (2a)^2 E .$$

Insofern $2a > 2b$ ist, ist das letztere Integral grösser als das erstere.

Wir wollen uns mit den vorhergehenden Beispielen begnügen, weil diese schon für unsern Zweck hinreichen. Weil man nämlich die Wasserlinie eines Schiffs in den meisten Fällen mit dem Umfange einer der vorher betrachteten Figuren wenigstens annähernd als zusammenfallend zu betrachten sich berechtigt halten darf, so geht mittelst des Vorhergehenden aus einer einigermassen sorgfältigen Betrachtung der Formel

$$\mathfrak{S} = \overline{\omega} \{ \mathfrak{V}' v + \frac{1}{12} \int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta \} \omega \operatorname{Arc} 1''$$

auf der Stelle die Richtigkeit der schon oben ausgesprochenen Behauptung hervor, dass im Allgemeinen die Stabilität der Schiffe in Bezug auf die Breitenaxe, oder die Stabilität bei'm Stampfen, grösser ist als die Stabilität der Schiffe in Bezug auf die Längenaxe, oder die Stabilität bei'm Rollen oder Schlingern, alle sonstigen Umstände natürlich in beiden Fällen als gleich vorausgesetzt, und dass es daher nur darauf ankommt, den Schiffen eine, um sie vor Unfällen möglichst sicher zu stellen, hinreichende Stabilität in Bezug auf die Längenaxe zu verschaffen, weil dann die Stabilität in Bezug auf die Breitenaxe schon von selbst eine hinlängliche Grösse haben wird.

Wenn die Wasserlinie nach keinem bestimmten durch eine Gleichung ausdrückbaren Gesetze gekrümmt ist, welches der in der Praxis eigentlich nur allein vorkommende Fall ist, so lässt sich der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta$$

nur näherungsweise bestimmen. Zu dem Ende theile man die Axe a der Wasserlinie in eine grössere oder geringere Anzahl von Theilen, und messe sowohl die Abstände der einzelnen Theilpunkte von dem Anfangspunkte der Axe der Wasserlinie, als auch die den einzelnen Theilpunkten entsprechenden Werthe von $\mathfrak{F}(\zeta)$. Dann kann man nach einer der in der Abhandlung Nr. XX. im Archiv der Mathematik und Physik. Thl. XIV. entwickelten Methoden zur näherungsweisen Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale den Werth des Integrals

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta$$

berechnen, und wird denselben im Allgemeinen desto genauer erhalten, je grösser die Anzahl der in der Axe der Wasserlinie angenommenen Theilpunkte ist. Ueber diese Methoden hier uns weiter zu verbreiten, ist völlig überflüssig, weil in der angeführten Abhandlung schon alles Nöthige über dieselben gesagt worden ist; und wir bemerken daher nur noch, dass man sich nach unserer Meinung bei wirklichen Anwendungen am vortheilhaftesten der Cotesischen Formeln bedienen, und also die Axe der Wasserlinie in eine grössere oder geringere Anzahl gleicher Theile eintheilen wird; je grösser die Anzahl dieser gleichen Theile ist, desto genauer erhält man im Allgemeinen das gesuchte Resultat, und will man dann mit den Cotesischen Näherungsformeln noch die aus der angeführten Abhandlung gleichfalls bekannten Stirling'schen Correctionsformeln verbinden, so wird dies zur Erhöhung der Genauigkeit der gewonnenen Resultate noch wesentlich beitragen. Dass man aber auch die Gauss'schen, aus der angeführten Abhandlung gleichfalls ihren Grundzügen nach bekannten Näherungsformeln in Anwendung bringen könnte, versteht sich von selbst; jedoch würde dies nicht so einfach sein, wie die Anwendung der vorher genannten Formeln. Die allgemein bekannte sogenannte Simpson'sche Näherungsformel (a. a. O. S. 291.) ist früher meistens bei dergleichen Rechnungen in der Schiffsbaukunst in Anwendung gebracht, und namentlich von Chapman (Traité de la construction des vaisseaux. Paris. 1839. 4. p. 1. etc.) dazu empfohlen worden; jedoch scheint mir dies weder so einfach, noch so genau zu sein, als die directe Anwendung der Cotesichen Näherungsformeln, wenn man namentlich mit denselben noch die wichtigen Stirling'schen Correctionsformeln verbindet.

IV. Ferner kommt es jetzt auf die Bestimmung des Volumens $\mathfrak{V}'$ an, und wir wollen daher im Allgemeinen zeigen, wie sich das Volumen eines beliebigen Körpers am besten annähernd bestimmen lässt, wovon dann unmittelbar die Anwendung auf die Bestimmung des Volumens $\mathfrak{V}'$ gemacht werden kann, ohne dass wir darüber noch besondere Erläuterungen den allgemeinen Entwickelungen hinzuzufügen brauchen werden.

Durch den gegebenen Körper, dessen Volumen wir*) überhaupt durch V bezeichnen wollen, lege man eine gerade Linie hindurch, die wir die x-Axe nennen wollen. Die Länge des auf dieser Axe von der Oberfläche des Körpers V abgeschnittenen Theils werde durch a bezeichnet, und in den einen der beiden Endpunkte dieses Theils lege man den Anfang der x, indem man zugleich die auf a selbst liegenden x als positiv betrachtet. Wird dann der Flächeninhalt des im Allgemeinen dem Endpunkte der Abscisse x entsprechenden, auf der x-Axe senkrecht stehenden Schnitts des Körpers V durch F_x bezeichnet, so ist, was hier keiner weiteren Erläuterung bedürfen wird:

$$V = \int_0^a F_x \partial x .$$

Theilt man also a in eine grössere oder geringere Anzahl von Theilen, und bestimmt sowohl die Entfernungen der einzelnen Theilpunkte von dem Anfangspunkte der x, als auch die diesen Theilpunkten entsprechenden Werthe von F_x, d. h. die Flächenräume der denselben entsprechenden, auf der x-Axe senkrecht stehenden Schnitte des Körpers V, so kann man mittelst der bekannten Näherungsformeln zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale das Volumen

$$V = \int_0^a F_x \partial x$$

näherungsweise berechnen, im Allgemeinen mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser die Anzahl der auf der Linie a angenommenen Theilpunkte ist.

Um nun aber überhaupt den Flächeninhalt F_x eines beliebigen der in Rede stehenden Schnitte des Körpers V zu bestimmen, lege man durch diesen Schnitt eine beliebige gerade Linie hindurch, welche wir die y-Axe nennen wollen, bezeichne den auf dieser Axe von dem Umfange des Schnitts F_x abgeschnittenen Theil durch b, lege den Anfang der y in den einen der beiden Endpunkte dieses Theils, und betrachte die auf b selbst liegenden y als positiv. Bezeichnen wir dann die Länge der im Allgemeinen dem Endpunkte der Abscisse y entsprechenden, auf

*) Ohne alle Beziehung auf die früher gebrauchten Bezeichnungen.

der y-Axe senkrecht stehenden Sehne oder Chorde des Schnitts F_x durch f_y, so ist, was hier keiner weiteren Erläuterung bedürfen wird:

$$F_x = \int_0^b f_y \partial y,$$

und wenn man nun wieder die Linie b in eine grössere oder geringere Anzahl von Theilen theilt, und sowohl die Entfernungen der einzelnen Theilpunkte von dem Anfangspunkte der y, als auch die diesen Theilpunkten entsprechenden Werthe von f_y, d. h. die Längen der denselben entsprechenden, auf der y-Axe senkrecht stehenden Sehnen oder Chorden von F_x bestimmt, so kann man mittelst der bekannten Näherungsformeln zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale den Flächenraum

$$F_x = \int_0^b f_y \partial y$$

berechnen, im Allgemeinen mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser die Anzahl der auf der Linie b angenommenen Theilpunkte ist.

Hieraus sieht man also, wie man sich im Allgemeinen bei der näherungsweisen Bestimmung des Volumens V zu verhalten hat, was nun auch unmittelbar auf die Bestimmung des Volumens $\mathfrak{V}'$ angewandt werden kann.

V. Endlich kommt es nun noch auf die Bestimmung der Grösse

$$v = \overset{w}{y}' - Y$$

an, wo $\overset{w}{y}'$ und Y sich auf das System der $\xi\eta\zeta$ oder ein anderes beliebiges demselben paralleles Coordinatensystem beziehen können. Weil diese Grösse aus den zwei Theilen $\overset{w}{y}'$ und Y besteht, so haben wir uns mit der Bestimmung eines jeden dieser beiden Theile besonders zu beschäftigen.

Was zuerst die Grösse $\overset{w}{y}'$ betrifft, so wird dieselbe durch die Bestimmung des Schwerpunkts des homogenen Körpers $\mathfrak{V}'$ erhalten, und wir wollen daher im Allgemeinen zeigen, wie der Schwerpunkt eines beliebigen homogenen Körpers am besten durch Näherung bestimmt werden kann, was dann unmittelbar auf die Bestimmung des Schwerpunkts von $\mathfrak{V}'$ und demnach der Grösse $\overset{w}{y}'$ angewandt werden kann, und hier nach den gegebenen allgemeinen Entwickelungen einer besonderen Erläuterung nicht weiter bedürfen wird.

Digitized by Google

Durch den gegebenen Körper, dessen Volumen wir im Allgemeinen durch V bezeichnen wollen, lege man drei auf einander senkrecht stehende Axen der x, y, z, und bezeichne die ersten Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte der Axe der x mit der Oberfläche des gegebenen Körpers durch a und b, indem zugleich angenommen wird, dass a kleiner als b sei. Die Coordinaten des gesuchten Schwerpunkts des gegebenen homogenen Körpers in dem angenommenen Systeme seien X, Y, Z, wobei eine Beziehung dieser Bezeichnungen zu den früher gebrauchten Bezeichnungen nicht Statt findet, indem die vorliegende Untersuchung ganz allein steht, und von uns möglichst allgemein gehalten werden wird. Den Flächeninhalt des im Allgemeinen dem Endpunkte der Coordinate x entsprechenden, auf der Axe der x senkrecht stehenden Schnitts des Körpers V, indem derselbe als Function von x betrachtet wird, bezeichne man durch F_x, und denke sich das Intervall $b-a$ in n einander gleiche Theile getheilt, deren jeden wir durch i bezeichnen wollen, so dass also

$$i=\frac{b-a}{n}$$

ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\mathfrak{V}=iF_a+iF_{a+i}+iF_{a+2i}+\ldots+iF_{a+(n-1)i}$$

und

$$\mathfrak{X}=i(a+\tfrac{1}{2}i)F_a+i(a+\tfrac{3}{2}i)F_{a+i}+i(a+\tfrac{5}{2}i)F_{a+2i}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+i\,(a+\frac{2n-1}{2}i)\,F_{a+(n-1)i}$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte, indem man im Folgenden bei allen Gränzen voraussetzt, dass n sich dem Unendlichen oder, was Dasselbe ist, i sich der Null nähere, offenbar:

$$X=\mathrm{Lim}\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{V}}=\frac{\mathrm{Lim}\mathfrak{X}}{\mathrm{Lim}\mathfrak{V}}.$$

Augenscheinlich ist aber

$$V=\mathrm{Lim}\mathfrak{V}$$
$$=\mathrm{Lim}.i\{F_a+F_{a+i}+F_{a+2i}+\ldots+F_{a+(n-1)i}\}$$
$$=\mathrm{Lim}.i\{F_a+F_{a+i}+F_{a+2i}+\ldots+F_{a+ni}\}-\mathrm{Lim}.iF_b,$$

folglich, weil nach einem bekannten Satze

$$\int_a^b F_x\partial x=\mathrm{Lim}.i\{F_a+F_{a+i}+F_{a+2i}+\ldots+F_{a+ni}\}$$

Digitized by Google

und offenbar

$$\text{Lim}.iF_b = 0$$

ist:

$$V = \int_a^b F_x \partial x.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{X} =$$
$$i\{aF_a + (a+i)F_{a+i} + (a+2i)F_{a+2i} + \ldots + (a+(n-1)i)F_{a+(n-1)i}$$
$$+ \frac{1}{2}i^2\{F_a + F_{a+i} + F_{a+2i} + \ldots + F_{a+(n-1)i}\}$$
$$= i\{aF_a + (a+i)F_{a+i} + (a+2i)F_{a+2i} + \ldots + (a+ni)F_{a+ni}\}$$
$$- ibF_b$$
$$+ \frac{1}{2}i.i\{F_a + F_{a+i} + F_{a+2i} + \ldots + F_{a+(n-1)i}\},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\text{Lim}\,\mathfrak{X} =$$
$$\text{Lim}.i\{aF_a + (a+i)F_{a+i} + (a+2i)F_{a+2i} + \ldots + (a+ni)F_{a+ni}\}$$
$$- \text{Lim}.ibF_b + \frac{1}{2}\text{Lim}.iV,$$

folglich nach einem bekannten Satze, und weil offenbar

$$\text{Lim}.ibF_b = 0, \quad \text{Lim}.iV = 0$$

ist:

$$\text{Lim}\,\mathfrak{X} = \int_a^b xF_x \partial x.$$

Also ist nach dem Obigen

$$X = \frac{\int_a^b xF_x \partial x}{\int_a^b F_x \partial x}$$

oder

$$X = \frac{\int_a^b xF_x \partial x}{V}.$$

Bezeichnen wir jetzt den gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Abstand des Schwerpunkts des Schnitts F_x von der Ebene der xz durch f_x, und setzen der Kürze wegen

$$\mathfrak{Y}=if_aF_a+if_{a+i}F_{a+i}+if_{a+2i}F_{a+2}+\ldots+if_{a+(n-1)i}F_{a+(n-1)i},$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar

$$Y=\mathrm{Lim}\,\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{V}}=\frac{\mathrm{Lim}\mathfrak{Y}}{\mathrm{Lim}\mathfrak{V}}.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{Y}=i\{f_aF_a+f_{a+i}F_{a+i}+f_{a+2i}F_{a+2i}+\ldots+f_{a+ni}F_{a+ni}\}-if_bF_b,$$

also

$$\mathrm{Lim}\mathfrak{Y}=\mathrm{Lim}.i\{f_aF_a+f_{a+i}F_{a+i}+f_{a+2i}F_{a+2i}+\ldots+f_{a+ni}F_{a+ni}\}-\mathrm{Lim}.if_bF_b,$$

folglich nach einem bekannten Satze, und weil offenbar

$$\mathrm{Lim}.if_bF_b=0$$

ist:

$$\mathrm{Lim}\mathfrak{Y}=\int_a^b f_xF_x\partial x.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$Y=\frac{\int_a^b f_xF_x\partial x,}{\int_a^b F_x\partial x}$$

oder

$$Y=\frac{\int_a^b f_xF_x\partial x}{V}.$$

Bezeichnet nun φ_x den gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Abstand des Schwerpunkts des Schnitts F_x von der Ebene der xy, so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher:

Digitized by Google

$$Z=\frac{\int_a^b \varphi_x F_x \partial x}{\int_a^b F_x \partial x}$$

oder

$$Z=\frac{\int_a^b \varphi_x F_x \partial x}{V}.$$

Also haben wir zur Bestimmung der gesuchten Coordinaten X, Y, Z des Schwerpunkts des homogenen Körpers V die folgenden Formeln:

$$X=\frac{\int_a^b x F_x \partial x}{\int_a^b F_x \partial x}, \quad Y=\frac{\int_a^b f_x F_x \partial x}{\int_a^b F_x \partial x}, \quad Z=\frac{\int_a^b \varphi_x F_x \partial x}{\int_a^b F_x \partial x};$$

oder

$$X=\frac{\int_a^b x F_x \partial x}{V}, \quad Y=\frac{\int_a^b f_x F_x \partial x}{V}, \quad Z=\frac{\int_a^b \varphi_x F_x \partial x}{V}.$$

Setzen wir

$$y=f_x, \quad z=\varphi_x;$$

wo also y, z die als Functionen von x betrachtete zweite und dritte Coordinate des Schwerpunkts des Schnitts F_x bezeichnen, so ist:

$$X=\frac{\int_a^b x F \partial x}{\int_a^b F_x \partial x}, \quad Y=\frac{\int_a^b y F_x \partial x}{\int_a^b F_x \partial x}, \quad Z=\frac{\int_a^b z F_x \partial x}{\int_a^b F_x \partial x};$$

oder

$$X=\frac{\int_a^b x F_x \partial x}{V}, \quad Y=\frac{\int_a^b y F_x \partial x}{V}, \quad Z=\frac{\int_a^b z F_x \partial x}{V}.$$

Wegen der in diesen Formeln vorkommenden Grössen

$$y=f_x, \quad z=\varphi_x$$

haben wir nun noch zu zeigen, wie überhaupt die Coordinaten des Schwerpunkts einer ebenen Figur bestimmt werden können.

Zu dem Ende lege man durch die gegebene Figur, deren Flächeninhalt durch F bezeichnet werden mag, zwei auf einander senkrecht stehende Axen der x und y hindurch, so dass die Axe der x die Figur F in zwei Theile theilt, welche wir, jenachdem in ihnen die positiven oder die negativen y liegen, respective den positiven und den negativen Theil der Figur F nennen wollen. Ueberhaupt mag der Abscisse x in dem positiven Theile die Ordinate y_x, in dem negativen Theile die gleichfalls als positiv betrachtete Ordinate y'_x entsprechen. Die gesuchten Coordinaten des Schwerpunkts der Figur F seien X, Y, und die Abscissen der beiden Durchschnittspunkte des Umfangs der Figur F mit der Axe der x seien a und b, so dass a kleiner als b ist. Das Intervall $b-a$ theile man wieder in n gleiche Theile ein, und setze

$$\frac{b-a}{n}=i,$$

wo i eine positive Grösse ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}= {} & iy_a+iy_{a+i}+iy_{a+2i}+\ldots+iy_{a+(n-1)i} \\ & +iy'_a+iy'_{a+i}+iy'_{a+2i}+\ldots+iy'_{a+(n-1)i}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}= {} & i(a+\tfrac{1}{2}i)y_a+i(a+\tfrac{3}{2}i)y_{a+i}+i(a+\tfrac{5}{2}i)y_{a+2i}+\ldots \\ & \ldots+i(a+\frac{2n-1}{2}i)y_{a+(n-1)i} \\ & +i(a+\tfrac{1}{2}i)y'_a+i(a+\tfrac{3}{2}i)y'_{a+i}+i(a+\tfrac{5}{2}i)y'_{a+2i}+\ldots \\ & \ldots+i(a+\frac{2n-1}{2})y'_{a+(n-1)i},\end{aligned}$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar

$$X=\operatorname{Lim}\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{S}}=\frac{\operatorname{Lim}\mathfrak{X}}{\operatorname{Lim}\mathfrak{S}}.$$

Es ist aber

Digitized by Google

$$F = \mathrm{Lim}\mathfrak{S}$$
$$= \mathrm{Lim}.i(y_a + y_{a+i} + y_{a+2i} + \cdots + y_{a+(n-1)i})$$
$$+ \mathrm{Lim}.i(y'_a + y'_{a+i} + y'_{a+2i} + \cdots + y'_{a+(n-1)i})$$
$$= \mathrm{Lim}.i(y_a + y_{a+i} + y_{a+2i} + \cdots + y_{a+ni})$$
$$+ \mathrm{Lim}.i(y'_a + y'_{a+i} + y'_{a+2i} + \cdots + y'_{a+ni})$$
$$- \mathrm{Lim}.iy_b - \mathrm{Lim}.iy'_b,$$

also nach einem bekannten Satze und weil offenbar

$$\mathrm{Lim}.iy_b = 0, \quad \mathrm{Lim}.iy'_b = 0$$

ist:

$$F = \mathrm{Lim}\mathfrak{S} = \int_a^b y_x \partial x + \int_a^b y'_x \partial x = \int_a^b (y_x + y'_x)\partial x .$$

Ferner ist

$$\mathfrak{X} = i\{ay_a + (a+i)y_{a+i} + (a+2i)y_{a+2i} + \cdots + (a+ni)y_{a+ni}\}$$
$$+ i\{ay'_a + (a+i)y'_{a+i} + (a+2i)y'_{a+2i} + \cdots + (a+ni)y'_{a+ni}\}$$
$$+ \frac{1}{2} i.i\{y_a + y_{a+i} + y_{a+2i} + \cdots + y_{a+(n-1)i}\}$$
$$+ \frac{1}{2} i.i\{y'_a + y'_{a+i} + y'_{a+2i} + \cdots + y'_{a+(n-1)i}\}$$
$$- iby_b - iby'_b,$$

also

$$\mathrm{Lim}\mathfrak{X} =$$
$$\mathrm{Lim}\, i.\{ay_a + (a+i)y_{a+i} + (a+2i)y_{a+2i} + \cdots + (a+ni)y_{a+ni}\}$$
$$+ \mathrm{Lim}.i\{ay'_a + (a+i)y'_{a+i} + (a+2i)y'_{a+2i} + \cdots + (a+ni)y'_{a+ni}\}$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{Lim}.iF - \mathrm{Lim}.ib(y_b + y'_b),$$

d. i. nach einem bekannten Satze, und weil offenbar

$$\mathrm{Lim}.iF = 0, \ \mathrm{Lim}.ib(y_b + y'_b) = 0$$

ist:

$$\mathrm{Lim}\mathfrak{X} = \int_a^b xy_x \partial x + \int_a^b xy'_x \partial x = \int_a^b x(y_x + y'_x)\partial x .$$

Daher ist nach dem Obigen

$$X=\frac{\int_a^b x(y_x+y'_x)\partial x}{\int_a^b (y_x+y'_x)\partial x}$$

oder

$$X=\frac{\int_a^b x(y_x+y'_x)\partial x}{F}.$$

Setzen wir ferner der Kürze wegen

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} = {} & \frac{1}{2}iy^2{}_a+\frac{1}{2}iy^2{}_{a+i}+\frac{1}{2}iy^2{}_{a+2i}+\ldots+\frac{1}{2}iy^2{}_{a+(n-1)i}\\ & -\frac{1}{2}iy'^2{}_a-\frac{1}{2}iy'^2{}_{a+i}-\frac{1}{2}iy'^2{}_{a+2i}-\ldots-\frac{1}{2}iy'^2{}_{a+(n-1)i},\end{aligned}$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar

$$Y=\mathrm{Lim}\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{S}}=\frac{\mathrm{Lim}\mathfrak{X}}{\mathrm{Lim}\mathfrak{S}}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}&\mathrm{Lim}\mathfrak{X}\\ = {} & \frac{1}{2}\mathrm{Lim}.i\{y^2{}_a+y^2{}_{a+i}+y^2{}_{a+2i}+\ldots+y^2{}_{a+ni}\}\\ & -\frac{1}{2}\mathrm{Lim}.i\{y'^2{}_a+y'^2{}_{a+i}+y'^2{}_{a+2i}+\ldots+y'^2{}_{a+ni}\}\\ & +\frac{1}{2}\mathrm{Lim}.iy^2{}_b-\frac{1}{2}\mathrm{Lim}.iy'^2{}_b,\end{aligned}$$

d. i., wie sogleich erhellet,

$$\mathrm{Lim}\mathfrak{X}=\frac{1}{2}\int_a^b y^2{}_x\,\partial x-\frac{1}{2}\int_a^b y'^2{}_x\partial x=\frac{1}{2}\int_a^b (y^2{}_x-y'^2{}_x)\partial x,$$

folglich

$$Y=\frac{1}{2}.\frac{\int_a^b (y^2{}_x-y'^2{}_x)\partial x}{\int_a^b (y_x+y'_x)\partial x}$$

oder

$$Y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_a^b (y^2x-y'^2x)\,\partial x}{F}.$$

Man hat also jetzt zur Bestimmung der gesuchten Coordinaten X, Y des Schwerpunkts der ebenen Figur F die folgenden Formeln:

$$X=\frac{\int_a^b x(y_x+y'_x)\,\partial x}{\int_a^b (y_x+y'_x)\,\partial x}, \qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_a^b (y^2x-y'^2x)\,\partial x}{\int_a^b (y_x+y'_x)\,\partial x}$$

oder

$$X=\frac{\int_a^b x(y_x+y'_x)\,\partial x}{F}, \qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_a^b (y^2x-y'^2x)\,\partial x}{F}.$$

Bei der Einrichtung, welche wir allen vorhergehenden Formeln hier gegeben haben, kann es nicht dem geringsten Zweifel unterliegen, wie man dieselben zur Bestimmung des Schwerpunkts des homogenen Körpers $\mathfrak{V}'$ mit Hülfe der bekannten Formeln zur annähernden Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale, und also auch zur Bestimmung der Grösse $\overset{\omega}{y}'$, anzuwenden hat. Weitere Erläuterungen hierüber würden an diesem Orte unnütze Weitläuftigkeit sein, da man, wie gesagt, den einzuschlagenden Weg auf der Stelle übersieht.

Endlich ist nun noch die Bestimmung der in dem obigen Ausdruck von v vorkommenden Grösse Y übrig. Diese Bestimmung erfordert die Ermittelung des Schwerpunkts des ganzen als ein ungleichförmig dichter Körper betrachteten Schiffs, und ist eben deshalb eigentlich die weitläuftigste Operation bei der ganzen Stabilitätsbestimmung des Schiffs. Dessenungeachtet können wir über diese allerdings weitläufige Operation hier nichts weiter sagen, indem alle dabei zu befolgenden Regeln durch die aus der Statik bekannte allgemeine Theorie des Schwerpunkts vollständig an die Hand gegeben werden. Immer wird man aber das ganze Schiff in verschiedene Theile zerlegen müssen, welche mit möglichster Annäherung als homogene oder gleichförmig dichte Körper betrachtet werden können, wird nach dem Vorhergehenden die Schwerpunkte dieser einzelnen homogenen Theile des Schiffs zu suchen, und daraus nach den allgemein bekannten Formeln aus der Theorie des Schwerpunkts auf den Schwerpunkt des ganzen Schiffs zu schliessen haben. Je mehr Genauigkeit man zu erreichen beabsichtigt, desto weitläufiger und zeitraubender wird natürlich diese Operation werden, mancherlei Abkürzungen werden sich aber bei der wirklichen Ausführung derselben von selbst ergeben über welche sich im Voraus etwas Allgemeines nicht feststellen lässt, weshalb wir uns hier mit diesen wenigen Andeutungen begnügen müssen.

Mit der Lehre von der Stabilität der Schiffe hängt ein anderer für die Schiffsbaukunst sehr wichtiger Gegenstand nahe zusammen, den wir hier für jetzt jedoch nur von seiner allgemeinen theoretischen Seite betrachten wollen, ohne uns auf specielle Anwendungen, die wir späteren Untersuchungen vorbehalten, hier schon einzulassen; wir meinen nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher das aus seiner ruhigen Gleichgewichtslage auf dem Wasser gebrachte Schiff in jene Lage wieder zurückkehrt, oder die Geschwindigkeit, mit welcher es rollt oder stampft. In dieser Beziehung pflegt man das Schiff mit einem einfachen Pendel zu vergleichen, welches seine Schwingungen ganz in derselben Zeit vollendet wie das rollende oder stampfende Schiff seine oscillatorischen Bewegungen auf dem Wasser. Je langsamer diese Bewegungen vor sich gehen, d. h. je grösser die auf die Vollendung derselben verwandte Zeit, oder je länger das dem Schiffe isochrone einfache Pendel ist, desto vortheilhafter ist es natürlich, desto weniger werden dem Schiffe seine oscillatorischen Bewegungen auf dem Wasser Gefahr bringen, und desto mehr wird dasselbe überhaupt seinem Zwecke entsprechen.

Denken wir uns jetzt zuvörderst ganz im Allgemeinen ein System auf ihre Schwerpunkte reducirter Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ldots;$$

welches sich um die feste horizontale Axe der z als Drehungsaxe in einer oscillatorischen Bewegung befindet; so haben wir nach §. 3. bekanntlich die Gleichung

$$\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(xY-yX).$$

Bezeichnet nun $2g$ die Intensität der auf die Masseneinheit bezogenen Schwere, und sind

$$p,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ldots$$

gewisse an den materiellen Punkten

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots$$

stets nach vertikalen Richtungen wirkende, natürlich mit den gehörigen Zeichen genommene Kräfte; so ist offenbar, wenn man sich nur aus §. 3. an die Bedeutung der Symbole

$$X',\ Y',\ Z';\ X'_1,\ Y'_1,\ Z'_1;\ X'_2,\ Y'_2,\ Z'_2;\ X'_3,\ Y'_3,\ Z'_3;\ldots$$

erinnert:

$$X'=0, \quad Y'=p-2gm, \quad Z'=0;$$
$$X'_1=0, \quad Y'_1=p_1-2gm_1, \quad Z'_1=0;$$
$$X'_2=0, \quad Y'_2=p_2-2gm_2, \quad Z'_2=0;$$
$$X'_3=0, \quad Y'_3=p_3-2gm_3, \quad Z'_3=0;$$

u. s. w.

also nach §. 3.

$$X=\frac{X'}{m}=0, \quad Y=\frac{Y'}{m}=\frac{p}{m}-2g, \quad Z=\frac{Z'}{m}=0;$$
$$X_1=\frac{X_1'}{m_1}=0, \quad Y_1=\frac{Y'_1}{m_1}=\frac{p_1}{m_1}-2g, \quad Z_1=\frac{Z'_1}{m_1}=0;$$
$$X_2=\frac{X'_2}{m_2}=0, \quad Y_2=\frac{Y'_2}{m_2}=\frac{p_2}{m_2}-2g, \quad Z_2=\frac{Z'_2}{m_2}=0;$$
$$X_3=\frac{X'_3}{m_3}=0, \quad Y_3=\frac{Y'_3}{m_3}=\frac{p_3}{m_3}-2g, \quad Z_3=\frac{Z'_3}{m_3}=0;$$

u. s. w.

Folglich ist offenbar

$$\Sigma m(xY-yX)=\Sigma x(p-2gm)=\Sigma px-2g\Sigma mx,$$

also nach dem Obigen

$$\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\Sigma px-2g\Sigma mx.$$

Bezeichnen wir aber durch

$$r, r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots.$$

die Entfernungen der materiellen Punkte

$$m, m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots.$$

von der horizontalen Drehungsaxe, und durch

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots.$$

die am Ende der Zeit t von den Linien

$$r, r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots.$$

mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem man alle diese Winkel von dem positiven Theile der

Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin zählt; so ist offenbar, wenn wir als einen Repräsentanten der übrigen bloss den materiellen Punkt m in's Auge fassen, in völliger Allgemeinheit:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi;$$

also

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

und

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -r\sin\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - r\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = r\cos\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - r\sin\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2;$$

folglich, wie man leicht findet:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

und daher nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2g\,\Sigma mr\cos\varphi.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung des Schwerpunkts des Systems der Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ldots.$$

von der horizontalen Drehungsaxe durch R, und durch Φ den auf dieselbe Weise wie vorher genommenen Winkel, welchen am Ende der Zeit t die Linie R mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst; so ist nach der Lehre vom Schwerpunkt

$$\frac{mx + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots.}{m + m_1 + m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.}$$

$$= \frac{mr\cos\varphi + m_1r_1\cos\varphi_1 + m_2r_2\cos\varphi_2 + m_3r_3\cos\varphi_3 + \ldots.}{m + m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.}$$

$$= \frac{\Sigma mr\cos\varphi}{\Sigma m} = R\cos\Phi,$$

und folglich

$$\Sigma mr\cos\varphi = R\cos\Phi\,\Sigma m,$$

also nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\,\Sigma m.$$

Weil aber die Winkel φ und Φ, und eben so die Winkel φ_1 und Φ, φ_2 und Φ, φ_3 und Φ, u. s. w. immer, d. h. für jedes t, um dieselbe constante Grösse von einander verschieden sind, so ist

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \ \ldots;$$

also

$$\Sigma mr^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Sigma mr^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\,\Sigma m.$$

Als ein System wie das so eben betrachtete lässt sich wenigstens näherungsweise ein Schiff auf dem Wasser ansehen. Bei unendlich kleinen Drehungswinkeln kann man nämlich wenigstens näherungsweise annehmen, dass die das Schiff sollicitirende Kraft $+G$ immer, d. h. bei allen Lagen des Schiffs, in dem Schwerpunkte des eingetauchten Theils bei der ruhigen Gleichgewichtslage des Schiffs auf dem Wasser wirke, und kann unter dieser Voraussetzung im Vorhergehenden, indem m als im Schwerpunkte des eingetauchten Theils bei der ruhigen Gleichgewichtslage des Schiffs auf dem Wasser befindlich angenommen wird,

$$p = +G$$

und

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \ldots = 0$$

setzen, wodurch die obige Gleichung in die Gleichung

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = Gr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\,\Sigma m,$$

oder, weil

$$G = 2g\Sigma m$$

ist, in die Gleichung

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)$$

übergeht.

Digitized by Google

Die horizontale Drehungsaxe wollen wir nun in der durch den Schwerpunkt des ganzen Schiffs und den Schwerpunkt des eingetauchten Theils des Schiffs bei seiner ruhigen Gleichgewichtslage auf dem Wasser gehenden Vertikalebene annehmen, und wollen unter der Voraussetzung, dass die Stabilität des Schiffs positiv sei, die Länge eines einfachen Pendels, welches seine Schwingungen ganz auf dieselbe Weise vollendet wie der untere der beiden Theile, in welche die durch den Schwerpunkt des ganzen Schiffs und den Schwerpunkt des eingetauchten Theils bei der ruhigen Gleichgewichtslage des Schiffs auf dem Wasser gehende Vertikale durch die horizontale Drehungsaxe getheilt wird, die seinigen, durch L bezeichnen. Dann müssen wir, um diese Pendellänge zu bestimmen, die folgenden Fälle unterscheiden.

Der Fall, dass an dem Schiffe die Kraft $-G$ oberhalb, die Kraft $+G$ unterhalb der Drehungsaxe wirkt, kann nicht vorkommen, weil dann offenbar die Stabilität nicht, wie doch vorher angenommen worden ist, positiv sein könnte.

Wenn die Kraft $-G$ unterhalb, die Kraft $+G$ oberhalb der Drehungsaxe wirkt, so ergiebt sich aus der oben bewiesenen allgemeinen Gleichung

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2gR\cos\varphi \Sigma m$$

auf der Stelle die Gleichung

$$L \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -2g\cos\Phi ,$$

und da nun nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)$$

ist, so erhält man durch Division

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = -\frac{G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)}{2g\cos\Phi} .$$

Nun ist aber in diesem Falle offenbar

$$\varphi = \Phi - \pi , \quad \cos\varphi = -\cos\Phi :$$

also

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{G(r+R)}{2g} .$$

Ferner ist aber

$$X_1 = R\cos\Phi , \quad \overset{w}{r}_1 = r\cos\varphi = -r\cos\Phi ;$$

also

$$X_1 - \overset{w}{x_1} = (r + R)\cos\Phi,$$

und folglich, weil nach §. 6. bekanntlich

$$\mathfrak{S} = G(X_1 - \overset{w}{x_1})$$

ist:

$$\mathfrak{S} = G(r + R)\cos\Phi,$$

also

$$G(r+R) = \mathfrak{S}\sec\Phi.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\sec\Phi.$$

Offenbar ist aber in diesem Falle

$$\Phi = \omega + \frac{3}{2}\pi,$$

also

$$\cos\Phi = \sin\omega, \quad \sec\Phi = \operatorname{cosec}\omega;$$

folglich

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\operatorname{cosec}\omega.$$

Wenn die Kräfte $-G$ und $+G$ beide unterhalb der Drehungsaxe wirken, so ergiebt sich aus der oben bewiesenen allgemeinen Gleichung

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\Sigma m$$

wieder auf der Stelle die Gleichung

$$L\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -2g\cos\Phi,$$

und da nun nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)$$

ist, so erhält man durch Division

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = -\frac{G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)}{2g\cos\Phi}.$$

Nun ist aber in diesem Falle

$$\varphi = \Phi, \quad \cos\varphi = \cos\Phi;$$

also

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = -\frac{G(r-R)}{2g}.$$

Ferner ist aber

$$X_1 = R\cos\Phi, \quad \overset{w}{r}_1 = r\cos\varphi = r\cos\Phi;$$

also

$$X_1 - \overset{w}{r}_1 = -(r-R)\cos\Phi,$$

und folglich, weil nach §. 6. bekanntlich

$$\mathfrak{S} = G(X_1 - \overset{w}{r}_1)$$

ist:

$$\mathfrak{S} = -G(r-R)\cos\Phi,$$

also

$$-G(r-R) = \mathfrak{S}\sec\Phi.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\sec\Phi.$$

Offenbar ist aber auch in diesem Falle

$$\Phi = \omega + \frac{3}{2}\pi,$$

also

$$\cos\Phi = \sin\omega, \quad \sec\Phi = \operatorname{cosec}\omega;$$

folglich

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\operatorname{cosec}\omega.$$

Wenn die Kräfte $-G$ und $+G$ beide oberhalb der Drehungsaxe wirken, so ergiebt sich aus der oben bewiesenen allgemeinen Gleichung

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\,\Sigma m$$

leicht die Gleichung

$$L\frac{\partial^2(\Phi+\pi)}{\partial t^2} = -2g\cos(\Phi+\pi),$$

d. i. die Gleichung

$$L\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 2g\cos\Phi,$$

und da nun nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)$$

ist, so erhält man durch Division

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)}{2g\cos\Phi}.$$

Nun ist aber in diesem Falle

$$\varphi = \Phi, \quad \cos\varphi = \cos\Phi;$$

also

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{G(r-R)}{2g}.$$

Ferner ist aber

$$X_1 = R\cos\Phi, \quad \overset{w}{x}_1 = r\cos\varphi = r\cos\Phi;$$

also

$$X_1 - \overset{w}{x}_1 = -(r-R)\cos\Phi,$$

und folglich, weil nach §. 6. bekanntlich

$$\mathfrak{S} = G(X_1 - \overset{w}{x}_1)$$

ist:

$$\mathfrak{S} = -G(r-R)\cos\Phi,$$

also

$$G(r-R) = -\mathfrak{S}\sec\Phi.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = -\frac{\mathfrak{S}}{2g}\sec\Phi.$$

Offenbar ist aber in diesem Falle

$$\Phi = \omega + \frac{1}{2}\pi,$$

also

$$\cos\Phi = -\sin\omega, \quad \sec\Phi = -\operatorname{cosec}\omega;$$

folglich

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\operatorname{cosec}\omega.$$

Hiernach haben wir also die völlig allgemein gültige Gleichung

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\operatorname{cosec}\omega,$$

aus welcher

$$L = \frac{2g\Sigma mr^2}{\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega}$$

folgt. Dass diese Gleichung nur mit desto grösserer Genauigkeit richtig ist, je kleiner der Winkel ω ist, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

Bezeichnet man die Gewichte der Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots.$$

respective durch

$$\mathfrak{G},\ \mathfrak{G}_1,\ \mathfrak{G}_2,\ \mathfrak{G}_3,\ \mathfrak{G}_4,\ldots.;$$

so ist offenbar

$$2g\Sigma mr^2 = \Sigma\mathfrak{G}r^2,$$

und folglich

$$L = \frac{\Sigma\mathfrak{G}r^2}{\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega}.$$

Der Zähler $\Sigma\mathfrak{G}r^2$ dieses Bruchs ist bekanntlich das in Bezug auf die zum Grunde gelegte Drehungsaxe genommene Trägheitsmoment des Schiffs, und der Nenner $\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega$ ist die durch $\sin\omega$ dividirte Stabilität des Schiffs in Bezug auf dieselbe Drehungsaxe. Man erhält also die Länge des dem Schiffe isochronen einfachen Pendels, wenn man das Trägheitsmoment des Schiffs in

Bezug auf die angenommene Drehungsaxe durch seine mit der Cosecante des Winkels ω multiplicirte Stabilität in Bezug auf dieselbe Drehungsaxe dividirt. Dass das Product $\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega$ von dem Drehungswinkel ω bei unendlich kleinen Drehungswinkeln ganz unabhängig ist, geht aus dem aus dem Obigen bekannten Ausdrucke der Stabilität in diesem Falle unmittelbar hervor. Dass man bei wirklichen Anwendungen der obigen Formel in der Praxis die horizontale Drehungsaxe durch den Schwerpunkt des Schiffs legen muss, bedarf nach den in §. 5. angestellten allgemeinen Betrachtungen kaum noch einer besonderen Bemerkung. Ganz auf dieselbe Art wie vorher ausgedrückt, findet sich der obige Satz in Euler's Scientia navalis. T. I. Petropoli. 1749. 4°. Propositio 21. Coroll. 1. p. 96., wo Euler sagt: „Longitudo ergo penduli isochroni aequatur momento inertiae figurae respectu axis gyrationis diviso per stabilitatem figurae respectu eiusdem axis, prout quidem stabilitatem exprimere constituimus. Euler's theoretische Darstellung lässt aber Vieles zu wünschen übrig, und man muss sich, mit Rücksicht auf die oben in §. 9. Anmerkung. gemachten Bemerkungen, an Euler's Begriff der Stabilität und die Form, unter welcher er und die meisten älteren Schriftsteller dieselbe darstellen, erinnern, wenn man die völlige Uebereinstimmung seines Satzes, der sich auch ohne Beweis in seiner Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux. Nouvelle édition. Paris 1776. 8. p. 63. findet, erkennen will.

Bezeichnen wir die Schwingungszeit des dem Schiffe isochronen einfachen Pendels von der Länge L durch $\mathfrak{T}$, so ist bekanntlich nach den Lehren der Mechanik, wenn ε die Elongation bezeichnet:

$$\mathfrak{T}=\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\sin\frac{1}{2}\varepsilon^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\sin\frac{1}{2}\varepsilon^6+\ldots\ldots\ldots\right\}.$$

Ist aber wie im vorliegenden Falle ε unendlich klein, so kann man näherungsweise

$$\mathfrak{T}=\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

setzen; und führt man nun für L seinen obigen Ausdruck ein, so erhält man zur Berechnung von $\mathfrak{T}$ die Formel

$$\mathfrak{T}=\pi\sqrt{\frac{\Sigma\mathfrak{G}r^2}{2g\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega}},$$

Digitized by Google

mittelst welcher man sogleich die Oscillationszeit des Schiffes findet.

Um den Werth der im Vorhergehenden angestellten Untersuchungen für die Praxis, welchen man, ungeachtet der jedenfalls sehr grossen Wichtigkeit und des grossen Interesses derselben, doch auch zu überschätzen sich hüten muss, ohne auf weitläufige Erörterungen mich für jetzt einlassen zu können, in möglichst helles Licht zu setzen, will ich diese Abhandlung mit den folgenden Worten Euler's (Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux. p. 65.) schliessen:

„Lorsque la mer se trouve dans une grande agitation, on comprend aisément que les mouvemens de roulis et de tangage en doivent souffrir des altérations très considérables, les vagues étant seules capables, de produire un balancement dans le vaisseau, quand même il n'auroit pas été incliné par quelque autre force. Or, pour déterminer les mouvemens qui seront imprimés alors au vaisseau, la théorie nous abandonne entièrement, parceque nous ignorons encore absolument les loix selon lesquelles une eau agitée pousse les corps qui y nagent, et qu'ainsi la formule trouvée ci-dessus pour la stabilité, ne sauroit plus avoir lieu; il en est de même de celle pour la longueur du pendule isochrone, qui devient entièrement fausse. L'experience ne nous permet pas de douter que les forces qu'une mer troublée par des vagues exerce sur le vaisseau, ne soient tout à-fait différentes de celles qu'on observe dans une eau calme. On a même remarqué que lorsqu'un vaisseau est porté en haut par les vagues, il s'élève par un mouvement accéleré, et qu'il retombe par un mouvement retardé; ce qui paroit directement opposé aux principes reçus sur l'action des eaux."

Anmerkung.

Im Obigen ist an einigen Stellen (z. B. S. 20. und S. 97.) das ausgezeichnete Werk von Chapman: „Traité de la construction des vaisseaux" angeführt und die auf seinem Titel stehende Jahrzahl 1839 angegeben worden. Ich bemerke aber, dass dieses Werk weit älter, und der schon im Jahre 1781 zu Brest erschienenen französischen Uebersetzung nur ein neuer Titel vorgedruckt worden ist. Eine neue Ausgabe dieser Uebersetzung ist die oben angeführte vom Jahre 1839 nicht.

II.

Ueber das Integral

$$\int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i}).e^{-n\varphi i}\partial\varphi\,.$$

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim.

Wir wollen bei diesem Integral voraussetzen, dass $f(re^{\varphi i})$ innerhalb der Grenzen 0 und 2π für φ, so wie innerhalb bestimmter Gränzen für r kontinuirlich sei; dass ferner $f(re^{\varphi i})$ an den Gränzen $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ den gleichen Werth annehme und endlich, dass

$$f(re^{\varphi i})=\psi(r,\varphi)+i\chi(r,\varphi).$$

Setzen wir nun

$$\int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i})e^{-n\varphi i}\partial\varphi=K$$

so ist offenbar

$$\frac{\partial^n K}{\partial r^n}=\int_0^{2\pi} f^{(n)}(re^{\varphi i})\partial\varphi,$$

vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten $f'(re^{\varphi i}),\ldots f^{(n)}(re^{\varphi i})$ innerhalb der gleichen Gränzen, wie oben, nicht unendlich werden.

Da

$$f(re^{\varphi i})=\psi(r,\varphi)+i\chi(r,\varphi),$$

$$f^{(n)}(re^{\varphi i})=\frac{\partial^n . f(re^{\varphi i})}{\partial r^n}\cdot e^{-n\varphi i};$$

so ist auch

$$f^{(n)}(re^{\varphi i})=\psi_1(r,\varphi)+i\chi_1(r,\varphi),$$

wobei

$$\psi_1(r,\varphi)=\frac{\partial^n\psi(r,\varphi)}{\partial r^n}\cdot\cos n\theta+\frac{\partial^n\chi(r,\varphi)}{\partial r^n}\sin n\theta,$$

$$\chi_1(r,\varphi)=-\frac{\partial^n\psi(r,\varphi)}{\partial r^n}\sin n\theta+\frac{\partial^n\chi(r,\varphi)}{\partial r^n}\cos n\theta;$$

und da $\psi(r,\varphi)$, $\chi(r,\varphi)$ für $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ die gleichen Werthe erlangen, so werden auch $\psi_1(r,\varphi)$, $\chi_1(r,\varphi)$ für $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ dieselben Werthe haben. Nun ist

$$\frac{\partial . f^{(n)}(re^{\varphi i})}{\partial \varphi} = re^{\varphi i} f^{(n+1)}(re^{\varphi i}),$$

$$r\int_{i}^{2\pi} e^{\varphi i} f^{(n+1)}(re^{\varphi i})\partial\varphi = f^{(n)}(re^{0}) - f^{(n)}(re^{2\pi i}) = 0;$$

d. i.

$$\int_{0}^{2\pi} e^{\varphi i} f^{(n+1)}(re^{\varphi i})\partial\varphi = 0,$$

wenn auch $f^{(n+1)}(re^{\varphi i})$ innerhalb der bestimmten Gränzen endlich bleibt. Aber

$$e^{\varphi i} f^{(n+1)}(re^{\varphi i}) = \frac{\partial . f^{(n)}(re^{\varphi i})}{\partial r},$$

also

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\partial . f^{(n)}(re^{\varphi i})}{\partial r}\,\partial\varphi = \frac{\partial . \int_{0}^{2\pi} f^{(n)}(re^{\varphi i})\,\partial\varphi}{\partial r} = 0,$$

d. i.

$$\int_{0}^{2\pi} f^{(n)}(re^{\varphi i})\,\partial\varphi = C.$$

Liegt der Werth $r = 0$ innerhalb der mehrfach genanpten Gränzen von r, so findet man leicht

$$C = 2\pi f^{(n)}(0),$$

also

$$\int_{0}^{2\pi} f^{(n)}(re^{\varphi i})\partial\varphi = 2\pi f^{(n)}(0),$$

d. h.

$$\frac{\partial^n K}{\partial r^n} = 2\pi f^{(n)}(0), \quad K = \frac{2\pi f^{(n)}(0)}{1.2....n} r^n;$$

oder endlich

$$\int_{0}^{2\pi} f(re^{\varphi i}) e^{-n\varphi i}\,\partial\varphi = \frac{2\pi . f^{(n)}(0)\, r^n}{1.2.3....n},$$

indem $\frac{\partial^{n-1} K}{\partial r^{n-1}}, ... \frac{\partial K}{\partial r}$ alle Null sind für $r = 0$.

Dieser Werth hat also Statt, wenn $f(re^{\varphi i})$ folgende Bedingungen erfüllt:

a) dass $f(re^{\varphi i})$, $f'(re^{\varphi i}), ... f^{(n)}(re^{\varphi i})$ alle endlich bleiben innerhalb bestimmter Gränzen von r, und dass 0 zwischen diesen Gränzen liegt;

b) dass $f(re^{\varphi i})$ und also auch seine Differentialquotienten periodisch in Bezug auf φ seien, und der Umfang einer Periode 2π sei. (M. s. Journal de Math. par J. Liouville. Avril 1846.).

III.

Beiträge zur höheren Lehre von den Logarithmen.

Von

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

ordentl. Prof. der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag.

(Vorgelesen in den Versammlungen der Section der königl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Prag für Philosophie und reine Mathematik am 8. März, 5. und 17. April 1850.)

In dem Begriffe und der auf ihn gegründeten Lehre von den Logarithmen, so wie auch in dem Geschichtlichen und Literarischen derselben, dürfte noch manches Interessante und Wissenswerthe beizubringen sein. Davon sollen die nachfolgenden zwei Abschnitte einen Beleg geben.

Erster Abschnitt.

Betrachtung der bisher gegebenen Begriffe der Logarithmen, und Aufstellung eines neuen.

Bisher wurden im Wesentlichen folgende vier Begriffe von den Logarithmen aufgestellt:

1. der von dem eigentlichen Entdecker der Logarithmen, John Neper, ursprünglich gegebene;

2. der von Jobst Byrg, dem gleichzeitigen Entdecker der Logarithmen, gebrauchte;

3. der von Johann Kepler verwendete;

4. der gegenwärtig seit Euler in den Lehrgebäuden der Algebra übliche.

Ihnen füge ich noch bei

5. einen neuen, von mir selbst erdachten, in mancherlei Beziehung, vornehmlich für den Elementar-Unterricht, mit grossem Vortheil verwendbaren Begriff.

A.

Neper's Erklärung der Logarithmen, durch gleichzeitig angemessen stetig veränderliche Grössen.

1.

Neper*) veröffentlichte im Jahre 1614 die Lehre der von ihm entdeckten Logarithmen in folgender lesenswürdigen, jetzt aber schon sehr seltenen Schrift:**)

Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi et expeditissimi explicatio. Authore ac Inventore, Joanne Nepero, Barone Merchistonii, etc. Scoto. Edinburgi. Ex officina Andreae Hart Bibliopolae, 1614. 4min. Text 64, logarithmische Tafeln 90 Seiten.***)

Auf Seite 1 — 4 giebt er von seinen Logarithmen die nachstehende, äusserst scharfsinnige phoronomische Erklärung, die ich hier wortgetreu mittheile.

Caput I. De definitionibus.

1. *Definitio.* Linea aequaliter crescere dicitur, quum punctus, eam describens, aequalibus momentis per aequalia intervalla progreditur.

---

*) Eigentlich John Napier oder Nepair, Lord, Baron von Merchiston, ein Schotte, geb. 1550, gest. 1618.

**) Ich benützte das in der Bibliothek des k. k. Bombardier-Corps zu Wien vorhandene, aus dem Nachlass weil. Jos. Hantschl's, Prof. der höh. Math. am Wiener k. k. polytech. Institute, erstandene Exemplar.

***) Davon erschien im Jahre 1619 sowohl ein blosser Abdruck zu Lyon, als auch eine von Neper's Sohn Robert besorgte neue Ausgabe mit einigen nachgelassenen Werken, darunter als hieher gehörig:

Primo, Mirifici ipsius canonis constructio, et Logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines;

Secundo, Appendix de alia, eaque praestantiore Logarithmorum specie construenda.

Im Jahre 1620 endlich wurden auch diese nachgelassenen Werke zu Lyon nachgedruckt.

Von diesen Nachlässen ist mir jedoch nichts in die Hände gekommen.

Sit (Taf. III. Fig. 1.) punctus *A*, a quo ducenda est linea fluxu alterius puncti, qui sit *B*. Fluat ergo primo momento *B* ab *A* in *C*, secundo momento a *C* in *D*, tertio momento a *D* in *E*, atque ita deinceps in infinitum describendo lineam *ACDEF*....., intervallis *AC*, *CD*, *DE*, *EF*,...., et caeteris deinceps aequalibus, et momentis aequalibus descriptis. Dicetur haec linea, per definitionem superius traditam, aequaliter crescere.

Corollarium. Unde hoc incremento quantitates aequidifferentes temporibus aequidifferentibus produci est necesse.

Ut in superiori schemate unico momento *B* ab *A* in *C*, et tribus momentis ab *A* in *E* progressum est; sic sex momentis ab *A* in *H*, et octo momentis ab *A* in *K*. Sunt autem illorum momentorum unius et trium, et horum sex et octo differentiae aequales, scilicet duorum. Sic etiam erunt quantitatum illarum *AC* et *AE*, et harum *AH* et *AK* differentiae *CE* et *HK* aequales, aequidifferentes ergo, ut supra.

2. *Definitio.* Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctus eam transcurrens, aequalibus momentis, segmenta abscindit, ejusdem continuo rationis ad lineas a quibus abscinduntur.

Exempli gr. Sit (Taf. III. Fig. 2.) linea sinus totius, $\alpha\omega$, proportionaliter minuenda. Sit punctus, transcursu suo eam minuens, β; sit denique ratio segmentorum singulorum ad lineas, a quibus abscinduntur, ut *QR* ad *QS*. Qua ergo ratione secatur *QS* in *R*, eadem ratione (per 10. 6 Eucl.) secetur $\alpha\omega$ in γ. Atque sic β, transcurrens ab α in γ, primo momento ab $\alpha\omega$ abscindat $\alpha\gamma$, relicta linea seu sinu $\gamma\omega$. Ab hac autem $\gamma\omega$ procedens β secundo momento abscindat simile segmentum quale est *QR* ad *QS*, quod sit $\gamma\delta$, relicto sinu $\delta\omega$. A quo proinde tertio momento abscindat β simili ratione segmentum $\delta\varepsilon$, relicto sinu $\varepsilon\omega$,...; et ita deinceps in infinitum. Dico itaque, hic sinus totius lineam $\alpha\omega$..... proportionaliter decrescere in sinum $\eta\omega$, aut in alium quemvis ultimum, in quo sistit β; et sic in aliis.

Coroll. Unde hoc aequalibus momentis decremento, ejusdem etiam rationis proportionales lineas relinqui, est necesse.

Quae enim superius est continua proportio sinuum minuendorum

$$\alpha\omega,\ \gamma\omega,\ \delta\omega,\ \varepsilon\omega,\ \zeta\omega,\ \eta\omega,\ \ldots.$$

atque sagmentorum ab eis abscissorum

$$\alpha\gamma,\ \gamma\delta,\ \delta\varepsilon,\ \varepsilon\zeta,\ \zeta\eta,\ \eta\iota,\ \ldots.$$

eadem erit necessario etiam sinuum relictorum proportio, scilicet

$\gamma\omega$, $\delta\omega$, $\varepsilon\omega$, $\zeta\omega$, $\eta\omega$, $\iota\omega$, ...

ut ex 19. prop. 5., et 11. prop. 7. Euclidis patet.

. . . . . .

Es verhält sich nemlich

$$SQ : RQ : SR = \alpha\omega : \gamma\omega : \alpha\gamma$$
$$= \gamma\omega : \delta\omega : \gamma\delta$$
$$= \delta\omega : \varepsilon\omega : \delta\varepsilon$$
$$= \varepsilon\omega : \zeta\omega : \varepsilon\zeta$$

u. s. f.

4. *Defin.* Synchroni motus sunt, qui simul et eodem tempore fiunt.

Ut in superioribus (Taf. III. Fig. 1. und 2.) esto, quod B moveatur ab A in C, eodem tempore quo β movetur ab α in γ; dicentur rectae AC et $\alpha\gamma$ synchrono motu describi.

5. *Defin.* Quum quolibet motu et tardior et velocior dari possit, sequetur necessario, cuique motui aequivelocem (quem nec tardiorem nec velociorem definimus) dari posse.

6. *Defin.* Logarithmus ergo cujusque sinus est numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio aequiveloce.

Ex. gr. Repetantur ambo superiora schemata (Taf. III. Fig. 1. und 2.) et moveatur B semper et ubique eadem seu aequali velocitate qua coepit moveri β initio quum est in α. Deinde primo momento procedat B ab A in C, et eodem momento procedat β ab α in γ proportionaliter: erit numerus definiens AC logarithmus lineae seu sinus $\gamma\omega$. Tum secundo momento promoveatur B a C in D, et eodem momento promoveatur proportionaliter β a γ in δ: erit numerus definiens AD logarithmus sinus $\delta\omega$.....; et ita in infinitum.

Coroll. Unde sinus totius 10000000 nullum seu 0 est logarithmus: et per consequens numerorum majorum sinu toto logarithmi sunt nihilo minores.

. . . . . .

Itaque logarithmos sinuum qui semper majores nihilo sunt, abundantes vocamus, et hoc signo +, aut nullo praenotamus. Logarithmos autem minores nihilo defectivos vocamus, praenotantes eis hoc signum —.

Admonitio. Erat quidem initio liberum, cuilibet sinui, aut quantitati nullum seu 0 pro logarithmo attribuisse: sed

praestat id prae caeteris sinui toti accommodasse: ne unquam in posterum vel minimam molestiam parturiret nobis additio et subtractio ejus logarithmi, in omni calculo frequentissimi.

Caeterum etiam quia sinuum et numerorum sinu toto minorum frequentior est usus: eorum igitur logarithmos abundantes ponimus: aliorum vero defectivos, etsi contra fecisse initio liberum erat.

Auf diese Erklärung gründet Neper seine Lehre von den Logarithmen, aus der ich die folgenden auf Seite 5. und 6. a. a. O. stehenden Lehrsätze hervorhebe.

Caput II. De logarithmorum propositionibus.

Propos. 1. Proportionalium numerorum aut quantitatum aequidifferentes sunt logarithmi.

Propos. 4. Ex quatuor proportionalium logarithmis aggregatum secundi et tertii minutum primo aequatur quarto.

Propos. 5. Ex trium proportionalium logarithmis duplum secundi seu medii aequatur aggregato extremorum.

2.

Analytische Interpretation dieser Erklärung.

„Die Erklärung, welche Neper von den Logarithmen giebt, ist merkwürdig", sagt Klügel (Math. Wörterb. T. III. p. 634., n. 112.); weswegen, erwähnt er jedoch nicht. So weit mir bekannt, hat weder er, noch jemand Anderer vor mir den Einfall gehabt, in dieser Erklärung die dynamisch-geometrischen oder die phoromischen Bilder, die sie benützt, von der Seite zu betrachten, dass man an ihnen die stetige Veränderlichkeit entweder dreier Grössen mit einander, von deren einer die beiden anderen abhängen, oder auch die stetige Veränderlichkeit nur zweier zusammenhängender Grössen erkennt, von denen die eine der Logarithmand, die andere der Logarithme ist.

1) Betrachtung *dreier* zusammengehöriger Veränderlichen.

Neper lässt mit der stetig veränderlichen Zeit T zwei Wegstrecken X, Y, also verallgemeinert ausgesprochen: mit einer stetigen Veränderlichen T zwei von ihr abhängig veränderliche Grössen X, Y, zugleich; dabei jede der drei Veränderlichen stetig und in beständigem Sinn sich verändern, d. h. entweder fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen, nie aber bald wachsen bald abnehmen; und zwar die Grundveränderliche T und die

eine abhängig Veränderliche X, gleichförmig (aequaliter) — un gleiche Unterschiede — die andere abhängig Veränderliche Y aber gleichmässig (proportionaliter) — in gleichem Mass oder Verhältnisse.

Betrachtet man nemlich von der Grundveränderlichen T zwe Paar Werthe

$$T', T'' \text{ und } T_1, T_2,$$

dazu von der ersten abhängig Veränderlichen X die entsprechen den zwei Paar Werthe

$$X', X'' \text{ und } X_1, X_2,$$

so wie von der zweiten abhängig Veränderlichen Y die entspre chenden zwei Paar Werthe

$$Y', Y'' \text{ und } Y_1, Y_2;$$

so sollen, so oft die Unterschiede

$$T' - T'' \text{ und } T_1 - T_2$$

gleich sind, auch einerseits die Unterschiede

$$X' - X'' \text{ und } X_1 - X_2$$

und andererseits die Verhältnisse

$$Y' : Y'' \text{ und } Y_1 : Y_2$$

gleich sein; nemlich so oft

$$T' - T'' = T_1 - T_2$$

ist, so soll auch einerseits

$$X' - X'' = X_1 - X_2$$

und andererseits

$$Y' : Y'' = Y_1 : Y_2$$

sein.

2) Betrachtung *zweier* zusammengehöriger Verä derlichen.

Man sieht leicht ein, dass die Betrachtung der Hilfsverände lichen T auch entbehrt, und Neper's Begriff von den Logarit men kürzer wie folgt dargestellt werden kann.

Seien X und Y zwei gleichzeitig veränderliche Grössen, d sich stets in einerlei Sinn abändern, fortwährend wachsen od

Digitized by Google

fortwährend abnehmen, nicht aber bald wachsen bald abnehmen, und zwar dermassen, dass während die eine Veränderliche X gleichförmig — um gleich viel, um gleiche Unterschiede — sich ändert, die andere Veränderliche Y gleichmässig (verhältnissgleich) — in gleichen Verhältnissen — sich ändere.

Sei nemlich

$$X', \; X''$$

ein Paar und

$$X_1, \; X_2$$

ein anderes Paar Werthe der Veränderlichen X, und dazu

$$Y', \; Y''$$

das dem ersten Paare, und

$$Y_1, \; Y_2$$

das dem zweiten Paare zugehörige Paar Werthe der anderen Veränderlichen Y; so soll, so oft

$$X' - X'' = X_1 - X_2$$

ist,

$$Y' : Y'' = Y_1 : Y_2$$

sein.

Hierauf stützt nun Neper die *Erklärung*: Jene *gleichförmig* veränderliche Grösse X heisst der *Logarithme* dieser *gleichmässig* veränderlichen Y; so wie auch jeder Werth von X der Logarithme des zugehörigen Werthes von Y.

3.

Fortsetzung. Messung der zusammengehörigen Veränderlichen.

Wenn nun auch das Wort ἀριθμος eigentlich eine Zahl bedeutet, so können gleichwohl für einen allgemeinsten Begriff der Logarithmen die Veränderlichen T, X, Y für ganz ungemessene stetige Grössen (Dinge) angesehen werden. Allein da diese Verallgemeinerung lediglich für die Theorie, nicht aber für die Rechnung mit Logarithmen von wesentlichem Vortheil ist; so bleibt es rathsam, diese Veränderlichen als gemessene und durch Zahlen ausgedrückte Grössen, oder vielmehr selbst als stetige Zahlen, zu betrachten. Neper stellt sie, nach dem Gebrauche seiner Zeit, insgesammt durch ganze Zahlen dar,

Digitized by Google

und insbesondere die Messeinheit durch eine dekadische Einheit, d. i. durch eine Potenz von 10, namentlich die Messeinheit der Y durch $10000000 = 10^7$.

4.

Fortsetzung. Neper's Grundbemessung der Logarithmen.

Sind nun was immer für zwei Paar Werthe einer veränderlichen Grösse Y, nemlich die Paare Y', Y'' und Y_1, Y_2 verhältnissgleich (proportional)

$$Y' : Y'' = Y_1 : Y_2;$$

und sind die zwei Paar Werthe der zugehörigen veränderlichen Grösse X, nemlich die Paare X', X'' und X_1, X_2 gleichunterschieden (äquidifferent),

$$X' - X'' = X_1 - X_2;$$

so ist, nach Neper's Erklärung, jeder dieser Werthe von X ein Logarithme des ihm angehörigen Werthes von Y, nemlich, wofern man diese Logarithmen durch Log andeutet,

$$X' = \mathrm{Log}\, Y', \quad X'' = \mathrm{Log}\, Y'', \ \ldots.$$

Da hiernach mit der Quotienten- oder Verhältnissgleichung (Proportion) durchaus gleichartiger Grössen

$$Y' : Y'' = Y_1 : Y_2$$

die Unterschiedsgleichung ihrer Logarithmen

$$\mathrm{Log}\, Y' - \mathrm{Log}\, Y'' = \mathrm{Log}\, Y_1 - \mathrm{Log}\, Y_2$$

verbunden ist; so kann man dieselbe Erklärung auch durch den Grundlehrsatz aussprechen:

Wenn zwei Paar durchweg gleichartige Grössen proportional sind, so sind ihre Logarithmen gleichunterschieden. (Vergl. oben Cap. II. prop. 1.)

Neper bemass demnach seine Logarithmen dergestalt, dass so oft zwei Paar Grössen eine Proportion bilden, die ihnen zugehörigen Logarithmen (in der nemlichen Ordnung von einander abgezogen) gleiche Unterschiede geben.

Wo daher Theilung durch eine Grösse stattfindet, da muss Abziehung ihres Logarithmen eintreten.

Da in einer Proportion, deren Glieder insgesammt gleichartig sind, das Product der äusseren Glieder jenem der inneren dann gleich ist, wenn diese Glieder lauter Zahlen sind; so erhält

man, wenn man diese Bedingungen hier gelten lässt, einerseits die Productengleichung von Zahlen

$$Y'Y_2 = Y''Y_1,$$

und andererseits die Summengleichung von Logarithmen

$$\mathrm{Log}\,Y' + \mathrm{Log}\,Y_2 = \mathrm{Log}\,Y'' + \mathrm{Log}\,Y_1.$$

Neper bemass daher seine Logarithmen auch so, dass so oft irgend zwei Paar Zahlen, mit einander multiplicirt, zwei gleiche Producte geben, auch ihre Logarithmen paarweis addirt, zwei gleiche Summen geben.

Wo demnach Multiplication durch eine Zahl statt findet da tritt Addition ihres Logarithmen ein.

Da sowohl in jeder Verhältnissgleichung, als auch in jeder Unterschiedsgleichung, jedwedes der zwei Paar Glieder durch die drei anderen bestimmt ist, so muss nach den letzten solchen Gleichungen zu jeder Zahl nur ein bestimmter Logarithme gehören. Daher müssen zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen gehören. Und eben so gilt dies nothwendig auch umgekehrt.

Suchen wir nun die allgemeinsten Ausdrücke der Logarithmen von den Ergebnissen der Multiplication, Division, Potenzirung und Wurzelziehung.

1) Ist

$$p = ab,$$

also

$$p : a = b : 1,$$

so ist

$$\mathrm{Log}p - \mathrm{Log}a = \mathrm{Log}b - \mathrm{Log}1,$$

$$\mathrm{Log}p = \mathrm{Log}a + \mathrm{Log}b - \mathrm{Log}1;$$

folglich

$$\mathrm{Log}(ab) = \mathrm{Log}a + \mathrm{Log}b - \mathrm{Log}\,1$$

oder symmetrisch

$$\mathrm{Log}(ab) - 1\,\mathrm{Log}1 = (\mathrm{Log}a - \mathrm{Log}1) + (\mathrm{Log}b - \mathrm{Log}1).$$

Aus Letzterem folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(abc) - \mathrm{Log}1 &= (\mathrm{Log}ab - \mathrm{Log}1) + \mathrm{Log}c - \mathrm{Log}1\\ &= (\mathrm{Log}a - \mathrm{Log}1) + (\mathrm{Log}b - \mathrm{Log}1) + \mathrm{Log}c - \mathrm{Log}1),\end{aligned}$$

$$\text{Log}(abcd) - \text{Log}1 = (\text{Log}abc - \text{Log}1) + (\text{Log}d - \text{Log}1)$$
$$= (\text{Log}a - \text{Log}1) + (\text{Log}b - \text{Log}1) + (\text{Log}c - \text{Log}1)$$
$$+ (\text{Log}d - \text{Log}1);$$

daher allgemein

$$\text{Log}(abcd...) - \text{Log}1 = (\text{Log}a - \text{Log}1) + (\text{Log}b - \text{Log}1) + (\text{Log}c - \text{Log}1)$$
$$+ (\text{Log}d - \text{Log}1) + ...$$

und hieraus ergiebt sich für den Logarithmen eines Productes von n Factoren der Ausdruck

$$\text{Log}(abcd...) = \text{Log}a + \text{Log}b + \text{Log}c + \text{Log}d + ... - (n-1)\text{Log}1.$$

2) Für den Quotienten

$$q = \frac{a}{b}$$

gilt die Proportion

$$q : 1 = a : b,$$

also ist

$$\text{Log}q - \text{Log}1 = \text{Log}a - \text{Log}b,$$

und sonach

$$\text{Log}q = \text{Log}a - \text{Log}b + \text{Log}1,$$

oder auch

$$\text{Log}\frac{a}{b} = \text{Log}a - \text{Log}b + \text{Log}1;$$

wofür man jedoch symmetrisch

$$\text{Log}\frac{a}{b} - \text{Log}1 = (\text{Log}a - \text{Log}1) - (\text{Log}b - \text{Log}1)$$

setzen kann.

3) Für die Potenz a^n, deren Exponent absolut und ganz ist, die also dem n factorigen Producte $aaa....$ gleichgilt, ist sonach

$$\text{Log}(a^n) - \text{Log}1 = n(\text{Log}a - \text{Log}1)$$

und hieraus

$$\text{Log}(a^n) = n\text{Log}a - (n-1)\text{Log}1.$$

Digitized by Google

4) Zur Potenz a^{-n} mit negativem ganzen Exponenten, die daher $=\frac{1}{a^n}$ ist, findet man

$$\begin{aligned}\text{Log}(a^{-n})-\text{Log}1 &= \text{Log}\frac{1}{a^n}-\text{Log}1\\ &=(\text{Log}1-\text{Log}1)-(\text{Log}a^n-\text{Log}1)\end{aligned}$$

oder

$$\text{Log}(a^{-n})-\text{Log}1=--n(\text{Log}a-\text{Log}1);$$

folglich gilt einerlei Bestimmungsweise, wie auch die Potenzexponenten algebraisch bezogen sein mögen.

5) Zur Wurzel $\sqrt[m]{a}=r$, bei der also $a=r^m$ ist und m positiv oder negativ ganz sein kann, findet man

$$\begin{aligned}\text{Log}a-\text{Log}1&=\text{Log}(r^m)-\text{Log}1\\ &=m(\text{Log}r-\text{Log}1),\end{aligned}$$

daher ist

$$\text{Log}\sqrt[m]{a}-\text{Log}1=\frac{\text{Log}a-\text{Log}1}{m}$$

und

$$\text{Log}\sqrt[m]{a}=\frac{\text{Log}a}{m}+(1-\frac{1}{m})\text{Log}1.$$

6) Zur Potenz $a^{\frac{n}{m}}$, welche der Wurzel $\sqrt[m]{a^n}$ gleichgilt, findet man

$$\begin{aligned}\text{Log}(a^{\frac{n}{m}})-\text{Log}1&=\text{Log}\sqrt[m]{a^n}-\text{Log}1\\ &=\frac{\text{Log}(a^n)-\text{Log}1}{m}=\frac{n(\text{Log}a-\text{Log}1)}{m};\end{aligned}$$

also

$$\text{Log}(a^{\frac{n}{m}})-\text{Log}1=\frac{n}{m}(\text{Log}a-\text{Log}1).$$

Mithin gilt die oben erkannte Bestimmungsweise für jeden rationalen Exponenten.

Aus allen diesen Ausdrücken erhellet nun, dass in ihnen durchweg der Log1 ein lästiger Begleiter ist.

Am bequemsten für das logarithmische Rechnen ist es, mit Neper der Messeinheit der Wege und Geschwindigkeiten die Null zum Logarithmen zu geben. (Cap. I. Admonitio). Allein heut zu Tage pflegt man die Messeinheit von Grössen nicht mehr wie ehedem, wo man alle Grössen möglichst genau durch ganze Zahlen darstellte, durch eine dekadische Einheit, wie Neper durch 10000000, sondern durch die Stamm-Einheit, d. i. durch 1, vorzustellen; weil man auch die wie immer gebrochenen und selbst irrationalen Zahlen zur Darstellung von Grössen benützt. Darum geben wir in der Neuzeit der Zahl 1 immer die 0 zum Logarithmen.

Danach leuchtet ein, dass aus den zwei so eben erwiesenen Sätzen die allbekannten 4 Hauptlehrsätze über die Ausdrücke der Logarithmen von Producten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln ohne Mühe hergeleitet werden können. Setzt man daher die Logarithmen als schon berechnet voraus, so kann man, gestützt auf obige Erklärung derselben, das in den Elementen der Algebra gewöhnlich allein in Anwendung kommende und von jenen Hauptlehrsätzen geleitete Rechnen mit Logarithmen vollständig abhandeln.

5.

Andere merkwürdige Betrachtung der Neper'schen Erklärung der Logarithmen.

I. Nimmt man bei den oben nach Neper besehenen zwei gleichzeitigen Bewegungen einen beliebigen Zeitabschnitt für die Einheit der Zeit an und setzt, dass der erstere bewegliche Punkt B in jeder Zeiteinheit den Weg k, der andere Punkt β aber in der ersten Zeiteinheit den Weg $\varkappa$ durchlaufe, und nimmt man an, dass (Taf. III. Fig. 3.) die beweglichen Punkte nach Verlauf der Zeit t beziehlich in M und μ, nach der Zeit $t+1$ aber in N und ν, folglich, wenn dt eine unendlich kleine Zunahme der Zeit t vorstellt, zur Zeit $t+dt$ in den Punkten M' und μ' sich befinden, von denen jener zwischen M und N, dieser zwischen μ und ν liegt; so wird, wenn die Abstände AM und $\mu\omega$ mit x und y bezeichnet werden,

$$MM'=dx \text{ und } \mu\mu'=-dy$$

sein. Gestattet man die Annahme, dass die kurzen Wege $MN=k$ und $\mu\nu$ von den beweglichen Punkten mit gleicher Geschwindigkeit oder gleichförmig durchlaufen werden, folglich, dass die zurückgelegten Wege den zugehörigen Zeiten proportional seien, so hat man

$$MM' : MN = dt : 1, \quad \mu\mu' : \mu\nu = dt : 1;$$

Digitized by Google

und nach dem Gesetze, welchen der zweite Punkt bei seiner Bewegung gehorcht (2. Def. Coroll.):

$$\mu\nu : \mu\omega = \alpha\gamma : \alpha\omega.$$

Setzt man noch den ursprünglichen Abstand $\alpha\omega = \varrho$; so erhält man

$$dx : k = dt : 1, \quad -dy : y = \varkappa dt : \varrho;$$

also

$$dx = k dt,$$

$$\frac{-dy}{y} = \frac{\varkappa}{\varrho} dt.$$

Theilt man, um dt zu eliminiren, jenen Ausdruck durch diesen, so hat man

$$dx : \frac{-dy}{y} = k : \frac{\varkappa}{\varrho},$$

und hieraus folgt

$$\frac{-dy}{y} = \frac{\varkappa}{\varrho} \cdot \frac{dx}{k}.$$

Schneller findet man diese Gleichung, wenn man erwägt, dass bei zwei gleichförmigen Bewegungen die während den nemlichen Zeiten zurückgelegten Wege einander (direct) proportional sind, nemlich dass

$$MM' : \mu\mu' = \dot{M}N : \mu\nu$$

oder

$$dx : -dy = k : \mu\nu$$

sich verhält. Denn theilt man diese Proportion durch die das Gesetz der Bewegung des zweiten Punktes ausdrückende

$$\mu\nu : \mu\omega = \alpha\gamma : \alpha\omega$$

oder

$$\mu\nu : y = \varkappa : \varrho,$$

so wird

$$dx : \frac{-dy}{y} = k : \frac{\varkappa}{\varrho},$$

also

$$\frac{-dy}{y} = \frac{\varkappa}{\varrho} \cdot \frac{dx}{k}.$$

Indem nun Neper dazu noch vermöge seiner Erklärung

$$\mathrm{Log} y = x$$

setzt; stellt er eigentlich zwischen den zwei zusammengehörigen Veränderlichen x, y nicht nur eine Differentialgleichung auf, sondern er integrirt sie auch, indem er die eine Veränderliche x als eine eigentliche Function der anderen y definirt und nachher eine Tafel der zusammengehörigen Werthe dieser Veränderlichen berechnet.

Anmerkung. Man sieht nebenbei hieraus, dass Neper nicht fern davon stand die Differentialrechnung zu entdecken.

II. Betrachten wir auch diese Darstellung vom allgemeineren analytischen Standpunkte, weil uns dies in der Folge von Nutzen sein wird; so seien zwei stetig veränderliche Zahlen x, y mit einander von einer dritten t abhängig, so zwar, dass, 1) wenn die Werthe t, t' um Δt, $\Delta t'$ (algebraisch) wachsen, auch x, x' um Δx, $\Delta x'$ wachsen, und y, y' um Δy, $\Delta y'$ auf $y+\Delta y$, $y'+\Delta y'$ anwachsen, und 2) dass, wenn $\Delta t = \Delta t'$ ist, einerseits auch $\Delta x = \Delta x'$ und andererseits

$$\frac{y+\Delta y}{y} = \frac{y'+\Delta y'}{y'} \text{ also auch } \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta y'}{y'}$$

sei.

Dann ist jedenfalls Δx proportional zu Δt, in Zeichen

$$\Delta x :: \Delta t;$$

und es lässt sich, wenigstens für genügend kleine Werthe von Δt und Δy, auch $\frac{\Delta y}{y}$ zu Δt proportional, d. i.

$$\frac{\Delta y}{y} :: \Delta t$$

annehmen. Danach ist auch

$$\Delta x :: \frac{\Delta y}{y} \quad \text{oder} \quad \Delta x : \frac{\Delta y}{y} = m,$$

und sofort

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{m} \Delta x,$$

wenn m eine constante Zahl bezeichnet.

Setzt man für die kleinsten Zunahmen Δx, Δy die entsprechenden Differentiale dx, dy; so erhält man — wie oben — die gleichgestaltete Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{y}=\frac{1}{m}dx,$$

als deren Integral Neper's Erklärung die Gleichung

$$\mathrm{Log}y=x$$

hinstellt.

Man lege die Null als Logarithmen der Zahl ϱ bei, man gebe nemlich $x=0$ zu $y=\varrho$ oder mache $\mathrm{Log}\varrho=0$. Sei noch $\Delta y=\eta$ und $\lim\eta=0$, so ist

$$\Delta x=m\frac{\Delta y}{y}=m\frac{\eta}{\varrho}.$$

Da nun auch

$$\mathrm{Log}(y+\Delta y)=x+\Delta x$$

ist, so findet man

$$\mathrm{Log}(y+\Delta y)-\mathrm{Log}y=\Delta x,$$

$$\mathrm{Log}(\varrho+\eta)-\mathrm{Log}\varrho=m\frac{\eta}{\varrho}$$

für $\lim\eta=0$; daher ist (gemäss Art. 4.)

$$\mathrm{Log}\frac{\varrho+\eta}{\varrho}-\mathrm{Log}1=m.\frac{\eta}{\varrho}=\mathrm{Log}\left(1+\frac{\eta}{\varrho}\right)-\mathrm{Log}1.$$

Setzt man abkürzend $\frac{\eta}{\varrho}=\varepsilon$, so ist auch $\lim\varepsilon=0$, und dafür

$$m=\frac{\mathrm{Log}(1+\varepsilon)-\mathrm{Log}1}{\varepsilon}=\mathrm{Log}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}-\mathrm{Log}1,$$

oder

$$m=\lim_{\varepsilon=0}\mathrm{Log}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}-\mathrm{Log}1.$$

Für seine eigenen Logarithmen nahm Neper die Anfangsgeschwindigkeiten k und $\varkappa$ der beweglichen Punkte B und β zwar gleich gross, jedoch entgegengesetzt, also $k=-\varkappa$ an. Danach ist bei ihm, weil allgemein

$$\frac{1}{m}=\frac{-\varkappa}{\varrho}.\frac{1}{k}$$

oder

$$m = k : \frac{-x}{\varrho} = \frac{k}{-x} \cdot \varrho$$

ist, $m = -\varrho$. Den anfänglichen Abstand $\alpha\omega = \varrho$ nahm Neper zur Längeneinheit, setzte ihn also $= 10000000 = 10^7$, so dass demnach für ihn $m = -10^7$ war.

Folglich ist bei Neper

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{10^7}\, dx$$

und dafür

$$\log.\text{neperiamus } y = x.$$

Aendert man aber dies dem neueren Gebrauche gemäss ab, indem man diese Längeneinheit $\varrho = 1$ setzt, so ist $m = -1$.

B.

Byrg's Erklärung der Logarithmen durch Verknüpfung einer arithmetischen und geometrischen Reihe.

6.

Byrg*) gab im Jahre 1620 eine Logarithmentafel heraus unter dem Titel:

Arithmetiſche vnd Geometriſche Progress-Tabulen, ſambt gründlichen vnterricht, wie ſolche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verſtanden werden ſol. Gedruckt, In der Alten Stadt Prag, bei Paul Seſſen, der Löblichen Universitet Buchdrucker, Im Jahre 1620.

Diese auf $7\frac{1}{2}$ Bogen in Klein-Quart gedruckte Tafeln, zu denen leider der „gründliche Unterricht“ fehlt, sind jetzt schon äusserst selten.**)

Die Benennung „Logarithmus“ gebraucht Byrg nicht.

Wer von diesen zwei Gelehrten, Neper und Byrg, früher die Logarithmen entdeckt habe, lässt sich nicht mit Sicherheit

---

*) Jobst Burgi oder Justus Byrg wurde geboren im Jahre 1552 zu Lichtensteig, einer kleinen Stadt in der Schweiz, Kanton St. Gallen an der Thur; und starb im Jahre 1633 zu Cassel.

**) Ich benützte das in der Bibliothek des k. k. Bombardier-Corps befindliche, gleichfalls aus Prof. Hantschl's Nachlass herstammende Exemplar.

entscheiden. Für Byrg sprechen folgende Nachrichten seiner Freunde und Verwandten.

Erstens äussert sich Kepler (in seiner Tabulae Rudolphinae, fol. Ulmae. 1627. Saurius. pag. 11. colum. 1. Praecepta. Cap. III.) über ihn wie folgt:

.... hoc inquam si expetis: ecce tibi apices logistices antiquae, qui praestant hoc longè commodiùs: qui etiam apices logistici Justo Byrgio multis annis ante editionem Neperianam, viam praeiverunt, ad hos ipsissimos logarithmos. Etsi homo cunctator et secretorum suorum custos, foetum in partu destituit, non ad usus publicos educavit.

Zweitens erzählt Montferrier (Dictionnaire des sciences mathématiques. 4. Paris. 1835. tom. 1., pag. 242.) in seiner Biographie Byrg's:

Benjamin Bramer .... dans un ouvrage qui a pour objet la description d'un instrument pour la perspective et le lévé des plans, s'exprime ainsi: „C'est sur ces principes que mon cher beau-frère et maitre Juste Byrge a calculé, il y a vingt ans“ (cet ouvrage paraissait à Cassel en 1630*)) „une belle table des progressions, avec leurs différences de 10 en 10, calculées à 9 chiffres, qu'il a aussi fait imprimer sans texte à Prague, en 1620; de sorte que l'invention des logarithmes n'est pas de Neper, mais a été fait par Juste Byrge longtemps avant.“**)

Nach dieser Aeusserung Bramer's hätte demnach Byrg seine Logarithmentafel entweder im Jahre 1602 oder 1610 berechnet, jenachdem Bramer sein Werk im Jahre 1622 oder 1630 drucken lassen hat. Da indessen auch Neper seine im Jahre 1614 herausgegebene Tafel schon einige Jahre früher berechnet haben konnte; so lässt sich über die Priorität der Entdeckung der Logarithmen nicht mit Bestimmtheit absprechen, sondern man muss muthmassen, dass Neper und Byrg gleichzeitig, jeder für sich, auf selbe verfallen seien.

7.

Byrg stellte eine arithmetische und geometrische Reihe dergestalt zusammen, dass gleichvielte Glieder von beiden zu ein-

*) Wahrscheinlich ist dies folgendes Werk: „Kurzer aber deutlicher Bericht vom Gebrauch des von Benj. Bramer erfundenen Proportional-Instrumentes; 20 Seiten, mit einer Abbildung des Instrumentes auf einem halben Bogen. 8. Cassel. 1622.“ (Siehe Rogg Handb. der mathem. Literatur. 8. Tübingen. 1830. S. 419.

**) Für die Geschichte der Lehre von den Logarithmen wäre es wünschenswerth, dass jemand, dem das angeführte Werk von Bramer zugängig ist, die hieher gehörige Stelle wortgetreu, so wie eine genaue Angabe der Jahrzahl des Druckes dieses Werkes durch das Archiv veröffentlichen möchte.

ander gehören, und erklärte dann jedes Glied der arithmetischen Reihe für den Logarithmus des eben so vielten Gliedes der geometrischen Reihe.

In derselben Weise verfuhren auch mehrere Nachfolger Neper's. So sagt schon Vlacq*) (ein Zeitgenosse Neper's und Briggs'):

Logarithmi sunt quantitatum continue proportionalium comites aequidifferentes.

Später Gaspar Schott in seinem Cursus Mathematicus. fol. Herbipoli, Schönwetter. 1661. lib. 27. pag. 589:

Logarithmi sunt numeri secundum proportionem arithmeticam quamcunque continue crescentes, aut decrescentes, adjuncti numeris ab unitate inchoatis et secundum proportionem geometricam continue crescentibus.

Diese Erklärung der Logarithmen geht aus jener von Neper sehr leicht hervor, wenn man, um sich eine Vorstellung von dem Gange der gleichzeitigen Aenderung der Zahlen und ihrer Logarithmen zu verschaffen, eine grössere Menge von Logarithmen um gleiche Unterschiede, folglich ihre Zahlen in gleichen Verhältnissen nach und nach wachsen lässt. Auf diese Weise erhält man eine arithmetische Reihe von Logarithmen,

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n, \ldots$$

und eine, Glied für Glied zugehörige geometrische Reihe von Zahlen

$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots y_n, \ldots$$

so dass

$$\mathrm{Log}y_0 = x_0,\ \mathrm{Log}y_1 = x_1,\ \ldots \mathrm{Log}y_n = x_n, \ldots$$

st.

Neper selbst bediente sich dieses Vorganges, um die Logarithmen zu berechnen.

Beide Reihen werden recurrent, jedes Glied aus dem früheren berechnet, die arithmetische der Logarithmen durch fortwährende Addition des beständigen Unterschiedes, die geometrische der Zahlen durch fortwährende Multiplication mit dem sich gleich bleibenden Quotienten.

Da zumeist für bestimmte Zahlen die zugehörigen Logarithmen zu suchen sind, so wird fast immer eine Einschaltung einer neuen Reihe zwischen zwei Gliedern der Hauptreihe erforderlich sein. Dann ist wieder jedes Glied der arithmetischen Schaltreihe der Logarithmus des eben so vielten Gliedes der geometrischen Schaltreihe.

---

*) wo?

Will man sonach eine solche Reihe mit allen ihren einschaltbaren als eine einzige stete fortschreitende Reihe derselben Art ansehen; so muss man ausser den ganzzahligen Stellenzeigern auch noch gebrochene, ja sogar, da manche Zahl strengstens genommen durch keinerlei solche Einschaltung völlig genau, sondern nur immer genauer und genauer, als eine fixe Grenze erreicht werden kann, auch irrationale Stellenzeiger zulassen.

Sei demnach n ein derartiger allgemeiner Stellenzeiger, nemlich positiv oder negativ, ganz, gebrochen oder irrational; so ist, wenn d die constante Differenz der arithmetischen Logarithmenreihe, und q den beständigen Quotienten der geometrischen Zahlenreihe vorstellt, bekanntlich ganz allgemein

$$x_n = x_0 + nd,$$

$$y_n = y_0 q^n.$$

Für die Theorie kann man, um nur ganzzahlige Stellenzeiger zu erhalten, den Unterschied d so klein und den Quotienten q schon selbst so nahe an 1 annehmen, dass jeder Logarithme so wie jede Zahl zwischen hinreichend enge Grenzen zu liegen komme.

So nahm Neper*) zum Anfangsgliede seiner geometrischen Reihe

$$y_0 = 10000000 = 10^7,$$

zum nächstfolgenden

$$y_1 = 9999999 = y_0 - 1,$$

daher zum Quotienten

$$q = a_1 : a_0 = a_0 - 1 : a_0 = 1 - \frac{1}{a_0} = 1 - \frac{1}{10^7};$$

ferner zur Differenz seiner arithmetischen Reihe $d = 1$, und zu ihrem Ausgangsgliede $x_0 = 0$. Byrg**) nahm zum Ausgangsgliede seiner geometrischen Reihe

$$y_0 = 100000000 = 10^8,$$

zum nächst folgenden

$$y_1 = 100010000,$$

daher zum Quotienten

$$q = 1{\cdot}0001 = 1 + \frac{1}{10^4};$$

---

*) Vergl. Klügel's math. Wörterb. III. Art. Logarithmus. num. 114.
**) Vergl. ebenda n. 106.

Digitized by Google

ferner zur Differenz seiner arithmetischen Reihe $d=10$, und z ihrem Ausgangsgliede $x_0=0$.

In dieser Weise zergliedert Bonaventura Cavalerio in sei ner Trigonometria. 4°. Bononiae. 1643. pag. 4. col. 1. num. XXV die Erklärung der Logarithmen.

Man sieht leicht ein, dass das Verständniss des hier erö terten Begriffes von Logarithmen durch die unausweichliche Ein schaltung in den Reihen und durch die gebrochenen und irratio nalen Stellenzeiger getrübt wird.

C.

Keplers Erklärung des Logarithmus als des Ab zählers der Vervielfachung eines Grundverhältnisses

8.

Kepler (in den Tabulae Rudolphinae Cap. III. pag. 11. col. 1. sieht den Logarithmus als Mass einer Proportion oder richtiger eines Verhältnisses an. Denn a. a. O. findet sich

die Marginalfrage:

Elementum logarithmorum minimum quid?

und die Textanwort:

... proportio, ejusque mensura, Logarithmus ....

Eben so leitet Nikolaus Mercator seine Logarithmotechni London 1667 et 68, pag. 1. mit folgenden Worten ein:

Logarithmus composito vocabulo dicitur a ratione e numero, quasi rationum numerus; id quod plane cum re con sentit. Est enim Logarithmus nihil aliud, quam numerus ra tiuncularum, contentarum in ratione, quam absolutus quisque (scil numerus) ad unitatem obtinet.

Diese Erklärung war nebst der vorigen lange sehr beliebt So giebt noch Klügel (Math. Wörterb. III. 8. 1808. Art. Loga rithmus) folgende Erklärung:

„Logarithmus ist die Zahl, welche anzeigt, das wie viel fache ein Verhältniss in Absicht auf ein anderes Grundverhält niss ist, wodurch alle Verhältnisse gemessen werden. Nemlich wenn das Grundverhältniss ist $a:b$, so ist ..... das $m$fache $a^m:b^m$, so wie auf der anderen Seite .... das n getheilte $a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}$; ferner noch das $m$fache und $n$getheilte $a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}$... Die Zahl $\frac{m}{n}$ ist der Logarithmus des Verhältnisses $a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}$ in Beziehung auf das $a:b$.

Auf diese Erklärung bezieht sich die Bildung des Kunstwortes, welches aus dem griechischen λογων ἀριθμος zusammengezogen ist, und einen Verhältnisszähler oder Verhältnissmesser bezeichnet."

Eben so erklärt Schmeisser in seinem Lehrbuch der reinen Mathesis, 1. Theil. Berlin. 1817. §. 41—44, S. 61—67.

Diese Erklärung der Logarithmen entspringt jedoch keineswegs unmittelbar aus der Neper'schen (*A*), sondern erst aus der von ihr abgeleiteten (*B*), welche die Glieder einer arithmetischen Reihe Logarithmen der gleichstelligen Glieder einer geometrischen nennt; zugleich ist sie sehr eingeschränkt. Denn in einer geometrischen Reihe ist das Verhältniss jedes Gliedes y_n zum Ausgangsgliede y_0 das so vielfache Verhältniss des ersten hinter diesem Ausgangsgliede stehenden Gliedes y_1 zum Ausgangsgliede y_0 selbst, nemlich

$$y_n : y_0 = (y_1 : y_0)^n .$$

Dazu nimmt man aber einschränkend $y_0 = 1$ und zur arithmetischen Reihe die der Stellenzahlen selbst, nemlich

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n,\ \ldots$$

und erklärt danach

$$n = \mathrm{Log}(y_n : y_0)$$

oder

$$n = \mathrm{Log}\, y_n .$$

Dieser ursprünglich nur für absolute ganzzahlige Stellenzeiger gültige Satz wird auch auf negative und, in Folge der Interpolation in beiden zusammengehörigen Reihen, auch auf gebrochene und irrationale Zahlen ausgedehnt.

Wenn man aber — wie es doch sein muss — von diesen Reihen absieht, so macht diese Erklärung der Logarithmen, als Abzähler oder Exponenten der Vervielfachungen eines gewissen Grundverhältnisses, bei einer für Anfänger fasslich und dennoch gründlich sein sollenden Zergliederung negativer, gebrochener und irrationaler solcher Abzähler sehr bedeutende Schwierigkeiten, über die man sich freilich bisher mit Leichtigkeit hinweggesetzt hat. Desswegen dürfte dieselbe entschieden für die am wenigsten geeignete zu erachten und darum ganz zu verlassen sein.

9.

Noch benütze ich die Gelegenheit, die eigentliche ursprüngliche Bedeutung des Wortes „Logarithmus" hier gründlicher als bisher geschehen zu erforschen. Dass die von Mercator (1667), Gilbert (1776), Klügel (1808), Schmeisser (1817) u. v. a. angegebene, und gewöhnlich beliebte, äls ἀριθμος των λογων,

Digitized by Google

Menge der Verhältnisse, keineswegs die richtige sei, wird aus folgenden Gründen einleuchten.

1. Wer über die genaue etimologische Bedeutung dieses Wortes vollen Aufschluss geben kann, ist einzig und allein Neper, da er es der Erste und zwar zum ersten Male in seinem Originalwerke vom Jahre 1614 auf der vierten Seite gebraucht und höchst wahrscheinlich dessen Schöpfer ist. Leider analysirt und interpretirt er es nicht selbst.

2. Nun gebraucht aber Neper nirgends diesen Begriff des Logarithmen als Abzählers von Vielfachen eines Verhältnisses; ja er vermochte gar nicht seinen so allgemeinen Begriff mit diesem eingeschränkten zu vertauschen; und

3. aus seinem eigenen Begriffe kann dieser partikuläre unmittelbar und nicht ohne sichtlichen Zwang hergeleitet werden.

Um also die richtige Bedeutung aufzudecken, muss man jene Stellen in Nepers Originalwerk hervorheben, welche die allgemeinsten und Grundeigenschaften der Logarithmen besprechen. Nun giebt er

1. in der Einleitung zu diesem Werke Aufschluss über Anlass und Zweck der Entdeckung der Logarithmen, den ich daher, weil er auch sonst lesenswerth ist, hier wortgetreu vollständig mittheile.

Quum nihil sit ... mathematicae praxi tam molestum, quodque Logistas (die Rechner) magis remoretur, ac retardet, quam magnorum numerorum multiplicationes, partitiones, quadrataeque ae cubicae (scil. radicis) extractiones, quae praeter prolixitatis taedium, lubricis etiam erroribus plurimum sunt obnoxiae: coepi igitur animo revolvere, qua arte certa et expedita possem dicta impedimenta amoliri. Multis subinde in hunc finem perpensis, nonnulla tandem inveni praeclara compendia (Abkürzungen) alibi fortasse tractanda: verum inter omnia nullum hoc utilius, quod una cum multiplicationibus, partitionibus, et radicum extractionibus arduis et prolixis, ipsos etiam numeros multiplicandos, dividendos, et in radices resolvendos, ab opere rejicit, et eorum loco alios substituit numeros, qui illorum munere fungantur per solas additiones, subtractiones, bipartitiones et tripartitiones. Quod quidem arcanum cum .... sit, quo communius, eo melius: in publicum mathematicorum usum propalare libuit.

Von da an gebraucht Neper das Wort Logarithmus erst in Cap. 1. Defin. 6. pag. 4.

2. Neper nennt in seiner Logarithmorum Canonis Constructio, 1619, die eigentlich in Rechnung zu bringenden Zahlen numeri naturales, dagegen ihre Logarithmen numeri artificiales. (Vergl. auch Karsten Lehrbegriff der gesammten Mathematik. 8. 2. Aufl. II. Thl. 1. Abth. Greifswald. 1786. S. 242.).

Nach seiner Ansicht sind demnach Logarithmen gewisse künstlich geschaffene Zahlen, welche als leichter verwendbare

Substituten (Stell- und Amtsvertreter) anderer in manche schwierige Rechnungen eigentlich aufzunehmender Zahlen dienen.

3. Nun bedeutet in dem zusammengesetzten Worte λογαριθμος das Grundwort ἀριθμος Anzahl oder allgemeine Zahl, numerus, oder auch Rang, Werth, wie homo nullo numero, oder Mass, mensura, wie in ὁδου ἀριθμος des Weges Mass; die Bestimmsilbe λογ kann aber entweder von ὁ λογος oder von λογιστικος herstammen. Die nach unserer Erörterung hier passlichen Bedeutungen von λογος sind aber nur Rechnung, Anschlag, Schätzung oder Rücksicht wie in λογον ἐχειν τινος, rationem habere alicujus rei, Rücksicht nehmen auf etwas, keineswegs aber Proportion oder Verhältniss; so dass jenes Wort eigentlich ἀριθμος του λογου Rechnungszahl, Rechnungs- oder Schätzungswerth oder -Rang, oder ἀριθμος λογον ἐιχων τινος ἀλλου eine auf eine gewisse andere (Zahl) Rücksicht oder Bezug nehmende Zahl, Bezugszahl bedeutet. Das Beiwort λογιστικος war zu Neper's Zeit sehr üblich, wie man aus Kepler's Tab. Rudolphinae in den Ausdrücken numeri, apices logistici ersieht; es bedeutet zum Rechnen gehörig oder dienlich; daher würde die zu erforschende Benennung eigentlich ἀριθμος λογιστικος, numerus logisticus, zum Rechnen dienliche (verwendbare) Zahl andeuten. (Vrgl. Fr. W. Riemer griech.-deutsches Wörterb. Lex. 8. 1825. Jena; M. J. A. E. Schmidt deutsch-griech. Handwörterb. 12. Leipzig. Tauchnitz. 1832. „Rücksicht"; J. G. Schneider griech.-deutsches Wörterb. 4. 3. Aufl. Leipzig, 1819; Scheller, lat.-deutsches Lexicon in 3 Bdn., 2. Aufl. 8. Leipzig. 1788., II. 3998.).

Nach dieser Beweisführung halte ich dafür, dass das Wort λογαριθμος im Sinne seines Schöpfers mit Rechnungszahl, Bezugszahl, Rechnungs- oder Schätzungswerth oder -Rang (einer anderen Zahl) zu verdeutschen sei.

D.

Die seit *Euler* übliche Erklärung der Logarithmen als Exponenten von Potenzen eines bestimmten Potentiands.

10.

In einem sistematischen Lehrvortrage der Algebra müssen in der Lehre vom Potenziren zuerst absolute ganze die 1 übersteigende Exponenten und darauf die absoluten Exponenten 1 und 0, später die negativen aber noch immer ganzen Exponenten erforscht werden. Danach erfolgt der erste Rückschritt vom Potenziren, das Radiciren, nemlich die Rückbestimmung des gebrauchten Potentiands. Im Verlauf dieser Untersuchung wird man auf Potenzen nach gebrochenen und irrationalen Exponenten geleitet. Nachdem man so den Potenzexponenten in beiderlei Aggregrationsbeziehungen und von jederlei Zahlform erhalten, also der veränderliche Potenzexponent stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen

kann; erfolgt der andere Rückschritt vom Potenziren auf das zweite Potenzirungselement, den Exponenten, der nun den Namen „Logarithmus“ annimmt.

Wenn nemlich

$$b^x = y$$

ist, so ist x der Logarithmus von y für die Grundzahl b, in Zeichen

$$x = \overset{b}{\log} y.$$

Diesen folgerechten Gang scheint zuerst Euler (Vollständige Anleitung zur Algebra. 2 Thle. 8. Petersburg. 1770; herausgegeben von J. Ph. Grüson. 8. Berlin. 1796. im 1. Theil. §. 219 und 220. S. 107.) gezeichnet zu haben.

Diese Art der Logarithmen ist jedoch nicht bloss eingeschränkter als jene Neper's und Byrg's, weil jedenfalls ihr $\log 1 = 0$ ist, sondern auch schwieriger im Verständniss von Anfängern, weil vorerst das Potenziren nach gebrochenen und irrationalen Exponenten gelehrt worden sein muss. Indess passt sie allein streng in das wissenschaftliche Sistem der sieben Grundrechnungen der Algebra, und kann daher in dieser Lehre heut zu Tage auch blos allein aufrecht erhalten werden.

11.

Auf diesen Euler'schen Begriff des Logarithmen lassen sich die früher erörterten älteren zurückleiten.

1. Bei Neper wächst der Logarithme x mit der Hilfsveränderlichen t gleichförmig, während die Zahl y in gleichem Verhältnisse wächst. Sei nun für

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0,$$

für

$$t = 1, \quad x = x_1, \quad y = y_1.$$

Während also t von 0 bis 1 um 1 wächst, steigt

$$x \text{ von } x_0 \text{ bis } x_1 \text{ um } x_1 - x_0,$$

und

$$y \text{ von } y_0 \text{ bis } y_1 \text{ in dem Verhältnisse } \frac{y_1}{y_0}.$$

Während dagegen überhaupt t von 0 bis t um t wächst, steigt

$$x \text{ von } x_0 \text{ bis } x \text{ um } x - x_0,$$

und

y von y_0 bis y in dem Verhältnisse $\frac{y}{y_0}$.

Weil aber mit gleichen Zunahmen von t auch gleiche Zunahmen von x und gleiche Verhältnisse von y verbunden sind; so muss der Zunahme von t die Zunahme von x und die Zunahme der Steigerungs- (Vervielfachungs-) Zahl n des Verhältnisses $\frac{y}{y_0}$ proportional sein, nemlich

$$x-x_0 : x_1-x_0 = t-0 : 1-0 = t : 1,$$

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^n$$

und

$$n-0 : 1-0 = t-0 : 1-0$$

oder

$$n : 1 = t : 1.$$

Daraus folgt

$$n = t = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, \frac{y}{y_0} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}.$$

Anstatt der vier Constanten x_0, x_1, y_0, y_1 lassen sich andere einführen. Sei 0 der Logarithme von ϱ, und β der Logarithme von b, dann ist zunächst für $x=0$ und $y=\varrho$

$$\frac{\varrho}{y_0} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{-x_0}{x_1-x_0}},$$

und wenn man dadurch die frühere Gleichung theilt,

$$\frac{y}{\varrho} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{x}{x_1-x_0}};$$

nachher ist für $x=\beta$ und $y=b$

$$\frac{b}{\varrho} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{\beta}{x_1-x_0}},$$

folglich, wenn man nach $\frac{x}{\beta}$ potenzirt,

$$\frac{y}{\varrho} = \left(\frac{b}{\varrho}\right)^{\frac{x}{\beta}}.$$

Daher ist $\frac{x}{\beta}$ der Logarithme von $\frac{y}{\varrho}$ für die Grundzahl $\frac{b}{\varrho}$.

Macht man wie jetzt üblich $\varrho=1$ und $\beta=1$, also $\mathrm{Log}1=0$, und $\mathrm{Log}b=1$, so ist

$$y=b^x,$$

also

$$x=\overset{b}{\log}y.$$

2. Bei der nach Neper und Byrg vorzunehmenden Zusammenstellung einer arithmetischen und geometrischen Reihe gibt von den zwei hiefür giltigen Gleichungen (aus *B*)

$$x_n=x_0+nd, \quad y_n=y_0q^n$$

die erste

$$n=\frac{x_n-x_0}{d},$$

daher die andere

$$y_n=y_0q^{\frac{x_n-x_0}{d}}.$$

Hebt die arithmetische Logarithmenreihe mit 0, die geometrische Logarithmandenreihe aber mit ϱ an, d. h. ist $x_0=0$ und $y_0=\varrho$, folglich $0=\mathrm{Log}\varrho$; so ist

$$y_n=\varrho q^{\frac{x_n}{d}}.$$

Gehört dann β als Logarithme zu b, ist nemlich $x_n=\beta$ und $y_n=b$, so ist

$$b=q^{\frac{\beta}{d}},$$

daher

$$\frac{y_n}{\varrho}=\left(\frac{b}{\varrho}\right)^{\frac{x_n}{\beta}}.$$

Mithin ist $\frac{x_n}{\beta}$ der Logarithme von $\frac{y_n}{\varrho}$ für die Grundzahl $\frac{b}{\varrho}$.

Macht man wie üblich $\varrho=1$ und $\beta=1$, also $\mathrm{Log}1=0$ und $\mathrm{Log}b=1$, so ist

$$y_n=b^{x_n},$$

also

$$x_n = \overset{b}{\log} y_n .$$

3. Nach Kepler's Darstellung der Logarithmen hat man (in *C*) die Gleichungen

$$\frac{y_n}{y_0} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^n, \quad n = \mathrm{Log} \cdot \frac{y_n}{y_0};$$

mithin ist sogleich nach Euler n der Logarithme von $\frac{y_n}{y_0}$ für die Grundzahl $\frac{y_1}{y_0}$.

Gewöhnlich macht man $y_0 = 1$, also $0 = \mathrm{Log} 1$, dann ist

$$y_n = y_1^n,$$

also

$$n = \overset{y_1}{\log} y_n .$$

12.

Rückblick auf die bisherigen Erklärungen des Logarithmus.

Ehrendenkmal Neper's.

Vergleicht man die bisher aufgestellten Erklärungen der Logarithmen, so erkennt man leicht folgende Vorzüge der nach meiner Weise dargestellten Neper'schen Erklärung vor den übrigen.

1. Die mit einander zu Verbindenden stetig Veränderlichen T, X, Y, d. i. die Hilfsveränderliche T, der Logarithmus X, und der Logarithmand Y, brauchen nicht eben neue Zahlen zu seiu, sondern sie können auch ungemessene stetige Grössen jeglicher Art, als: Strecken, Bogen, Winkel, Flächen, Körperräume, Kräfte, Gewichte, Zeiten u. s. w. seiu, so dass also der Logarithme das Schätzungsmass oder der Rechnungswerth des Logarithmands ist.

Bringt auch diese Allgemeinheit keinen erheblichen Vortheil für die zumeist ausgebildete und beachtete Anwendung der Logarithmen auf das Ausrechnen gewisser besonderer Zahlen; so bleibt sie gleichwohl für die allgemeine Theorie der Logarithmen höchst wichtig, wenn man diese — was doch auch von wissenschaftlichem Werthe ist — speculativ weiter verfolgen will.

2. Neper's Erklärung lässt schon für sich selbst bei dem Logarithmus, wenn er als Zahlwerth einer stetig veränderlichen Grösse, oder als Zahl im weitesten Sinne, betrachtet wird, beide algebraische Beziehungen, die negative eben so wohl als die positive, und jedwede Zahlform, die ganze, gebrochene und irrationale (!) zu; während alle anderen Erklärungen diese unerlässliche Eigenschaft erst mühsam und, Anfängern nur sehr schwer fasslich, nachweisen müssen.

3. Dieselbe Erklärung lässt bei der Zusammenstellung der das logarithmische Sistem bestimmenden Hauptwerthe des Logarithmands und Logarithmus freie Hand; nach ihr kann man die Null jeder Grösse als Logarithme zuweisen, oder man kann das Verhältniss der gleichzeitigen kleinsten Aenderungen des Logarithmands und Logarithmus beliebig festsetzen.

4. Sie enthält — was für die Grundlehre der Differentialrechnung bedeutsam ist — in sich auch sogleich den Ausdruck des Differentials des Logarithmen, da sie eigentlich das Integral einer Differentialgleichung ausspricht.

5. Von Neper's Erklärung ist die Byrg'ische und Vlacq'ische, so wie von dieser die Kepler'ische nur eine Specialität, blos die Euler'ische hat vor ihr den Vorzug, in dem sistematischen Lehrgebäude der Algebra den Schluss der rückschreitenden Rechnungen vom Potenziren zu machen.

Auf solche Weise glaube ich denn, durch Zurückleitung der Neper'schen Erklärung des Logarithmus auf ihre eigentliche rein analytische Bedeutung, die Gründe ihrer Merkwürdigkeit (num. 2.) dargelegt, und durch die Hervorhebung ihrer bisher nicht geahneten Vollkommenheiten und Vorzüge dem genialen Geiste des Entdeckers der so äusserst nützlichen Logarithmen ein hoch ehrendes Denkmal gestellt zu haben.

E.

Die von mir selbst erdachte Erklärung der Logarithmen.

13.

Bei einer elementar-arithmetischen Darstellung der Lehre von den Logarithmen, vornehmlich für Schüler höherer Volks- und Bürgerschulen, und überhaupt für jene Praktiker, welche nicht die Algebra erlernen, denen aber gleichwohl die Kenntniss der Logarithmen für ihre vielerhand Zifferrechnungen von ungemeinem Nutzen sein kann, bleiben alle bisher gegebenen Begriffe vom Logarithmen äusserst schwer zu erfassen, und daher solchen Rechnern diese so höchst nützliche Lehre unzugänglich. Darum erlaube ich mir, hier einen den Zweck, leichte und vollständige

Verständlichkeit, besonders wo es nur auf Anwendung der Logarithmen im Zifferrechnen ankommt, vollkommen erreichenden Begriff der Logarithmen öffentlich mitzutheilen, den ich bereits in den Jahren 1826—28 erdacht, und bei Privat-Unterricht mit dem grössten Vortheil benützt habe, und den auch im Jahre 1846 der damalige Gymnasial-Professor, Herr Johann Scholz zu Tarnow, mit mehreren Freiwilligen aus seinen Schülern der vierten Grammatikal-Klasse, als ganz genügend erprobt hat.*)

14.

Unentbehrlich zum wahren Verständniss dieser Erklärung der Logarithmen ist jedoch folgende einleitende Erörterung.

Die Beschwerlichkeiten, mit denen das Rechnen oberhalb des Aggregirens (Addirens und Subtrahirens) zu kämpfen hat, waren Anlass zur Erfindung des Auskunftsmittels, anstatt mit den gegebenen Zahlen selbst jene beschwerlichen Rechnungen zu führen, lieber mit gewissen Hilfszahlen einfacher und leichter zu rechnen, die man Logarithmen nannte — was etwa so viel als Beziehungs- oder Bezugszahl heissen mag — und welche man als Stellvertreter oder Zeiger derjenigen Zahlen, denen sie zugehören, ansehen kann.

Nothwendig muss aber hiezu bedungen werden, dass jede Zahl nur einen einzigen ihr ausschliesslich angehörigen Logarithmen besitze und daher auch umgekehrt jeder Logarithme nur einer einzigen Zahl zugehöre; damit Zahl und Zeiger (Logarithmus) mit völliger Bestimmtheit auf einander hinweisen.

Man will demnach zuvörderst anstatt jeder in Rechnung zu bringenden Zahl ihren selbsteigenen Stellvertreter (Logarithmen) nehmen, sonach mit diesen Stellvertretern auf eine passliche bequemere Weise rechnen, um den Stellvertreter (Logarithmen) der zu suchenden Zahl zu finden und endlich wieder zu diesem die angehörige Zahl bestimmen, die dann nothwendig das verlangte Rechnungsergebniss sein muss.

Rücksichtlich der erwähnten mit den Logarithmen vorzunehmenden Rechnungen, gibt die Wahrnehmung, dass mehrere mit einander zu multiplicirende Zahlen (Factoren) in jeglicher Ordnung dasselbe Product liefern, an die Hand, dass auch die mit den Stellvertretern (Logarithmen) der Factoren auszuführende Rechnung die Ordnung dieser Stellvertreter (Logarithmen) der

---

*) Ich hatte ihm zu diesem ausserordentlichen Unterrichte eine Abschrift meiner vom 27. Jänner bis 22. Mai 1846 verfassten Schrift überlassen, welche gegenwärtig unter dem Titel: „Elementarlehre von den Logarithmen, auf einen neuen verständlicheren und umfassenderen Begriff dieser Hilfszahlen gegründet" im Verlage der hiesigen Buchhandlung J. G. Calve (Inhaber F. Tempsky) erscheint.

Digitized by Google

Willkür überlassen müsse. Von den zwei, leichter als die Multiplication ausführbaren, Rechnungen — der Addition und Subtraction — gestattet jedoch nur die Addition eine solche Freiheit in der Anordnung ihrer Elemente (Daten). Mithin muss man folgende Grundeigenschaft von den Logarithmen fordern:

„So oft mehrere Zahlen mit einander zu multipliciren sind, müssen ihre Logarithmen addirt werden."

Danach stelle ich nun folgende Erklärung der Logarithmen auf:

Logarithmen von Zahlen sind gewisse nach diesen Zahlen dergestalt bemessene Hilfszahlen, dass der Logarithmus des Productes beliebig vieler und was immer für welcher Zahlen die Summe der Logarithmen dieser Zahlen (Factoren) ist.

15.

In lehrender Form ausgesprochen verwandelt sich diese Erklärung in folgenden Grundlehrsatz:

I. Der Logarithme jedes Productes ist die Summe der Logarithmen seiner Factoren.

$$\mathrm{Log}(abc\ldots) = \mathrm{Log}a + \mathrm{Log}b + \mathrm{Log}c + \ldots.$$

Daraus folgen nun sogleich auch die drei weiteren Hauptlehrsätze mit Logarithmen, nemlich

II. $$\mathrm{Log}\frac{a}{b} = \mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}b;$$

denn

$$\frac{a}{b} \times b = a,$$

also

$$\mathrm{Log}\frac{a}{b} + \mathrm{Log}b = \mathrm{Log}a$$

und

$$\mathrm{Log}\frac{a}{b} = \mathrm{Log}a - \mathrm{Log}b.$$

III. $$\mathrm{Log}(a^n) = n\mathrm{Log}a,$$

weil

$$\text{Log}(a^n) = \text{Log}(\overset{n}{aaa.....}) = \text{Log}a + \text{Log}a + \text{Log}a + \overset{n}{.....}$$
$$= n\,\text{Log}a$$

ist.

IV. $$\text{Log}\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\,\text{Log}a,$$

weil

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,$$

also

$$n\text{Log}\sqrt[n]{a} = \text{Log}a$$

und

$$\text{Log}\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\text{Log}a$$

ist.

Für den Zifferrechner genügt es, die beiden letzten Sätze nur für absolute ganze Exponenten n zu erweisen.

Ueberdies ersieht man leicht, dass

$$\text{Log}1 = 0$$

ist. Denn es ist

$$1 \,.\, a = a,$$

also

$$\text{Log}1 + \text{Log}a = \text{Log}a,$$

daher

$$\text{Log}1 = \text{Log}a - \text{Log}a = 0.$$

Um den Zahlen ihre mit dem Namen „Logarithmen" belegten Zeiger, der obigen Grundforderung gemäss, anzupassen, muss man mit irgend einer ausgewählten Zahl einen gewissen Logarithmen verknüpfen. Am zusagendsten findet man es, sich für eine Zahl zu entscheiden, der man den Logarithmen 1 beilegt. Diese Zahl nun, deren Logarithme 1 ist, wird die **Grundzahl** (basis) der nach dieser Annahme bemessenen und ein sogenanntes **Sistem** ausmachenden Logarithmen aller anderen Zahlen genannt.

Die Herleitung der Vergleichungen der Logarithmen aus jenen der Zahlen, so wie die Ueberzeugung von der Möglichkeit, zu

Digitized by Google

jeder Zahl ihren Logarithmen zu berechnen, gründet man sofort auf folgenden leicht zu rechtfertigenden Satz:

„Hat man was immer für zwei von 0 und 1 verschiedene Zahlen, so fällt jede der von der ersten an aufsteigenden Potenzen der einen Zahl oder ihres Umgekehrten entweder auf eine der von der nullten aus aufsteigenden Potenzen der anderen, oder zwischen zwei unmittelbar nach einander folgende solche Potenzen."

Ist daher a irgend eine Zahl, deren Logarithme in jenem Sisteme zu suchen ist, dessen Grundzahl b ist, so muss die $m$te Potenz entweder von a oder von $\frac{1}{a}$ zwischen die $n$te nnd $n+1$te Potenz von b fallen, in Zeichen

$$a^m = b^n \ldots . b^{n+1} \text{ oder } \left(\frac{1}{a}\right)^m = b^n \ldots . . b^{n+1}$$

sein.

Dann ist entweder

$$m\mathrm{Log}a = n \ldots n+1 \text{ oder } m(-\mathrm{Log}a) = n \ldots . n+1,$$

also entweder

$$\mathrm{Log}a = \frac{n}{m} \ldots \frac{n+1}{m} \quad \text{oder} \quad \mathrm{Log}a = -\frac{n}{m} \ldots . -\frac{n+1}{m}.$$

Man erkennt nun leicht, dass man sich hier auf gebahntem und bekanntem Wege befindet.

16.

Die Hauptvortheile meiner Erklärung der Logarithmen bestehen, wie nicht zu verkennen, darin, dass zu ihrem Verständniss schon die Kenntnisse des Potenzirens und Radicirens nach absoluten ganzen Exponenten hinreicht, und dass aus ihr sogleich ohne Beweis einleuchtet, dass die Logarithmen von beiderlei (positiver und negativer) algebraischer Beziehung und von jeder der dreierlei Zahlformen sein können. Ein Nebenvortheil derselben ist der, dass man leicht einsieht, dass, sobald ein logarithmisches Sistem der Grundforderung genügt, ein anderes gleichfalls genügendes sich ergibt, wenn man sämmtliche Logarithmen des ersteren durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt. Denn ist

$$\mathrm{Log}(abc\ldots.) = \mathrm{Log}a + \mathrm{Log}b + \mathrm{Log}c + \ldots.,$$

so ist auch

$$m\mathrm{Log}(abc\ldots.) = m\mathrm{Log}a + m\mathrm{Log}b + m\mathrm{Log}c + \ldots.$$

Bezeichnet man nun die m mal so grossen Logarithmen durch log, setzt man nemlich überhaupt

$$m\mathrm{Log}k = \log k;$$

so ist auch

$$\log(abc\ldots) = \log a + \log b + \log c + \ldots,$$

mithin genügen auch die $m$fachen also dem zweiten Systeme angehörigen Logarithmen.

Sind die Grundzahlen dieser Systeme B, b, also

$$\mathrm{Log}B = 1,\ \log b = 1;$$

so ist

$$m\mathrm{Log}B = m = \log B,\quad m\mathrm{Log}b = \log b = 1,$$

daher

$$m = \log B = \frac{1}{\mathrm{Log}b},\quad \frac{1}{m} = \frac{1}{\log B} = \mathrm{Log}b.$$

Zweiter Abschnitt.

Versuch einer naturgemässen und möglichst leicht fasslichen Herleitung der *natürlichen* Logarithmen.

17.

Einleitung.

Die Lehre von den natürlichen Logarithmen hat bisher in den Lehrbüchern der Algebra oder Analysis, meines Erachtens, weder die gebührende Stelle noch die richtige Behandlung erhalten. Gewöhnlich entwickelt man entweder in der, die Differentialrechnung einleitenden, sogenannten „Analysis des Endlichen“ oder in der Differentialrechnung selbst nach Aufstellung der Taylorschen Reihe, die Reihensumme

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

oder die Grenze der Potenz $(1+u)^{\frac{1}{u}}$ für die unendliche Abnahme der Veränderlichen u, und sagt dann, „jene Summe oder diese Grenze, d. i. die bestimmte jedoch irrationale Zahl 2·71828… …

die man zumeist durch den Buchstaben e bezeichnet, nehme man zur Grundzahl der sogenannten natürlichen Logarithmen;" oder man äussert sich wohl gar, „Neper habe sie zur Grundzahl seiner Logarithmen angenommen."

Ist es einem scharfsinnigen Schüler erlaubt seine Meinung frei zu äussern, so muss er wohl fragen, wie doch Neper oder sonst jemand auf diese sonderbare irrationale Grundzahl gerathen sei. Wie muss er aber erst staunen, wenn man ihn dagegen bescheidet, Neper habe von dem, was man heut zu Tage logarithmische Grundzahl nennt, gar nichts gewusst? Andererseits hat man ihm in der Algebra begreiflich gemacht, dass es wohl am natürlichsten sei, die als Grundzahl des allgemein üblichen dekadischen Ziffersystems verwendete Zahl 10 zur Grundzahl der Logarithmen zu nehmen. Deswegen dürfte er sicher fragen, warum man nicht lieber die dekadischen Logarithmen natürliche nennen wolle.

Eben so unhaltbar ist die Erklärung der natürlichen Logarithmen als jene, deren Modul $=1$ ist, wenn man den Begriff des Moduls nicht fest bestimmt; wie z. B. Pasquich (Anfangsgr. der gesammt. theoret. Mathematik. 4. J. Bd. Wien. 1812. S. 162. §. 780—782) in folgender Weise irrig gethan hat. „Für jede zwei Grundzahlen bleibt das Verhältniss der Logarithmen einer und derselben Zahl, G, welche diese auch werden möge, beständig. Daher sind immer zwei Zahlen, μ, π, denkbar, deren Verhältniss $\mu:\pi$ zu einander jenem beständigen Verhältnisse gleich ist; dergestalt, dass, wenn M, P die Logarithmen jener Zahl G sind, allemal $M:P=\mu:\pi$ sein muss. — Diese bestimmten Zahlen μ, π nun heissen die Moduln (!) beider logarithmischen Systeme. — Legt man sonach ein logarithmisches System dergestalt zu Grunde, dass sein Modul $=1$ sei; während der Modul jedes anderen Systemes irgend einer bestimmten Zahl m gleich sein soll: so wird jenes das natürliche System, und dieses ein künstliches genannt." — — Nun lässt sich aber jedes Verhältniss dadurch, dass man seine Glieder durch eines aus ihnen theilt, so umstalten, dass in ihm ein Glied $=1$ werde; es ist nemlich

$$\mu:\pi=1:\frac{\pi}{\mu}=\frac{\mu}{\pi}:1.$$

Mithin könnte man den Modul jedes logarithmischen Systems zu 1 machen, folglich jegliches System als das natürliche hinstellen.

Engländer und Franzosen nennen die natürlichen Logarithmen „hyperbolische oder Neper'sche"; sogar jetzt noch, wo doch schon erkannt ist, dass auch bei der Untersuchung anderer Linien, als der gleichaxigen Hyperbel, Logarithmen in Anwendung kommen, und alle Arten von Logarithmen durch Flächeninhalt hyperbolischer Sectoren sich darstellen lassen; so wie, dass Neper's Logarithmen nicht die Zahl e, sondern ihr Umgekehrtes $\frac{1}{e}$ zur Grundzahl haben. (Vergl. unten Art. 23.). Wollte man diejenigen Logarithmen, deren Grundzahl e ist, nach ihrem Entdecker be-

nennen; so müsste man sie nach dem Schweizer Byrg die Byrgischen nennen.

Will man nun nicht zu dem jederzeit misslichen Schaffen neuer Beinamen seine Zuflucht nehmen; so bleibt es wohl am gerathensten, die auf die Grundzahl e bezüglichen Logarithmen, wie üblich, die natürlichen zu nennen; aber auch zugleich ihre Ableitung so naturgemäss durchzuführen, dass diese Benennung passend und ungezwungen, also selbst natürlich, erscheine.

Dabei bleibt es jedoch im Interesse des wissenschaftlichen Systems der Algebra sowohl als der Differentialrechnung auch noch wünschenswerth, dass diese Ableitung, die schwierig zu begründende und der höheren Analysis unbedingt zu überlassende Lehre von den convergenten Reihen umgehend, bloss elementare Hilfsmittel benütze.

Das Folgende soll ein Versuch einer solchen Elementarlehre der natürlichen Logarithmen sein. Diese lässt sich zugleich theils nach den bereits erörterten verschiedenen Begriffen vom Logarithmen richten, theils aus gewissen Grenzverhältnissen, theils endlich aus der Lehre von den logarithmischen Proportionaltheilen schöpfen; wonach unsere Untertheilungen sich richten werden.

A.

Lehre von den natürlichen Logarithmen nach Neper's Begriff vom Logarithmus.

18.

Modul.

Nach Neper's Erklärung des Logarithmus fanden wir in Art. 5., wenn x einen Logarithmen, y den Logarithmand, dem er angehört, und Δx, Δy ihre beziehungsweisen Zunahmen, endlich m eine gewisse beständige Grösse aus der Gattung der x bezeichnet, für $\lim \Delta x = 0$ und $\lim \Delta y = 0$

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta y : y} = m .$$

Der Quotient des Zuwachses des Logarithmus durch den verhältnissmässigen Zuwachs des Logarithmands strebt demnach, bei unendlicher Verringerung des einen und anderen Zuwachses, ohne Ende einer fest stehenden Grenze m zu.

Diese Grenze m nun, nach der sich nothwendig das betreffende logarithmische System selbst modificirt, pflegt man den Modul dieses Logarithmensystems zu nennen.

Digitized by Google

Neper setzt, ausgehend von dem Logarithmand $y=\varrho$, dem er die Null als Logarithmen beilegt, $\Delta y=-\Delta x$, daher ist der Modul des Neper'schen Logarithmensystems $m=-\varrho$.

Führt man für Δx und Δy ihre ursprünglichen Bedeutungen $(x+\Delta x)-x$ oder $\mathrm{Log}(y+\Delta y)-\mathrm{Log}y$ und $(y+\Delta y)-y$ in obige Grenzgleichung ein, so lässt sich ihr auch die Form

$$\lim \frac{\mathrm{Log}(y+\Delta y)-\mathrm{Log}y}{(y+\Delta y)-y}=\frac{m}{y}$$

ertheilen Setzt man noch $y=\varrho$ und $\Delta y=\eta$, so ist auch

$$\lim_{\eta=0} \frac{\mathrm{Log}(\varrho+\eta)-\mathrm{Log}\varrho}{(\varrho+\eta)-\varrho}=\frac{m}{\varrho},$$

oder wegen $\mathrm{Log}\varrho=0$

$$\lim_{\eta=} \frac{\mathrm{Log}(\varrho+\eta)}{\eta}=\frac{m}{\varrho}.$$

19.

Einführung und Rechtfertigung der Benennung: „natürliche Logarithmen."

Gewiss ist es sehr angemessen,

1. die Null der Zahl 1 zum Logarithmen zu geben, also $\varrho=1$ zu wählen, weil dadurch in den allgemeinen Ausdrücken der Logarithmen von Producten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln, und sonach in allem Rechnen mit Logarithmen die bedeutendste Vereinfachung eintritt, (vergl. Art. 4.);

2. die Logarithmen mit den Logarithmanden zugleich wachsen zu lassen, folglich Δx und Δy gleichstimmig und dadurch den Modul m positiv zu machen, nicht aber die einen wachsen und die anderen abnehmen zu lassen, also Δx und Δy entgegengesetzt und dadurch den Modul negativ zu machen; denn im ersten Falle werden die Logarithmen der zumeist in Rechnung kommenden ganzen Zahlen positiv, im anderen aber widernatürlich negativ;

3. diese gleichstimmigen und gleichzeitigen Aenderungen Δx, Δy der Logarithmen x und der Logarithmande y am Ursprunge beider, wo nemlich der Logarithme Null und der Logarithmand $=\varrho$ ist, einander gleich, $\Delta x=\Delta y$, anzunehmen und dadurch den Modul

$$m=\lim \frac{\Delta x}{\Delta y:\varrho}=\varrho$$

zu machen, folglich, nachdem man (vermöge 1.) bereits $\varrho = 1$ gewählt hat, den Modul in 1 zu verwandeln.

Demgemäss ist es auch ganz passend, das so vorgerichtete Logarithmensystem, in welchem die Null der Logarithme von Eins und der Modul gleich Eins ist und die Logarithmen mit den Logarithmanden zugleich wachsen oder abnehmen, das natürliche und jeden in selbes gehörigen Logarithmen einen natürlichen (naturalis) zu nennen. Diesem entgegen nennt man jedes andere System, so wie jeden in dasselbe gehörigen Logarithmen künstlich (artificialis). Einen natürlichen Logarithmen bezeichnet man entweder durch log. nat. oder gewöhnlich nur ganz kurz durch l., einen künstlichen überhaupt durch log. artif.

20.

Möglichkeit der Berechnung des Logarithmen einer bestimmten Zahl in Bezug auf einen festgestellten Modul, und umgekehrt der Zahl zu einem gegebenen Logarithmen.

Seien nach Art. 4. mehrere in durchaus gleichem Verhältnisse fortschreitende Zahlen

$$y_0\ y_1\ y_2\ y_3\ \ldots\ y_n\ y_{n+1}\ \ldots$$

und die angehörigen um gleiche Unterschiede fortschreitenden Logarithmen

$$x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_n\ x_{n+1}\ \ldots;$$

sei ferner die Ausgangszahl $y_0 = \varrho$, der ihr zuständige Ausgangslogarithme $x_0 = 0$; endlich sei der Unterschied $y_1 - y_0 = \Delta y_0 = \eta$. Dann ist das sich gleich bleibende Verhältniss der Logarithmande

$$y_1 : y_0 = 1 + \frac{\eta}{\varrho},$$

und nach Art. 5. II. der durchweg gleiche Unterschied der Logarithmen

$$x_1 - x_0 = \Delta x_0 = m \frac{\Delta y_0}{y_0} = m \frac{\eta}{\varrho}.$$

Sohin hat man, weil die aufgestellte Reihe der Zahlen (Logarithmande) y geometrisch, die der entsprechenden Logarithmen x aber arithmetisch ist,

$$y_n = \varrho \left(1 + \frac{\eta}{\varrho}\right)^n, \quad y_{n+1} = \varrho \left(1 + \frac{\eta}{\varrho}\right)^{n+1};$$

Digitized by Google

$$x_n = n.m\frac{\eta}{\varrho}, \quad x_{n+1} = (n+1).m\frac{\eta}{\varrho}.$$

Sei nun y eine gewisse Zahl, x ihr Logarithme, so fällt entweder ausnahmsweise y mit einer der berechneten Zahlen, y_n, folglich x mit dem Logarithmen x_n zusammen; oder es liegt zumeist y zwischen y_n und y_{n+1}, folglich auch x zwischen x_n und x_{n+1}, was wir kurz durch

$$y = y_n \ldots . y_{n+1} \text{ und } x = x_n \ldots . x_{n+1}$$

andeuten wollen.

In jenem Ausnahmefalle ist

$$y = \varrho\left(1+\frac{\eta}{\varrho}\right)^n, \quad x = n.m\frac{\eta}{\varrho} = \mathrm{Log}y,$$

und wenn man den Ausdruck von $\frac{\eta}{\varrho}$ aus einer dieser Gleichungen in die andere substituirt, erfolgt

$$\mathrm{Log}y = m\left(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}}-1\right)n, \quad y = \varrho\left(1+\frac{\mathrm{Log}y}{mn}\right)^n.$$

In den gewöhnlichen Fällen aber bestimmen wir einmal aus den einschränkenden Grenzausdrücken

$$y = \varrho\left(1+\frac{\eta}{\varrho}\right)^n \ldots . \varrho\left(1+\frac{\eta}{\varrho}\right)^{n+1}$$

in umgekehrter Ordnung den Quotienten

$$\frac{\eta}{\varrho} = \sqrt[n+1]{\frac{y}{\varrho}}-1 \ldots . \sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}}-1$$

und setzen diese Grenzwerthe in die gleichstelligen Einschränkungsgrenzen

$$\mathrm{Log}y = x = m.n\frac{\eta}{\varrho} \ldots . m(n+1)\frac{\eta}{\varrho},$$

erhalten daher den Logarithmen

$$\mathrm{Log}y = m\left(\sqrt[n+1]{\frac{y}{\varrho}}-1\right)n \ldots . m\left(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}}-1\right)(n+1);$$

nachmalen bestimmen wir aus diesen Grenzausdrücken von Log$y$ in umgekehrter Ordnung den Quotienten

$$\frac{\eta}{\varrho} = \frac{\mathrm{Log}y}{m(n+1)} \ldots . \frac{\mathrm{Log}y}{mn},$$

und setzen ihn in die gleichvielten Einschränkungsgrenzen von y, erhalten demnach den Logarithmand

$$y=\varrho\left(1+\frac{\mathrm{Log}y}{m(n+1)}\right)^n \ldots\ldots \varrho\left(1+\frac{\mathrm{Log}y}{mn}\right)^{n+1}.$$

Soll die Berechnung der Logarithmen möglichst genau geschehen, so muss das Intervall der ursprünglichen einengenden Grenzen von $\mathrm{Log}y$, d. i. $m\frac{\eta}{\varrho}$, hinreichend klein, daher auch schon die Differenz η recht klein, mithin unendlich abnehmend, $\lim\eta=0$, angenommen werden. Dann muss aber für jeden endlichen Werth von $\mathrm{Log}y$ die Zahl

$$n=\frac{1}{\eta}.\frac{\varrho}{m}\mathrm{Log}y-1 \ldots\ldots \frac{1}{\eta}.\frac{\varrho}{m}\mathrm{Log}y$$

unendlich wachsen oder $\lim n=\infty$ sein. Führt man diese unerreichbaren Grenzen in obige Ausdrücke von $\mathrm{Log}y$ und y ein, so findet man die äussersten Grenzwerthe

$$\mathrm{Log}y=m.\lim_{n=\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}}-1\right)n,$$

$$y=\varrho.\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{\mathrm{Log}y}{mn}\right)^n.$$

Bezeichnet man das Umgekehrte von n mit ω, also $\frac{1}{n}=\omega$, so wird für $\lim n=\infty=\frac{1}{0}$ offenbar $\lim\omega=0$, daher ist auch

$$\mathrm{Log}y=m.\lim_{\omega=0}\frac{\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{\omega}-1}{\omega},$$

$$y=\varrho.\lim_{\omega=0}\left(1+\omega\frac{\mathrm{Log}y}{m}\right)^{\frac{1}{\omega}}.$$ *)

Für natürliche Logarithmen ist $\varrho=1$ und $m=\varrho=1$, daher hat man die einschränkenden Grenzausdrücke

$$\mathrm{l}y=(\sqrt[n+1]{y}-1)^n \ldots\ldots (\sqrt[n]{y}-1)^{n+1},$$

---

*) Von den hier gefundenen äquivalenten vier Grenzgleichungen ist demnach jede das Integral der im 1. Abschn. Art. 5. aufgestellten endlichen Differenzengleichung

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{1}{m}\Delta x.$$

$$y=\left(1+\frac{\mathfrak{l}y}{n+1}\right)^n \ldots\ldots \left(1+\frac{\mathfrak{l}y}{n}\right)^{n+1};$$

und die äussersten Grenzwerthe:

$$\mathfrak{l}y=\lim_{n=\infty}(\sqrt[n]{y}-1)^n=\lim_{\omega=0}\frac{y^{\omega}-1}{\omega},$$

$$y=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{\mathfrak{l}y}{n}\right)^n=\lim_{\omega=0}(1+\omega\mathfrak{l}y)^{\frac{1}{\omega}}.$$

In den jetzt gebräuchlichen Logarithmensystemen legt man durchweg der Zahl 1 die Null als Logarithmen bei, d. i. man setzt $\varrho=1$, dadurch wird

$$\mathrm{Log}y=m(\sqrt[n+1]{y}-1)n\ldots.m(\sqrt[n]{y}-1)(n+1),$$

$$y=\left(1+\frac{\mathrm{Log}y}{m(n+1)}\right)^n \ldots\ldots \left(1+\frac{\mathrm{Log}y}{mn}\right)^{n+1};$$

und vollständig

$$\mathrm{Log}y=m.\lim_{n=\infty}(\sqrt[n]{y}-1)n=m.\lim_{\omega=0}\frac{y^{\omega}-1}{\omega},$$

$$y=\lim_{n=\infty}.\left(1+\frac{\mathrm{Log}y}{mn}\right)^n=\lim_{\omega=0}\left(1+\omega\frac{\mathrm{Log}y}{m}\right)^{\frac{1}{\omega}}.$$

21.

Vergleichung der Logarithmen von einerlei Zahl in verschiedenen logarithmischen Systemen.

Gehören zur selben Zahl y in zwei logarithmischen Systemen, deren Moduln m und m' sind, die Logarithmen x und x', die wir durch $\mathrm{Log}y$ und $\log y$ unterscheiden wollen; so hat man nach Art 5., insofern die Aenderung Δy der sich gleichbleibenden Zahl y auf für die nemliche angenommen werden darf, sowohl

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{1}{m}\Delta x \text{ und } \mathrm{Log}y=x,$$

als auch

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{1}{m'}\Delta x \text{ und } \log y=x'.$$

Sofort ist

$$\frac{1}{m}\Delta x = \frac{1}{m'}\Delta x',$$

also auch, wenn man summirt, $\frac{x}{m} = \frac{x'}{m'} + \text{Const.}$ Sind nun die Logarithmen x und x' bei der nemlichen Zahl $\varrho = y$ zugleich Null, so ist Const. $= 0$, daher

$$\frac{x}{m} = \frac{x'}{m'},$$

oder

$$\frac{\mathrm{Log}y}{m} = \frac{\log y}{m'};$$

d. h. in zwei logarithmischen Systemen, welche beide derselben Zahl die Null als Logarithme beilegen, sind die Logarithmen von einerlei Zahl den Modulu dieser Systeme proportionirt.

Diese Proportionalität bestätigt auch die in Art. 20. gefundene Gleichung

$$\mathrm{Log}y = m \cdot \lim_{\omega=0} \frac{\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{\omega} - 1}{\omega}.$$

Denn ist in verschiedenen Systemen Null der Logarithme derselben Zahl ϱ, so muss für einerlei Zahl y die angedeutete Grenze dieselbe sein, danach ist Log$y$ proportional mit m.

Ist nun das eine System das natürliche, also $m' = 1$, und das andere ein künstliches, in welchem auch Log $1 = 0$ und der Modul m ist, so übergeht die vorletzte Gleichung in

$$\frac{\log.\mathrm{artif}.y}{m} = \mathrm{l}y$$

und hieraus folgt

$$\log.\mathrm{artif}.y = m.\mathrm{l}y.$$

Diese Gleichungen dienen zum Uebergang von künstlichen Logarithmen auf die natürlichen, und umgekehrt.

Es genügt demnach für jede Zahl y vorerst ihren natürlichen Logarithmen nach den Art. 20. aufgestellten Grenzausdrücken oder nach dem zwischen sie beide fallenden, folglich genäherten, Ausdrucke

$$\mathrm{l}y = (\sqrt[n]{y} - 1)^n,$$

wo $\doteq$ „genähert gleich“ bedeuten soll, zu berechnen. Diesem gemäss hat man aus der vorliegenden Zahl y eine sehr hohe Wurzel zu ziehen und ihren Ueberschuss über die 1 mit dem Wurzelexponenten zu multipliciren Das Product wird den natürlichen Logarithmen von y desto genauer ausdrücken, je grösser der Wurzelexponent ist. Am bequemsten rechnet man, wenn man für n eine Potenz von 2 annehmend sehr oft nach einander die zweite Wurzel zieht. — Erläuterungen und Beispiele findet man in Callet Tables de Logarithmes. pag. 11—15.

Will man jedoch mit dem natürlichen Logarithmensysteme eines vergleichen, in welchem der Zahl ϱ die Null als Logarithme zugeschrieben wird, so wird man mit Berücksichtigung des Art. 20. in dem Ausdrucke

$$ly = \lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{y} - 1)n$$

y in $\frac{y}{\varrho}$ verwandeln, wonach er in

$$l\frac{y}{\varrho} = \lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}} - 1)n$$

übergeht. Dadurch umstaltet sich die dortige Gleichung

$$\mathrm{Log}y = m\lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}} - 1)n$$

in die allgemeinste Vergleichung

$$\mathrm{Log}y = ml\frac{y}{\varrho},$$

der man dadurch, dass man y mit ϱy vertauscht, auch die Form

$$ly = \frac{1}{m}\mathrm{Log}\varrho y$$

zuweisen kann.

Diesen Vergleichungen zufolge erhält man für Neper's Logarithmen, bei denen, vermöge Art. 4. und 5., $m = -\varrho$ und $\varrho = 10^7$ ist, die Vergleichungen mit den natürlichen Logarithmen

$$\mathrm{log.nep.}y = -10^7 \mathrm{log.nat.}\frac{y}{10^7},$$

$$\mathrm{log.nat.}y = -\frac{1}{10^7}\mathrm{log.nep.}y10^7.$$

Digitized by Google

Aus der ersten Gleichung folgt auch

$$\text{log.nat.}\frac{y}{10^7} = -\frac{1}{10^7}\,\text{log.nep.}y,$$

und hierin liegt folgender Satz:

Schneidet man von den Neper'schen Logarithmen und von den Zahlen, zu denen sie gehören, 7 Decimalstellen ab, oder lässt man in der Neper'schen Logarithmentafel sowohl die Zahlen als auch ihre Logarithmen Zehnmilliontel zählen, und nimmt man noch die Logarithmen negativ, so übergehen sie in natürliche.

Würde man, wie es am angemessensten wäre, in Neper's Canon (Tafel) die ganzzahligen Logarithmen und Logarithmande als Zehnmilliontel lesen, folglich $\varrho = 10^7 : 10^7 = 1$ und $m = -\varrho = -1$ setzen, so wäre jeder solche Neper'sche Logarithme Log.nep.y $= -ly$, nemlich der entgegengesetzt beziehliche natürliche Logarithme des nemlichen Logarithmands.

22.

Grenzzahl e.

Der in Art. 18. gefundene Ausdruck des Moduls verwandelt sich in jedem logarithmischen Systeme, welches $\varrho = 1$ setzt, in

$$m = \lim_{\eta=0} \frac{\text{Log}(1+\eta)}{\eta}$$

und gibt sofort auch (Art. 4.)

$$m = \lim_{\eta=0} \text{Log}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}} = \text{Log}\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}.$$

Da nun m eine fixe Grenzzahl ist, und zufolge der im Art. 20. gepflogenen Untersuchung jeder reelle Logarithme x nur einer gewissen Zahl y zugehören kann, so muss auch

$$\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}$$

eine bestimmte Grenzzahl sein, welche, weil die Grenze der Veränderlichen η eine besondere Zahl ist, gleichfalls eine besondere Zahl sein muss und einem herrschenden Gebrauche zufolge mit e bezeichnet werden soll, so dass wir

$$\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}} = e$$

setzen. Dadurch wird

Digitized by Google

$$m = \mathrm{Log} e,$$

folglich kommt in jedem logarithmischen Systeme, wo $\mathrm{Log} 1 = 0$ ist, der Modul m mit dem Logarithmen der Grenzzahl e überein.

Insbesondere ist im natürlichen Logarithmensysteme $m = 1$, daher $le = 1$, d. h. der natürliche Logarithme der Grenzzahl e ist gleich 1.

Zur näherungsweisen Berechnung dieser Grenzzahl e dienen daher die in Art. 20. im natürlichen Systeme für den Logarithmand y aufgestellten einschränkenden Grenzausdrücke, wenn man daselbst $y = e$ und $ly = le = 1$ setzt. Danach wird

$$e = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Sucht man vorläufig nur mindestens die zwei engsten ganzzahligen Grenzen (Schranken) für die fragliche Grenzzahl e, so setze man allmälich

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$$

dann ist

$$e > 1{\cdot}5,\ 1{\cdot}7,\ 1{\cdot}9,\ 2{\cdot}07,\ \ldots\ldots$$

aber

$$< 4,\ 3{\cdot}4,\ 3{\cdot}1,\ 3{\cdot}05,\ 2{\cdot}9, \ldots\ldots;$$

mithin liegt e zwischen 2 und 3.

Für hohe Zahlen n ist die Verschiedenheit der Potentiande dieser Grenzpotenzen etwas unbequem, deshalb umsetzen wir in der untern Grenze n in $n-1$, wodurch wir denselben Potentiand wie in der oberen und sohin

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \ldots\ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

erhalten. Das Verhältniss dieser Grenzen ist $= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2}$ also nahe $= 1 + \frac{2}{n}$.

Wenn demnach n auch schon sehr gross ist, so beträgt die Fehlergrenze doch immer noch wenigstens $\frac{2}{n}$ des unteren Grenzwerthes von e, und da dieser selbst wieder mindestens 2 ist, so fällt diese Fehlergrenze nicht unter $\frac{4}{n}$.

Wählt man z. B. $n=1000$, so ist

$$e=(1{\cdot}001)^{1000-1}\ldots.(1{\cdot}001)^{1000+1}$$

und die Fehlergrenze geringstens 0·004. In der That findet man mit Hilfe der dekadischen Logarithmen $e=2{\cdot}7143\ldots.2{\cdot}7196$, also die Fehlergrenze $=0{\cdot}0056$, so dass man höchstens $e=2{\cdot}71\ldots.$ setzen darf.

Wenngleich die hier gezeigte Berechnungsweise der Grenzzahl e ein sehr ungenaues Ergebniss liefert, so genügt doch schon der von uns gegebene Nachweis der Möglichkeit einer beliebig zu verschärfenden, wenn auch äusserst schwer und lediglich in der Einbildung ausführbaren Berechnung derselben, weil der wirkliche Zifferbetrag dieser Zahl fast nie in den Zifferrechnungen der Analysis verwendet wird.

Führt man die Grenzzahl e in die im Art. 20. für $\mathrm{l}y$ gefundene allgemeine Grenzgleichung statt y ein, so erhält man den sehr folgenreichen Grenzausdruck

$$\lim_{\omega=0}\frac{e^{\omega}-1}{\omega}=1.$$

23.

Grundzahl eines logarithmischen Systemes und Berechnung derselben aus dessen Modul.

Was man heut zu Tage „Grundzahl eines Logarithmensystems“ nennt, kann in einem Systeme, wo man die Null einer anderen Zahl als der 1 zuweist, wie im Neper'schen Systeme, streng genommen gar nicht vorkommen. Denn will man allgemein jene Zahl b die Grundzahl eines Logarithmensystemes nennen, deren Logarithmus eine bestimmte ausgezeichnete Zahl β ist, so hat man nach Art. 11. 1.

$$\frac{y}{\varrho}=\left(\frac{b}{\varrho}\right)^{\frac{x}{\beta}},$$

welche Gleichung mit der, den gegenwärtigen oder Euler'schen Begriff vom Logarithmus begründenden

$$y=b^{x}$$

zwar ähnlich geformt ist, aber in sie doch nur übergehen kann, wenn man entweder sämmtliche Logarithmen x des Systemes durch β und gesammte Logarithmande y durch ϱ dividirt, oder $\varrho=1$ und $\beta=1$ wählt; dann aber hat man beide Male ein anderes logarithmisches System als das eigentlich betrachtete.

In der That stützte Neper sein Logarithmensystem nicht, wie viele Analysten vorgeben, auf eine bestimmte Grundzahl; er hat und benöthigt diesen Begriff gar nicht.

Da nun der ausgezeichnete Logarithme β der Grundzahl mannigfaltig gewählt werden kann, so würde die Grundzahl b selbst unbestimmt bleiben; indess wird sich doch im Verlauf unserer nächsten Untersuchung eine begründete Wahl von β treffen lassen.

Insofern in Neper's Systeme der Modul m festgestellt ist, frägt sich's nun, wie zu ihm allgemein die Grundzahl b gefunden werden könne.

Zur Beantwortung dieser Frage benützen wir das in Art. 20. allgemein gezeigte Verfahren, wie man zu jedem gegebenen Logarithmus x die ihr angehörige Zahl y berechnen könne, indem wir $x=\mathrm{Log}y=\beta$ und $y=b$ setzen. Dadurch erhalten wir für die Grundzahl die allgemeinen Ausdrücke

$$b=\varrho\left[1+\frac{\beta}{m(n+1)}\right]^n\ldots\varrho\left[1+\frac{\beta}{mn}\right]^n,$$

$$b=\varrho.\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{\beta}{mn}\right)^n=\varrho\,.\lim_{\omega=0}\left(1+\omega\frac{\beta}{m}\right)^{\frac{1}{\omega}}.$$

Anstatt des letzteren Grenzausdruckes lässt sich leicht die Grenzzahl e einführen. Denn setzt man

$$\omega\frac{\beta}{m}=\eta,$$

so ist

$$\omega=\eta\frac{m}{\beta},\quad \frac{1}{\omega}=\frac{1}{\eta}\cdot\frac{\beta}{m}$$

und mit $\lim\omega=0$ auch $\lim\eta=0$ verbunden; und man findet

$$b=\varrho\,.\left[\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}\right]^{\frac{\beta}{m}},$$

folglich nach Art. 22.

$$b=\varrho\,.\,e^{\frac{\beta}{m}},$$

als den einfachsten allgemeinen Ausdruck der Grundzahl.

Bezeichnet man die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes mit B, so hat man gleichzeitig $\varrho=1$, $m=1$ und $b=B$ zu setzen, und erhält sofort

$$B = e^{\beta}.$$

Demnach wäre allgemein die Grundzahl B des natürlichen Logarithmensystems die β-Potenz der Grenzzahl e. Da nun erhellet leicht, dass es am passendsten und einfachsten wäre, sogleich diese Grenzzahl selbst, nicht aber erst eine Potenz derselben, zur Grundzahl der natürlichen Logarithmen zu machen, nemlich $B = e$ und somit den für jede Grundzahl b festgestellten ausgezeichneten Logarithmen $\beta = 1$ zu setzen.

Geht man auf diesen Grund ein, der auch noch dadurch bestärkt wird, dass aus Euler's Begriff vom Logarithmus nothwendig folgt, dass der Logarithme der Grundzahl $= 1$ sein muss; so gestaltet man folgende

Erklärung:

Die Grundzahl eines logarithmischen Systemes ist diejenige Zahl, welche 1 zum Logarithmen hat.

Diese Erklärung haben auch Karsten, Kästner und Klügel (vergl. dessen Math. Wörterb. III. Bd., Logarithmus, Nr. 119), welche mit der Ermittlung von Neper's logarithmischer Grundzahl sich beschäftigten, angenommen, wenn auch nicht so umständlich wie hier gerechtfertigt.

Setzt man nun in den Gleichungen dieses Artikels $\beta = 1$, so übergehen sie in

$$\frac{y}{\varrho} = \left(\frac{b}{\varrho}\right)^{x},$$

$$b = \varrho\left[1 + \frac{1}{m(n+1)}\right]^{n} \cdots \varrho\left[1 + \frac{1}{mn}\right]^{n},$$

$$b = \varrho e^{\frac{1}{m}}.$$

In den jetzt üblichen Logarithmensystemen fällt die Null der Zahl 1 als Logarithme zu, also ist $\varrho = 1$ und sofort

$$y = b^{x},$$

$$b = \left[1 + \frac{1}{m(n+1)}\right]^{n} \cdots \left[1 + \frac{1}{mn}\right]^{n},$$

$$b = e^{\frac{1}{m}}.$$

Bei Neper's Grundzahl der Logarithmen muss man zwischen seinem System und seinem Canon (Tafel) der Logarithmen unterscheiden.

In seinem logarithmischen Systeme setzte er $\eta = \Delta y$ unendlich abnehmend, $\varrho = 10^{7}$ und $m = -\varrho$ voraus, also ist

Digitized by Google

$$b = 10^7 . e^{-0.0000001} = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7} + \frac{0.5}{10^{14}} \ldots\right)$$

$$= 9999999.00000005 \ldots\ldots$$

die Grundzahl des Neper'schen Logarithmensystemes

In seinem logarithmischen Canon dagegen ertheilte Neper indem er $\eta = \Delta y_0 = 1$ wählte, der Zahl

$$y = 9999999 = 10^7 - 1 = \varrho - 1$$

den Logarithmen $x = 1$, also ist nach der ersten der obigen Gleichungen die Grundzahl des Neper'schen Logarithmen Canons

$$b = \varrho - 1 = 9999999.$$

Karsten hingegen behauptet, sie sei $= 0.9999999$. (Klügel a. a. O. S. 537., Z. 7. u. S. 539., Z. 2. v. u.).

Neper erinnert aber in seinen Schriften zweimal (ebendas. S. 537., Z. 4—7 und 8—10), der Logarithme seiner ersten Proportionszahl $9999999 = \varrho - 1$ falle zwischen 1 und $1.0000001 = 1 + \frac{1}{\varrho}$, daher man denselben

$$= 1.00000005 = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\varrho}$$

setzen mag.

Nimmt man daher, nachdem man zur Abkürzung $\frac{1}{\varrho} = \varepsilon$ gesetzt hat,

$$y = \varrho - 1, \quad \frac{y}{\varrho} = 1 - \frac{1}{\varrho} = 1 - \varepsilon$$

und

$$x = 1 + \frac{1}{\varrho} = 1 + \varepsilon;$$

so findet man

$$\frac{b}{\varrho} = (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}},$$

oder wenn man für einen Augenblick

$$n = \frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \ldots.$$

setzt:

Digitized by Google

$$\frac{b}{\varrho} = (1-\varepsilon)^n = 1 - n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{1.2}\varepsilon^2 \ldots\ldots$$

$$= 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 1\frac{1}{2}\varepsilon^3 \ldots\ldots;$$

olglich ist

$$b = \varrho - 1 + \varepsilon - 1{\cdot}5\varepsilon^2 \ldots\ldots \doteq 9999999{\cdot}0000001.$$

Setzt man dagegen

$$x = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\varrho} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

nd für einen Augenblick

$$m = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^3}{8} \cdots$$

o ist

$$\frac{b}{\varrho} = (1-\varepsilon)^m = 1 - m\varepsilon + \frac{m(m-1)}{1.2}\varepsilon^2 \ldots\ldots$$

$$= 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{2} \cdots\cdots,$$

olglich

$$b = \varrho - 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \cdots \doteq 9999999{\cdot}0000005\ldots$$

Dieselben Ereignisse fand Kästner und Klügel (a. a. O S. 540.).

Würde man (vergl. Art. 21.) in Neper's System die ganzzahligen Logarithmen und Logarithmande als Zehnmilliontel lesen, folglich $\varrho = 1$ und $m = -\varrho = -1$ setzen; so wäre die Grundzahl des auf diese Weise abgeänderten Neper'schen Logarithmensystems $= e^{-1} = \frac{1}{e}$, nemlich das Umgekehrte der Grundzahl e der natürlichen Logarithmen.

Digitized by Google

24.

Berechnung des Moduls eines logarithmischen Systemes aus dessen Grundzahl, oder allgemeiner aus den festgesetzten Logarithmen zweier Zahlen.

Neper hatte seine Logarithmen vornehmlich bloss für seine astronomisch- oder sphärisch-trigonometrischen Rechnungen ausgedacht; sobald er aber diese wichtige Entdeckung seinem Freunde Heinrich Briggs mitgetheilt hatte, rieth dieser, um selbe für die gewöhnliche dekadische Zifferrechnung mit Zahlen nutzbar einzurichten, die Logarithmen dergestalt zu bemessen, dass die dem dekadischen Ziffersysteme zu Grunde liegende Zahl 10 den Logarithmen 1, und die Zahl 1 den Logarithmen 0 erhalte.

Hier hatte man demnach die umgekehrte Aufgabe der vorigen, nemlich aus der für ein neu zu schaffendes Logarithmensystem gegebenen Grundzahl $b=10$, oder noch allgemeiner, aus zwei Zahlen und deren Logarithmen, von denen jedoch einer Null ist, des logarithmischen Systemes Modul m zu berechnen.

Zu ihrer Lösung dienen am besten die in Art. 20. für $\mathrm{Log}\, y$ aufgestellten Ausdrücke, in denen $\mathrm{Log}\, \varrho = 0$ ist, weil in ihnen der Modul m als Factor vorkommt. Wegen der Complicirtheit seines Mitfactors und der Einfachheit des Products bleibt es jedoch rathsamer, dieses Moduls Umgekehrtes, $\frac{1}{m}$, auszudrücken. Für selbes findet man

$$\frac{1}{m} = \frac{(\sqrt[n+1]{\frac{y}{\varrho}} - 1)\, n}{\mathrm{Log}\, y_n} \cdots \frac{(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}} - 1)(n+1)}{\mathrm{Log}\, y},$$

und

$$\frac{1}{m} = \frac{\lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}} - 1) n}{\mathrm{Log}\, y} = \frac{\lim_{\omega=0} \frac{\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{\omega} - 1}{\omega}}{\mathrm{Log}\, y}.$$

Ist nun die Grundzahl b gegeben, so setze man $y=b$ und $\mathrm{Log}\, y = \mathrm{Log}\, b = \varrho$; dadurch wird

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\varrho} \cdot (\sqrt[n+1]{\frac{b}{\varrho}} - 1)\, n \cdots \frac{1}{\varrho} (\sqrt[n]{\frac{b}{\varrho}} - 1)(n+1),$$

und

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\varrho} \cdot \lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{\frac{b}{\varrho}} - 1)\, n = \frac{1}{\varrho} \cdot \lim_{\omega=0} \frac{\left(\frac{b}{\varrho}\right)^{\omega} - 1}{\omega}.$$

In der Neuzeit setzt man durchweg die dem Logarithmen Null entsprechende Zahl $\varrho=1$, daher hat man hier die einfacheren Ausdrücke

$$\frac{1}{m}=(\sqrt[n+1]{b}-1)n\ldots.(\sqrt[n]{b}-1)(n+1),$$

und

$$\frac{1}{m}=\lim_{n=\infty}.(\sqrt[n]{b}-1)n=\lim_{\omega=0}.\frac{b^{\omega}-1}{\omega}.$$

Für das dekadische Logarithmensystem ist $b=10$, daher findet man, mittels vielfach wiederholter zweitgradiger Wurzelziehung aus 10, wie Callet a. a. O. zeigt, den Modul dieses Systems

$$m=0{\cdot}4342944819\ldots.$$

Im natürlichen Logarithmensyteme ist der Satzung gemäss $m=1$, und gefunden ward $b=e=2{\cdot}71\ldots$, daher gibt die letzte Gleichung wieder den bereits (Art. 22.) erhaltenen Grenzausdruck $\lim\limits_{\omega=0}\frac{e^{\omega}-1}{\omega}=1$.

Den Zusammenhang zwischen Grundzahl und Modul in jeglichem Logarithmensysteme, welches $\mathrm{Log}\,1=0$ setzt, vermag man am einfachsten durch Vermittelung der natürlichen Logarithmen aufzustellen. Benützt man nemlich die in Art. 21. erwiesene logarithmische Umwandelungsgleichung

$$\log.\mathrm{artif}.y=m.\mathrm{l}y,$$

indem man $y=b$ setzt, so erfolgt

$$m.\mathrm{l}b=1,$$

als allgemeiner Ausspruch des fraglichen Zusammenhanges. Modul und natürlicher Logarithme der Grundzahl sind nemlich in jedwedem logarithmischen Systeme Umgekehrte von einander. Und danach können, wenn einmal die natürlichen Logarithmen berechnet und intabulirt sind, Modul und Grundzahl leicht aus einander gerechnet werden.

Denselben Satz liefert auch die (in Art. 23.) entwickelte Gleichung $b=e^{\frac{1}{m}}$, wenn man in ihr die natürlichen Logarithmen beider Seiten nimmt; da sie $\mathrm{l}b=\frac{1}{m}$ gibt.

Digitized by Google

B.

Lehre von den natürlichen Logarithmen nach *Byrg's* Begriff vom Logarithmus und nach *Neper's* Berechnungsweise der Logarithmen.

25.

Bei dem (in B. Art. 6. erörterten) Zusammenhalten der gleichstelligen Glieder einer geometrischen Reihe von Logarithmanden y mit einer arithmetischen Reihe von Logarithmen x hatten die gleichzeitigen Schöpfer dieser Anschauungsweise der Logarithmen, Neper und Byrg, nebst den Ausgangsgliedern $y_0=\varrho$ und $x_0=0$ beider Reihen noch ihr gleichzeitiges Fortschreiten nach einem bestimmten Gesetze in Zusammenhang zu bringen. Hierbei scheinen sie von Betrachtungen folgender Art geleitet worden zu sein.

In einer arithmetischen Reihe bleibt sich die *absolute* (unverglichen genommene) Zu- oder Abnahme derselben von Glied zu Glied, durchweg gleich, in einer geometrischen jedoch nur ihre *verhältnissmässige* Zu- oder Abnahme, d. i. das Verhältniss der absoluten Zu- oder Abnahme zum jedesmaligen vorausgehenden Gliede. Ist nemlich d der stete Unterschied der arithmetischen Reihe, so $\begin{matrix}\text{steigt}\\\text{sinkt}\end{matrix}$ diese von Glied zu Glied um d, wenn d $\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}$ ist. Wenn dagegen in einer geometrischen Reihe der stete Quotient q und irgend ein Glied y ist, so ist das folgende $=qy$: daher, da wo $q>1$, ist die absolute Zunahme $=qy-y$ und die verhältnissmässige $=\frac{qy-y}{y}=q-1$, oder dort, wo $q<1$, ist die absolute Abnahme $=y-qy$ und die verhältmässige $=\frac{y-qy}{y}$ $=1-q$. Mithin bleibt in einer $\begin{matrix}\text{steigenden}\\\text{fallenden}\end{matrix}$ geometrischen Reihe die verhältnissmässige $\begin{matrix}\text{Zunahme}\\\text{Abnahme}\end{matrix}$ der Glieder so wie der Quotient q durchgehends sich gleich. Blos wo das vorausgehende Glied $y=1$ ist, kommt die verhältnissmässige Aenderung der Glieder mit der absoluten selbst überein.

Damit aber einerseits in der arithmetischen Reihe der Logarithmen x jeder vorgelegte Logarithme, und andererseits in der geometrischen Reihe der Zahlen y jede vorgelegte Zahl, auf einen möglichst geringen Fehler vorkomme, muss dieser Fehler, nemlich in jener arithmischen Logarithmen-Reihe das absolute Intervall d, in dieser geometrischen Logarithmanden- oder Zahlen-Reihe das verhältnissmässige Intervall, $q-1$, der benachbarten Glieder, möglichst klein, und jedenfalls bei der Grundanlage beider einander zugesellten Reihen entschieden festgestellt werden. Dadurch wird aber auch das Verhältniss beider dieser Intervalle oder Zu-

nahmen der Reihenglieder, $d:(q-1)$, welches mit m bezeichnet werden möge, festgestellt; und man erklärt sonach m als das Grenzverhältniss der unendlich sich verringernden Intervalle oder Aenderungen, d und $q-1$, der Glieder in der arithmetischen Reihe der Logarithmen und in der geometrischen der Zahlen; nemlich für $\lim d=0$ und $\lim(q-1)=0$ wird $m=\lim\frac{d}{q-1}$ gesetzt. Dieses, die Art oder das System der Logarithmen bestimmende, Grenzverhältniss, m, pflegt man den Modul des logarithmischen Systemes zu nennen.

Neper liess (vergl. Art. 5.) die arithmetische Reihe seiner Logarithmen steigen und mit dem Gliederpaare 0, k anheben, also die absolute Zunahme der Glieder $d=k$ positiv sein; dagegen liess er, geleitet von seinen sphärisch-astronomischen Rechnungen, die geometrische Reihe der zugehörigen Zahlen sinken, und mit dem Gliederpaare ϱ, $\varrho-\varkappa$ anfangen, also den Quotienten $q=\frac{\varrho-\varkappa}{\varrho}=1-\frac{\varkappa}{\varrho}$ nnd die relative Zunahme der Glieder $q-1=\frac{(\varrho-\varkappa)-\varrho}{\varrho}=-\frac{\varkappa}{\varrho}$ negativ sein. Er setzte daher überhaupt den logarithmischen Modul $m=\frac{d}{q-1}=-k:\frac{\varkappa}{\varrho}$. Insbesondere nahm er (nach Art. 7.)

$$k=1,\ \varrho=10000000,\ \varkappa=1=k,$$

folglich

$$\frac{\varkappa}{\varrho}=0{\cdot}0000001$$

und

$$m=-\varrho=-10000000.$$

Byrg dagegen liess für die gewöhnlichen Zifferrechnungen in ganzen Zahlen beide verbundenen Reihen, folglich die Logarithmen und Logarithmande, mit einander wachsen, also in seiner arithmetischen Logarithmen-Reihe (vergl. Art. 7.) ebenfalls die Anfangsglieder 0, k und die absolute Zunahme der Glieder $d=k$ positiv, dagegen in seiner geometrischen Logarithmanden-Reihe die Anfangsglieder ϱ, $\varrho+\varkappa$, folglich den Quotienten $q=\frac{\varrho+\varkappa}{\varrho}=1+\frac{\varkappa}{\varrho}$ und sofort die verhältnissmässige Zunahme der Glieder $q-1=\frac{(\varrho+\varkappa)-\varrho}{\varrho}=\frac{\varkappa}{\varrho}$ auch positiv sein. Er setzte demnach überhaupt den logarithmischen Modul $m=\frac{d}{q-1}=k:\frac{\varkappa}{\varrho}$. Insbesondere nahm er (laut Art. 7.)

$$k=10,\ \varrho=100000000,\ \varkappa=10000;$$

also

$$\frac{\varkappa}{\varrho}=0{\cdot}0001 \text{ und } m=100000.$$

26.

Spätere Mathematiker erkannten jedoch bald

1. dass es rathsamer sei, von dem damaligen Gebrauche, blos mit ganzen Zahlen zu rechnen und demgemäss nicht nur die Logarithmande, sondern auch die Logarithmen in ganzen Zahlen darzustellen, ganz abzugehen und sonach Logarithmande und Logarithmen durch Decimalbrüche auszudrücken, und

2. dass die logarithmischen Rechnungen sich ungemein vereinfachen, wenn man die Null als Logarithmus nicht mehr einer höheren dekadischen Einheit ϱ, sondern der Stammeinheit — der Eins — zuschreibt, also analog $\varrho'=1$ macht.

Dazu bedurfte es demnach nur sämmtliche geometrisch gereihten Zahlen durch diese dekadische Einheit ϱ zu theilen. Hiebei blieb der Quotient q dieser geometrischen Reihe ungeändert, weil sein Dividend und Divisor durch einerlei Zahl getheilt wurden, daher $q'=q$. Sonach blieb auch die verhältnissmässige Zunahme der Glieder dieser geometrischen Zahlenreihe ungestört, $q'-1=q-1$.

In Bezug auf die Logarithmen ersahen sie, dass es angemessener sei, den in den Zifferrechnungen gewöhnlich vorkommenden ganzen Zahlen positive Logarithmen zuzuweisen, folglich nicht allein die geometrische Logarithmanden-Reihe, sondern auch die arithmetische Logarithmen-Reihe steigen zu lassen, sonach in jener den Quotienten $q'>1$ und in dieser die Differenz d' positiv zu machen. Zugleich benützten sie den von Neper (vergl. Art. 1, Cap. I. Def. 6) herstammenden Gedanken, die absolute Zunahme d' der arithmetisch gereihten Logarithmen der verhältnissmässigen Zunahme $q'-1$ der geometrisch gereihten Logarithmande gleich zu machen, also $d'=q'-1$ zu setzen, folglich den Modul dieses abgeänderten Logarithmensystems $m'=\frac{d'}{q'-1}=1$ zu wählen. Weil aber $q'-1=q-1$ und wegen $m=\frac{d}{q-1}$ also $q-1=\frac{d}{m}$ ist, so hatte man auch $d'=\frac{d}{m}$, d. i. man musste zunächst die Zunahme d der Logarithmen, folglich, weil das Ausgangsglied ihrer arithmetischen Reihe Null ist, sämmtliche Logarithmen durch den Modul m theilen.

Diese neue, dem Modul $m'=1$ entsprechende, Art von Logarithmen ergab sich demnach aus Neper's Logarithmentafel, indem man alle Zahlen durch $\varrho=10^7$ und alle Logarithmen durch $m=-10^7$ dividirte, folglich blos von den Zahlen und Logarithmen 7 Decimalstellen abschnitt (oder beide als Zehnmilliontel las) und noch die Logarithmen mit entgegengesetztem Vorzeichen

nahm. Aus Byrg's Logarithmentafel ergab sie sich, indem man die Zahlen durch $\varrho = 10^8$ und die Logarithmen durch $m = 10^5$ theilte, folglich nur von den Zahlen 8, von den Logarithmen aber 5 Decimalstellen abschnitt (oder jene als Hundertmilliontel und diese als Hunderttausendtel las).

Insofern nun dieses abgeänderte Logarithmensystem den hier als naturgemäss nachgewiesenen Anforderungen (vergl. noch Art. 19.) genügte, und beide Entdecker den Logarithmen, wenn man blos die Zähleinheiten ihrer ganzzahlig dargestellten Logarithmande und Logarithmen und höchstens noch das algebraische Beziehungszeichen der letzteren abändert, in ihren Logarithmentafeln dieses logarithmische System aufgestellt haben; erkannten die Mathematiker es für passend, diese Logarithmen natürliche zu nennen.

Im natürlichen Logarithmensysteme ist demnach der Modul $m = \lim \frac{d}{q-1} = 1$ für $\lim d = \lim (q-1) = 0$, und, wie man gegenwärtig zu schreiben pflegt, ist log.nat.1 oder $l1 = 0$.

27.

Für die Berechnung des Logarithmus x einer bestimmten Zahl y für einen festgestellten Modul m hat man demnach in einer ähnlichen Weise wie in Art. 20. die Gleichungen:

$$x_n = x_0 + nd = nd, \quad x_{n+1} = x_0 + (n+1)d = (n+1)d;$$

$$y_n = y_0 q^n = \varrho q^n, \qquad y_{n+1} = y_0 q^{n+1} = \varrho q^{n+1};$$

$$m = \frac{d}{q-1};$$

$$x = x_n \ldots x_{n+1}, \quad y = y_n \ldots y_{n+1}.$$

Eliminirt man nun hier d und q so wie dort $\frac{\eta}{\varrho}$, so findet man leicht auch die daselbst aufgestellten Gleichungen, sohin auch die auf sie gegründeten in den Art. 21—24 durchgeführten Lehren; weshalb wir uns der Wiederholung derselben hier enthalten.

Für die Grundzahl des Byrg'ischen Logarithmen-*systems* setzt man in Art. 23. die Zahl $\varrho = 10^8$ und den Modul $m = 10^5$; danach findet man

$$b = 10^8 . e^{0{\cdot}00001}$$

$$= 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^5} + \frac{0{\cdot}5}{10^{10}} + \frac{0{\cdot}1\dot{6}}{10^{15}} + \frac{0{\cdot}04\dot{6}}{10^{20}} \ldots\right)$$

$$= 10000100{\cdot}0050000166\ldots$$

Zur Berechnung der Grundzahl b der Byrg'ischen Logarithmen*tafel* benützt man die aus Art. 11, 1. und 2. so wie auch aus Art. 23. folgende Gleicsung

$$\frac{b^{\varkappa}}{\varrho}=\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

indem man auf den von mir (in Art. 23.) gerechtfertigten Begriff der logarithmischen Grundzahl eingehend $\beta=1$ wählt.

Setzt man nemlich nach Byrg's Annahmen (Art. 25.)

$$\varrho=10^8,\ y_1=\varrho+\varkappa;$$

also

$$\frac{y_1}{\varrho}=1+\frac{\varkappa}{\varrho}=1{\cdot}0001$$

und

$$x_1=d=k=10,$$

so ist

$$b=10^8(1{\cdot}0001)^{\frac{1}{10}}=10^8\left(1+\frac{1}{10^5}-\frac{4{\cdot}5}{10^{10}}+\frac{12}{10^{15}}-\frac{21}{10^{20}}\ldots.\right)^{*})$$

$$=100000099{\cdot}0550012\ldots.$$

C.

Aufbau der Lehre von den natürlichen Logarithmen über einem gewissen Grenzverhältnisse und auf dem gewöhnlichen Begriffe vom Logarithmus.

28.

Wenn y eine beliebige, n eine absolute ganze Zahl vorstellt, so ist bekanntlich

$$y^n-1=(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}+\ldots+y+1),$$

daher der Quotient oder das Verhältniss

$$\frac{y^n-1}{y-1}=y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots\ldots+y+1.$$

---

*) Um über die Beträge dieser Luxuszahlen, die man Neper's und Byrg's logarithmische Grundzahlen nennt, kurz und sicher absprechen zu können, habe ich mir erlaubt ausnahmsweise hier und in Art. 24. die convergenten Reihen anzuwenden.

Würde man nun die willkührliche Zahl y geradehin $=1$ setzen, so möchte jener Quotient die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, diese Potenzensumme aber, weil n gliederig, in die Summe von n Einsen also in n selbst übergehen. Man muss daher diesen Potentiand y als eine der Grenze 1 unablässig zustrebende veränderliche Zahl ansehen, wonach auch alle ihre natürlichen Potenzen derselben Grenze 1 zustreben, und die $n$gliederige Potenzensumme der Grenze n ohne Ende näher rückt. Dadurch wird man berechtiget, diese Grenze der Potenzensumme als Grenze jenes Quotienten anzusehen, folglich zu setzen

$$\lim_{y=1} \frac{y^n-1}{y-1} = n.$$

Soll die Zahl y ihrer Grenze 1 stetig sich nähern, so muss sie wenigstens in den späteren Stadien, ebenso wie ihre Grenze reell und positiv, dabei jedoch entweder kleiner oder grösser als diese Grenze sein, folglich entweder im Wachsen oder im Abnehmen dieser Grenze zustreben; es ist nemlich $y \gtrless 1$ und $\lim y = 1$, wofür wir im Zusammenhange $\lim y \overset{>}{<} 1$ schreiben wollen.

Danach ist in der obigen Potenzensumme jeder Summand, als Potenz von y, so wie diese positiv und dort grösser hier kleiner als 1, und strebt der gemeinsamen Grenze 1 zu, folglich

$$\lim (y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + y^2 + y + 1) \overset{>}{<} n$$

und

$$\lim \frac{y^n-1}{y-1} \overset{>}{<} n.$$

29.

Bezeichnen wir den Unterschied zwischen y und 1 mit x, nemlich $y-1=x$, so ist für $y \overset{>}{<} 1$ dieser Unterschied $x \overset{>}{<} 0$, und die letzte Grenzvergleichung

$$\lim \frac{(1-x)^n-1}{x} \overset{>}{<} n \text{ für } \lim x \overset{>}{<} 0.$$

Unterscheidet man, zur genauen Erforschung der Vergleichungszeichen, ob x positiv oder negativ sei, so hat man zunächst, wenn x positiv, also $\lim x \geqq 0$ ist,

Digitized by Google

$$\frac{(1+x)^n-1}{x} \gtreqless n,$$

daher wenn man beiderseits des Vergleichungszeichens mit der positiven Zahl x multiplicirt und 1 addirt,

$$(1+x)^n \gtreqless 1+nx,$$

und wenn man beiderseits die $n$te Wurzel aus diesen zwei die 1 übersteigenden positiven Zahlen zieht,

$$1+x \gtreqless (1+nx)^{\frac{1}{n}},$$

endlich, wenn man noch beide eben solche Zahlen nach dem positiven Exponenten $\frac{1}{x}$ potenzirt,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \gtreqless (1+nx)^{\frac{1}{nx}}.$$

Ist dagegen x negativ, also $\lim x \leqq 0$, so hat man

$$\frac{(1+x)^n-1}{x} \lesseqgtr n,$$

oder, weil Dividend und Theiler negativ sind, nach Veränderung ihrer Vorzeichen,

$$\frac{1-(1+x)^n}{-x} \lesseqgtr n.$$

Multiplicirt man nun zu beiden Seiten des Vergleichungszeichens mit der positiven Zahl $-x$, so wird

$$1-(1+x)^n \lesseqgtr -nx;$$

daher, wenn man beiderseits $(1+x)^n$ und nx addirt, ist

$$1+nx \lesseqgtr (1+x)^n;$$

folglich, wenn man von beiden verglichenen Zahlen ihre Umgekehrten nimmt, das heisst, durch beide die 1 theilt, muss das Ungleichheitszeichen umgewendet werden, und es erfolgt

$$\frac{1}{1+nx} \gtreqless \frac{1}{(1+x)^n}$$

oder

$$(1+nx)^{-1} \gtreqless (1+x)^{-n}.$$

Erhebt man nun beide positive Zahlen zur Potenz des positiven Exponenten $\frac{1}{-nx}$, so wird

$$(1+nx)^{\frac{1}{nx}} \gtrless (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Sonach ist im Zusammenhange, für

$$\lim x \gtrless 0,$$

$$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} \gtrless \lim (1+nx)^{\frac{1}{nx}}.$$

Hieraus erhellet nun, dass beide diese Potenzen, von denen die erste nur von x, die andere nur von nx abhängt, bei gleichzeitiger unendlicher Abnahme dieser Veränderlichen x und nx, einer und derselben Grenze zustreben müssen, oder, wenn man diese Veränderlichen durch eine neue mit ihnen zugleich unendlich abnehmende Veränderliche ω vorstellt, dass die Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ einer gewissen Grenze ohne Ende sich nähern muss.

Diese Grenzzahl kann, weil die in der Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ einzig vorkommende Veränderliche ω in ihrem äussersten Grenzwerthe in Null übergeht, lediglich eine völlig bestimmte oder besondere Zahl sein. Einem allgemeinen Gebrauche gemäss pflegt man sie durch den Buchstaben e zu bezeichnen; also

$$\lim_{\omega=0} (1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} = e$$

zu setzen.

30.

Erforschen wir nunmehr, ob diese Grenze e bei unendlicher Abnahme von ω von der Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ im Wachsen oder Abnehmen angestrebt werde.

Weil nx mit x gleichzeitig positiv ist und unendlich abnimmt, so muss, vermöge der zuletzt aufgestellten Grenzvergleichung, die Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$, wenn ω von nx auf seinen $n$ten Theil, x, abnimmt, für $\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}$ Werthe von x, nx und ω, $\begin{matrix}\text{zunehmen}\\ \text{abnehmen}\end{matrix}$, und somit muss diese $\begin{matrix}\text{Zunahme}\\ \text{Abnahme}\end{matrix}$ auch fortbestehen, wenn die jeweilige Abnahme der Veränderlichen ω auf ihren $n$ten Theil sich fort-

Digitized by Google

während wiederholt, also ω allmählig auf nx, x, $\frac{x}{n}$, $\frac{x}{n^2}$, $\frac{x}{n^3}$, u.s.f herabsinkt.

Weil jedoch x beliebig klein und n beliebig gross angenom werden kann, so müssen die hinreichend klein gewählten Glieder jeder anderen Reihe von Werthen der Veränderlichen ω zwischen je zwei Glieder jener abnehmenden geometrischen Reihe fallen folglich muss auch für die neue Reihe, also überhaupt, wie auch immer das Gesetz der unendlichen Abnahme von ω lauten möge die Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ für $\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}$ Werthe von ω ohne Ende $\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{abnehmend}\end{matrix}$ der Grenzzahl e zustreben, nemlich für

$$\lim \omega \begin{matrix}> \\ = \\ <\end{matrix} 0$$

ist

$$\lim (1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \begin{matrix}< \\ = \\ >\end{matrix} e.$$

Daraus folgt sogleich, das für jeden $\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}$ Werth von ω die Potenz

$$(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \begin{matrix}< \\ > \end{matrix} e$$

sein muss.

Setzt man daher einmal $\omega = \frac{1}{n}$ und ein andermal $\omega = -\frac{1}{n+1}$, wobei n absolut und ganz sein soll, so ist

$$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

und

$$e < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{-(n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

also

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Insbesondere findet man für $n=1$, dass die fragliche Grenzzahl zwischen den ganzen Zahlen 2 und 4 liegt. Wie man diese einschränkenden Grenzausdrücke zur wirklichen Berechnung von e verwenden könne, ist in Art. 22. gewiesen worden.

31.

Aus der obigen allgemeinen Grenzvergleichung

$$\lim (1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} e \quad \text{für } \lim \omega \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0,$$

folgt für positive ω, der Ordnung nach,

$$(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} e, \quad 1+\omega \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} e^{\omega}, \quad \omega \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} e^{\omega}-1, 1 \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} \frac{e^{\omega}-1}{\omega};$$

dagegen für negative ω, wo $-\omega$ positiv ist,

$$(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} e, \quad \frac{1}{(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \frac{1}{e}, \quad \left(\frac{1}{(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}}\right)^{-\omega} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \left(\frac{1}{e}\right)^{-\omega};$$

$$1+\omega \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} e^{\omega}, \quad 1-(1+\omega) = -\omega \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 1-e^{\omega}, 1 \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \frac{e^{\omega}-1}{\omega};$$

mithin ist

$$\lim \frac{e^{\omega}-1}{\omega} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1 \quad \text{für} \lim \omega \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0.$$

Eine Bestätigung dieser wichtigen Grenzvergleichung finden wir an der in Art. 29. erwiesenen und ihr eigentlich zu Grunde liegenden

$$\lim \frac{(1+x)^n-1}{x} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} n \quad \text{für} \lim x \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0.$$

Denn dividirt man durch n, setzt $nx=\omega$, also $n=\frac{\omega}{x}$, so verwandelt sie sich in

$$\lim \frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\omega}-1}{\omega} = \lim \frac{\left[\lim_{x=0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\omega}-1}{\omega} = \lim \frac{e^{\omega}-1}{\omega} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1$$

für

$$\lim \omega \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

Digitized by Google

32.

Sei in Bezug auf eine beliebige von 0 und 1 verschiedene absolute Grundzahl b der Logarithme der zwischen 2 und 4 enthaltenen absoluten Grenzzahl e, oder — wie wir ihn kurz nennen wollen — der b-Logarithme von e, die Zahl m; in Zeichen $\overset{b}{\log} e = m$, also $b^m = e$. Führt man diesen Ausdruck von e in die zuletzt gefundene Grenzgleichung

$$\lim_{\omega=0} \frac{e^\omega - 1}{\omega} = 1$$

ein, und theilt sie durch m, so wird

$$\lim_{\omega=0} \frac{b^{m\omega} - 1}{m\omega} = \frac{1}{m}.$$

Setzt man noch abkürzend $m\omega = \varepsilon$, also auch $\lim \varepsilon = 0$, so erfolgt

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{b^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{1}{m} = \frac{1}{\overset{b}{\log} e},$$

eine bemerkenswerthe Grenzgleichung.

Kehrt man ihre beiden Theile um, so ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{b^\varepsilon - 1} = m = \overset{b}{\log} e.$$

Da ε eine unendlich abnehmende Zahl ist, so ist

$$\lim_{\varepsilon=0} (b^\varepsilon) = b^0 = 1,$$

also darf $b^\varepsilon = 1 + \eta$ gesetzt werden, wo auch $\lim \eta = 0$ ist. Dann ist $\varepsilon = \overset{b}{\log}(1+\eta)$, und für diese Ausdrücke übergeht die Gleichung in

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta)}{\eta} = m = \overset{b}{\log} e,$$

der man, weil $\overset{b}{\log} 1 = 0$ ist, auch die Form

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta) - \overset{b}{\log} 1}{(1+\eta) - 1} = m = \overset{b}{\log} e$$

ertheilen kann.

Zu jedem Logarithmensystem ist demnach das Verhältniss der geringsten Aenderungen der kleinsten Logarithmen zu den entspre-

chenden Aenderungen ihrer, der Zahl 1 benachbartesten, Zahlen ein bestimmtes, m, welches der Modul dieses logarithmischen Systemes genannt wird und mit dem, in diesem Systeme vorkommenden, Logarithmen der Grenzzahl $e=2{\cdot}71\ldots$ übereinfällt.

Da nun der Logarithme der Grundzahl in jeglichem Systeme $=1$ ist, so sieht man sich durch den Ausdruck $\overset{b}{\log} e$ des logarithmischen Moduls aufgefordert, sich ein Logarithmensystem zu denken, dessen Grundzahl die gefundene Grenzzahl e ist; was möglich bleibt, weil e absolut und von 0 und 1 verschieden ist. Durch den Uebergang von b auf e wird $\overset{e}{\log} e=1$, daher obige Grenzgleichung

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{e}{\log}(1+\eta)-\overset{e}{\log} 1}{(1+\eta)-\eta} = m = 1.$$

In dem Systeme dieser e-Logarithmen sind daher die geringsten Aenderungen der kleinsten Logarithmen den entsprechenden Aenderungen ihrer, der Zahl 1 benachbartesten, Zahlen gleich, oder der Modul ist $=1$.

Insofern nun die Analysis selbst auf dem Wege einer ganz ungekünstelten Erforschung von naturgemäss zur Frage sich aufwerfenden Grenzverhältnissen zu der mit e bezeichneten Grenzzahl, und danach zu den auf die Grundzahl e beziehlichen Logarithmen geleitet wird; und insofern diesen die in Art. 19. aufgezählten Eigenschaften zukommen: sieht man sich ohne Zweifel berechtiget, diese e-Logarithmen natürliche zu nennen.

33.

Bezeichnet man nun diese natürlichen Logarithmen blos mit dem einfachen Buchstaben l, so findet man aus der obigen Gleichung $b^m=e$ die bekannte $m\mathrm{l}b=1$. Ferner wenn x der b-Logarithme von y ist, also $b^x=y$ ist, hat man auch

$$b^{mx}=e^x=y^m,$$

also

$$x=\mathrm{l}(y^m),$$

oder

$$\overset{b}{\log} y = m\mathrm{l}y.$$

Daraus folgt auch $e=y^{\frac{m}{x}}$ und sonach, mit Bezug auf Art. 31, $e^\omega=y^{\frac{m}{x}\omega}$, oder, wenn man $\frac{m}{x}\omega=\frac{1}{n}$ setzt,

Digitized by Google

$$e^{\omega} = y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y} \text{ und } \omega = \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{m}.$$

Bringt man diese Ausdrücke in die Grenzvergleichung

$$\lim \frac{e^{\omega} - 1}{\omega} \gtreqless 1, \quad \lim \omega \gtreqless 0$$

und setzt noch

$$x = {}^{b}\log y,$$

so wird

$$\frac{m}{\log y} \lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{y} - 1)\, n \gtreqless 1,$$

wobei das $\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}$ Vergleichungszeichen gilt, wenn $\omega = \frac{x}{nm} = \frac{{}^{b}\log y}{nm}$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ ist.

Nimmt man, wie üblich, $b > 1$, also $m = {}^{b}\log e$ positiv, ferner für y eine Absolutzahl über 1, daher auch ${}^{b}\log y$ positiv an, so kommt letztere Bedingung darauf zurück, dass n $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ sei.

Für diesen Fall, wo b und $y > 1$ ist, findet man demnach allgemein, wenn man mit der positiven Zahl ${}^{b}\log y$ die Vergleichung multiplicirt,

$$\log y \lessgtr m \lim (\sqrt[n]{y} - 1)\, n,$$

$$\text{für } \lim \frac{1}{n} \gtreqless 0, \text{ oder für } \lim n = \pm \infty ;$$

daher insbesondere für natürliche Logarithmen, d. i. für $b = e$, $m = 1$, und $y > 1$,

$$\text{l}y \lessgtr \lim (\sqrt[n]{y} - 1)\, n, \quad \lim \frac{1}{n} \gtreqless 0.$$

Anders dargestellt ist

$$\text{l}y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{y}}\right) n \ldots . (\sqrt[n]{y} - 1)\, n.$$

Digitized by Google

wenn man nemlich n erst negativ, dann positiv setzt. Dabei ist das Verhältniss der oberen Grenze zur untern $= \overset{n}{\sqrt{y}}$.

Setzt man zur Vereinfachung der Rechnung

$$\overset{n}{\sqrt{y}} = 1+u, \text{ und } (\overset{n}{\sqrt{y}} - 1.n =) nu = Y;$$

so ist

$$\mathrm{l}y = \frac{Y}{1+u} \ldots\ldots Y.$$

Da noch

$$\frac{Y}{1+u} = Y - uY + \frac{Yu^2}{1+u} > Y - uY$$

ist, so findet man um so mehr

$$\mathrm{l}y = Y - uY \ldots\ldots Y$$

und die Fehlergrenze $= uY$.

D.

Ableitung der Lehre von den natürlichen Logarithmen nach dem dermalen gebräuchlichen Begriffe der Logarithmen.

34.

I. Für eine festgesetzte Grundzahl b sei x der Logarithme einer Zahl y, in Zeichen $\log^b y = x$, so ist (vermöge Art. 10) $b^x = y$.

Zugleich ist aber auch nach dem Begriffe vom Wurzelziehen (Radiciren)

$$b = \overset{x}{\sqrt{y}} = \overset{\log^b y}{\sqrt{y}};$$

d. h. radicirt man eine Zahl y nach ihrem Logarithmen $x = \log^b y$, oder gewöhnlicher ausgesprochen, zieht man aus einer Zahl y diejenige Wurzel, deren Exponent ihr Logarithme $x = \log^b y$ ist, so erhält man die Grundzahl b, auf die sich jener Logarithme bezieht.

II. Ist die gewählte absolute Grundzahl b — wie es sein muss — von 0 und 1 verschieden, so gibt es zu jeder Absolutzahl y einen reellen Logarithmen x. Denn der Ausnahmsfall $y=1$

Digitized by Google

ist bekanntlich durch $x=0$ erledigt, weil $b^0=1$ ist. In jedem anderen eigentlich zu erforschenden Falle, wo $y \gtrless 1$ ist, sei der in Frage gestellte Logarithme überhaupt ein rationaler auf die regelmässige Form (von ganzzahligem Nenner und Zähler) zurückgeführter Bruch, nemlich $x=\frac{p}{n}$, so soll $b^x=b^{\frac{p}{n}}=y$ sein. Dann muss $b^p=y^n$; nemlich einer Potenz der Grundzahl b eine Potenz des Logarithmands y gleich sein.

Potenzirt man aber sowohl die logarithmische Grundzahl b nach allen algebraisch aufsteigend geordneten negativen und positiven ganzzahligen Exponenten von $-\infty$ bis $+\infty$, den Logarithmand y aber nach allen absoluten ganzzahligen Exponenten von 0 bis ∞; so muss, wenn $b \gtrless 1$ ist, die erstere Potenzenreihe vorwärts / rückwärts genommen, vom Unendlichkleinen an bis ins Unendlichgrosse aufsteigen, die andere Potenzreihe aber, wenn $y \gtrless 1$ ist von 1 an unendlich wachsen / abnehmen. Mithin muss jede Potenz der letzteren Art, wie y^n, entweder mit einer Potenz der ersteren Art wie y^p, übereinfallen, oder wenigstens zwischen zwei benachbarten solchen Potenzen, wie y^p und y^{p+1} liegen. Im ersteren freilich seltenen Falle ist

$$y^n=b^p, \text{ also } y=b^{\frac{p}{n}},$$

folglich

$$\overset{b}{\log} y=\frac{p}{n};$$

im anderen und gewöhnlichsten Falle ist

$$y^n=b^p \ldots . b^{p+1},$$

daher

$$y=b^{\frac{p}{n}} \ldots . b^{\frac{p+1}{n}}$$

und sonach

$$\overset{b}{\log} y=\frac{p}{n} \ldots . \frac{p+1}{n},$$

wobei die Fehlergrenze $\frac{1}{n}$ durch allmäliche und unendliche Vergrösserung des Exponenten n nach und nach immer kleiner gemacht und dem Verschwinden beliebig nahe gebracht werden kann, mithin der geforderte Logarithme, selbst wenn er irrational wäre, mit jeder gewünschten Schärfe genähert sich bestimmen lässt.

Digitized by Google

35.

Da allgemein $\overset{b}{\log} y = x$, und insbesondere $\overset{b}{\log} 1 = 0$ ist; so wird, weil in der mit der ersteren Gleichung in den Begriffen unzertrennlich verbundenen $b^x = y$ bei stetiger Veränderung des Exponenten x auch die Potenz y stetig sich ändert, folglich umgekehrt eine stetige Aenderung dieses Logarithmands y nothwendig jenen Logarithmus x auch wieder stetig abändern muss, bei der unaufhörlichen Annäherung des Logarithmands y an die Grenze 1 der Logarithmus x der Grenze 0 zustreben oder unendlich abnehmen. Es ist nemlich, für $\lim y = 1$, $\lim x = 0$ oder, kürzer dargestellt, $\lim\limits_{y=1} \overset{b}{\log} y = 0$, und mit Rückblick auf Art. 34. I. ist $b = \lim\limits_{y=1} \left(y^{\frac{1}{x}}\right)$,

Sei noch $y - 1 = \eta$, also $y = 1 + \eta$, so ist $\lim y = 1$ gleichgeltend mit $\lim \eta = 0$, und es übergeht der letzte Ausdruck in

$$b = \lim (1+\eta)^{\frac{1}{x}}, \text{ für } \lim \eta = 0 = \lim x.$$

Eine Bestätigung dieses Ausdruckes liefert auch die bekannte Gleichung $\overset{b}{\log} b = 1$, der wir die Form $\lim\limits_{y=b} (\overset{b}{\log} y = x) = 1$ ertheilen können.

Denn setzen wir $y = b(1+\beta)$, so kann $x = \overset{b}{\log} y = 1 + \alpha$ gesetzt werden, wofern mit $\lim \beta = 0$ auch $\lim \alpha = 0$ verbunden ist. Dann ist

$$b^{1+\alpha} = b(1+\beta),$$

also

$$b^{\alpha} = 1 + \beta$$

und

$$b = (1+\beta)^{\frac{1}{\alpha}},$$

oder vollständig

$$b = \lim (1+\beta)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ für } \lim \alpha = 0 = \lim \beta.$$

36.

Erforschen wir noch, in welcher Vergleichung, wenn x und $y - 1$ einstimmig sind, die Grundzahl b mit 1 stehe.

Bekanntlich gehört, wenn die Grundzahl (der Potentiand) $b \gtrless 1$ ist, zu einem positiven Logarithmen (Exponenten) x ein

Digitized by Google

Logarithmand (eine Potenz) $y \gtrless 1$; dagegen zu einem negativen Logarithmen x ein Logarithmand $y \lessgtr 1$; folglich muss umgekehrt zu einem Logarithmand $y \gtrless 1$, für den also der Unterschied $y-1$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}$ ist, und zu einem $\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}$ Logarithmen x jedenfalls eine Grundzahl $b \gtrless 1$ gehören.

37.

Vermöge Art. 34. I. lässt sich zu einem jeden reellen absoluten Logarithmand $y \gtrless 1$, oder zu jedem positiven oder negativen Unterschiede $\eta = y - 1$ dieses Logarithmands y von 1, und zu jeglichem ihm beigelegten positiven oder negativen Logarithmen x die entsprechende logarithmische Grundzahl b, als die einem gegebenen Radicand (y) und Wurzelexponenten (x) zugehörige Wurzel (b), mit vollkommener Bestimmtheit berechnen. Unter diesen Annahmen für y oder für $y-1=\eta$ und für x ist aber die bemerkenswertheste gewiss die, wo man diesen Logarithmen x jenem Unterschiede η völlig (in Grösse und Beziehung) gleich, $x=\eta=y-1$, voraussetzt und beide mit einander unendlich abnehmen, $\lim x = 0$, $\lim \eta = 0$, $\lim (y-1) = 0$, sein lässt.

Für diese ausgezeichneten Bedingungen müssen die in Art. 35. aufgestellten allgemeinen Grenzausdrücke der Grundzahl b nothwendig eine ganz absonderliche logarithmische Grundzahl darbieten, die wir mit e bezeichnen wollen, wonach wir erhalten

$$e = \lim_{y=1} (y^{\frac{1}{y-1}}) = \lim_{\eta=0} (1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}.$$

Von dieser Grundzahl lässt uns der Art. 36., weil der Unterschied $y-1=\eta$ mit dem ihm gleichen Logarithmen x auch gleichstimmig ist, sogleich erkennen, dass sie grösser als Eins sein muss.

38.

Erforschen wir sofort den Zusammenhang dieser ausgezeichneten logarithmischen Grundzahl e mit jeder anderen b. Für diese bietet der Art. 35. die allgemeinen Grenzausdrücke

$$b = \lim (y^{\frac{1}{x}}) = \lim (1+\eta)^{\frac{1}{x}}$$

zu

Digitized by Google

$$\lim y = 1,\ \lim x = 0,\ \lim \eta = 0.$$

Daher ist auch, wenn man beiderseits nach $\frac{x}{\eta} = \frac{x}{y-1}$ potenzirt,

$$\lim(b^{\frac{x}{\eta}}) = \lim_{y=1}(y^{\frac{1}{y-1}}) = \lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}},$$

folglich nach obigem Grenzausdrucke von e,

$$\lim(b^{\frac{x}{\eta}}) = e.$$

Hiernach ist nun

$$\lim \frac{x}{\eta} = \overset{b}{\log} e,$$

oder wegen

$$x = \overset{b}{\log}(y = 1 + \eta)$$

auch

$$\lim_{y=1} \frac{\overset{b}{\log} y}{y-1} = \lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta)}{\eta} = \overset{b}{\log} e.$$

Diese Gleichung hätte sich auch gefunden, wenn man von obigen Ausdrücken der Grundzahl e die auf die Grundzahl b beziehlichen Logarithmen genommen hätte. Sie lässt sich, weil $\overset{b}{\log} 1 = 0$ ist, auch so darstellen:

$$\lim_{y=1} \frac{\overset{b}{\log} y - \overset{b}{\log} 1}{y-1} = \lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta) - \overset{b}{\log} 1}{(1+\eta)-1} = \overset{b}{\log} e.$$

Aus der Gleichung $\lim(b^{\frac{x}{\eta}}) = b^{\lim\frac{x}{\eta}} = e$, und noch leichter aus ihrer nothwendigen Folge $b = \lim e^{\frac{\eta}{x}} = e^{\lim\frac{\eta}{x}}$, erhellet, dass die Grundzahl b, also auch der gesammte Charakter eines jeden logarithmischen Systems lediglich von dem völlig bestimmten und dem $\overset{b}{\log} e$ gleichenden Grenzverhältnisse $\frac{x}{\eta}$ den kleinsten Logarithmen, x, zu den geringsten Unterschieden, $\eta = y-1$, der Logorithmande y von 1 abhänge. Deswegen wird dieses Grenzverhältniss der Modul des betreffenden, der Grundzahl b zugehörigen logarithmischen Systems genannt. Wir bezeichnen es mit m und haben demnach $m = \lim\frac{x}{\eta}$ oder

Digitized by Google

$$m = \lim_{y=1} \frac{\overset{b}{\log} y - \overset{b}{\log} 1}{y-1} = \lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta) - \overset{b}{\log} 1}{(1+\eta)-1} = \overset{b}{\log} e,$$

und

$$b^m = e, \quad b = e^{\frac{1}{m}}.$$

Für die auf die Grundzahl e beziehlichen Logarithmen ist $x = \eta$, also der Modul $m = 1$.

39.

Insofern nun die genauere Erforschung der Logarithmen ganz einfach und naturgemäss auf die ausgezeichnete logarithmische Grundzahl e hinleitet, und insofern bei diesem logarithmischen Systeme das zur Betrachtung sich aufdrängende mit dem Namen „logarithmischer Modul" belegte Grenzverhältniss in das Gleichheitsverhältniss oder in 1 übergeht, ist es angemessen, derlei Logarithmen **natürliche**, alle anderen dagegen **künstliche** zu nennen, erstere durch log. nat. oder nur durch l, letztere aber allgemein durch log. artif. zu bezeichnen.

Um zu erfahren, wie man von den einen Logarithmen auf die anderen übergehen könne, sei wie früher

$$\overset{b}{\log} y = x, \text{ also } y = b^x.$$

Setzt man hierin

$$b = e^{\frac{1}{m}},$$

so ist

$$y = e^{\frac{x}{m}},$$

folglich

$$\overset{e}{\log} y = \text{log. nat. } y = \frac{x}{m} = \frac{1}{m} \cdot \overset{b}{\log} y,$$

und sofort allgemein

$$\text{log. nat. } y = \frac{1}{\text{modul.}} \cdot \text{log. artif. } y,$$

daher umgekehrt

$$\text{log. artif. } y = \text{modul.} \times \text{log. nat. } y.$$

Digitized by Google

40.

Sehen wir nun nach, wie bei unendlicher Abnahme von η die Potenz $(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}$ ihrer Grenze e sich nähert, ob wachsend oder abnehmend.

Allgemein ist

$$\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^2 = 1+\eta+\frac{\eta^2}{4},$$

also sicher

$$\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^2 > 1+\eta.$$

Erhebt man beiderseits des Ungleichheitszeichens zur Potenz $\frac{1}{\eta}$, so muss, wenn η, also auch $\frac{1}{\eta}$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ ist,

$$(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}} \lessgtr \left(1+\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{\eta:2}}$$

sein.

Wenn demnach der Werth der $\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}$ Zahl η fortwährend auf seine Halbscheid herabsinkt, so muss die Potenz $(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}$ Schritt für Schritt $\begin{matrix}\text{steigen}\\ \text{sinken}\end{matrix}$. Weil man aber von jedem beliebigen Werthe von η ausgehen kann, und durch fortgesetzte Halbirung desselben endlich unter jede angenommene noch so kleine Zahl herabkommen muss; so muss auch für jederlei Abnahme von η die betrachtete Potenz $\begin{matrix}\text{steigen}\\ \text{sinken}\end{matrix}$, folglich wird sie bei unendlicher Abnahme von η ihrer Grenze e ohne Ende $\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{abnehmend}\end{matrix}$ sich nähern. Es ist demnach für $\lim \eta \begin{matrix}>\\ =\\ <\end{matrix} 0$ entschieden

$$\lim(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}} \begin{matrix}>\\ =\\ <\end{matrix} e.$$

Wie man von hier aus in dieser Lehre weiter vorschreiten könne, lässt sich aus den Artikeln 30., 31. und 33. unschwer ersehen, weswegen wir uns mit den bisherigen Andeutungen begnügen dürfen.

Digitized by Google

E.

Aufstellung der Lehre von den natürlichen Logarithmen aus jener von den sogenannten logarithmischen Proportionaltheilen bei Zugrundlegung des gewöhnlichen Begriffs vom Logarithmus.

41.

Elementare Ableitungen des Hauptlehrsatzes von den logarithmischen Proportionaltheilen.

Erste Ableitung. Sei a irgend eine Zahl, α eine Zugabe zu ihr, durch die sie auf $a+\alpha$ gebracht wird, nebstbei sei n eine absolute ganze Zahl, so ist

$$(a+\alpha)^n = a^n + na^{n-1}\alpha + Aa^{n-2}\alpha^2,$$

wenn man diese Potenz auch nicht nach dem binomischen Lehrsatze in seiner einfachsten Fassung, sondern blos als Product von n binomischen Factoren, deren jeder $a+\alpha$ ist, durch geregelte Multiplication entwickelt, und aus allen Gliedern vom 3ten an $a^{n-2}\alpha^2$ als Factor heraushebt und den dazu gehörigen zusammengesetzten Factor durch A vorstellt.

Die Zugabe α sei nun im Vergleich mit der Zahl a selbst nur sehr klein, nemlich das Verhältniss $\frac{\alpha}{a}$ sei ein kleiner Theil von Eins, und zwar so klein, dass man für eine erste Annäherung wenigstens seine zweite Potenz $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2$ vernachlässigen, oder $\mathrm{Lim}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 = 0$ annehmen darf; zugleich sei auch die ganze Absolutzahl n nur mässig gross. Dividirt man sonach beide Theile der Gleichung durch $a^n = a.a^{n-1}$, so ist vollständig

$$\left(\frac{a+\alpha}{a}\right)^n = \frac{a+n\alpha}{a} + A\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2,$$

und für genügend kleine Verhältnisse $\frac{\alpha}{a}$ zureichend genähert

$$\left(\frac{a+\alpha}{a}\right)^n \doteq \frac{a+n\alpha}{a}.$$

Nimmt man nunmehr hiervon in Bezug auf eine beliebige Grundzahl die Logarithmen, so ist

$$\log(a+n\alpha) - \log a \doteq n[\log(a+\alpha) - \log a].$$

Digitized by Google

Die Zugaben α zu jeder beliebigen Zahl a können daher im Verhältniss zu dieser jederzeit so klein gewählt werden, dass zu jedem — mindestens mässig grossen — Vielfachen einer jeden solchen Zugabe in der Zahl höchst nahe das Ebensovielfache der Zunahme des der Zahl zugehörigen Logarithmen gehört. Mithin müssen die genügend kleinen Zunahmen der Zahlen (Logarithmande) den zugehörigen Zunahmen ihrer Logarithmen ganz nahe proportional sein.

Sind nemlich α, α' irgend zwei verhältnissmässig nur geringe Zunahmen der Zahl a, so verhält sich sehr nahe

$$\frac{\alpha}{\alpha'} \doteq \frac{\log(a+\alpha)-\log a}{\log(a+\alpha')-\log a}.$$

Zweite Ableitung. Seien α, α' zwei Zunahmen der Zahl a, durch die sie auf $a+\alpha$ und $a+\alpha'$ gelangt, so ist das Product

$$(a+\alpha)(a+\alpha') = a^2 + a\alpha + a\alpha' + \alpha\alpha',$$

und wenn man durch $a.a$ dividirt:

$$\frac{a+\alpha}{a} \cdot \frac{a+\alpha'}{a} = \frac{a+\alpha+\alpha'}{a} + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\alpha'}{a}.$$

Nun seien die Zunahmen α, α' im Verhältniss zur ursprünglichen Zahl a, nemlich die Verhältnisse $\frac{\alpha}{a}, \frac{\alpha'}{a}$, so klein, dass, während das Verhältniss $\frac{\alpha'}{\alpha}$ dieser Zunahmen unter sich ein endliches ist, die zweiten Potenzen $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2$, $\left(\frac{\alpha'}{a}\right)^2$ jene Verhältnisse unerheblich klein seien und deshalb für eine erste Näherung vernachlässigt werden dürfen, oder dass

$$\operatorname{Lim}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 = 0 \text{ und } \operatorname{Lim}\left(\frac{\alpha'}{a}\right)^2 = 0$$

gesetzt werden könne. Dann lässt sich, weil $\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\alpha'}{a} = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}$ ist, auch das Product $\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\alpha'}{a}$ vernachlässigen oder $\operatorname{Lim}\left(\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\alpha'}{a}\right) = 0$ setzen. Unter diesen Bedingungen ist demnach in zureichender Annäherung

$$\frac{a+\alpha+\alpha'}{a} \doteq \frac{a+\alpha}{a} \cdot \frac{a+\alpha'}{a},$$

und in jedem logarithmischen Systeme

$$\log(a+\alpha+\alpha') - \log a \doteq [\log(a+\alpha) - \log a] + [\log a].$$

Digitized by Google

Die Zunahmen α, α' zu jeder beliebigen Zahl a können demnach im Verhältniss zu dieser jedesmal so klein gewählt werden, dass der Summe jeglicher Zunahmen jeder beliebigen Zahl auch wieder die Summe der ihnen entsprechenden Zunahmen ihrer zugehörigen Logarithmen entspricht. Mithin gibt es zu jeder Zahl so geringe Zunahmen derselben, dass ihnen die Zunahmen ihres Logarithmus höchst nahe proportional seien.*)

Sind nemlich α, α' was immer für zwei verhältnissmässig geringe Zunahmen der Zahl a, so verhält sich höchst nahe

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\log(a+\alpha) - \log a}{\log(a+\alpha') - \log a}$$

und zwar um so genauer, je kleiner diese Zunahmen sind.

42.

Diese erwiesene Proportionalität der Zunahme des Logarithmen zur hinreichend kleinen Zunahme α des Logarithmands a kann nun bekanntlich einfacher auch durch

$$[\log(a+\alpha) - \log a] :: \alpha$$

ausgedrückt werden. Verwandelt man den hier vorfindigen Unterschied, so darf man schreiben

$$\log \frac{a+\alpha}{a} :: \alpha,$$

oder auch

$$\log\left(1+\frac{\alpha}{a}\right) :: \frac{\alpha}{a},$$

weil a beständig und α allein veränderlich vorausgesetzt ist.

---

*) Dieses einfache und leicht anwendbare Kennzeichen der directen Proportionalität, dessen ich mich bereits in mehreren Aufsätzen im Archiv mit vielem Vortheil bediente, hatte bereits Dr. J. J. Jde in seinen „Anfangsgründen der reinen Mathematik", 1. Thl. Arithm., Berlin **1803**, §. 187. S. 115, mitgetheilt und im 2. Bde. auf die Geometrie angewandt, und doch haben meines Wissens blos Prof. W. A. Förstemann in seinem „Lehrb. d. Geometrie", 2 Thle., Danzig, 1827 und Prof. J. Knar, in seinen „Anfangsgründen der reinen Mathematik", 2 Thle., Grāz, 1829, selbes benützt. Die Schriftsteller über Mechanik und Physik, wo sich mittels dieses Kennzeichens so viele Proportionalitäten aufs einleuchtendste erweisen lassen, scheinen es bisher noch vornehm völlig ignorirt zu haben. — Auch in den s. g. exacten Wissenschaften scheint also höchstens noch Autorität über angewöhnte Manieren obsiegen zu können; darum möge zur Anempfehlung dieses Satzes noch erwähnt werden, dass — wie ich schon anderswo angeführt habe — bereits La Place in der Vorrede zu seiner Mécanique celeste 1799 desselben gedacht hat.

Digitized by Google

Schreibt man sohin noch abkürzend $\frac{a}{a}=\eta$, so bleibt, bei der hier bestehenden Proportionalität, das Verhältniss $\frac{\log(1+\eta)}{\eta}$ ungeachtet der Aenderung von η unverändert und mag sonach hier durch die unveränderliche Zahl m vorgestellt werden, so dass mit Rücksicht auf die bedungene unendliche Abnahme von η und auf die logarithmische Grundzahl b, vollständig

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta)}{\eta}=m$$

ist. Dafür kann man wegen $\overset{b}{\log}1=0$ auch schreiben:

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta)-\overset{b}{\log}1}{(1+\eta)-1}=m,$$

und gelangt demnach wieder zu dem ersten in Art. 32. ausgesprochenen Lehrsatze.

Schreibt man die vorletzte Gleichung in der Form

$$\overset{b}{\log}.\left[\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}\right]=m$$

oder

$$\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}=b^m,$$

und erwägt, dass b und m bestimmte Zahlen sind; so ersieht man, dass die Potenz $(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}$ bei unendlicher Abnahme von η einer bestimmten Grenze zustrebt, welche, weil diese Potenz weder b noch m in sich führt, sondern lediglich die an der äussersten Grenze verschwindende Veränderliche η enthält, nothwendig eine besondere Zahl sein muss, die wir dem Gebrauche der meisten Anderen folgend, durch e bezeichnen wollen.

Sonach setzen wir

$$\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}=e$$

und es ist

$$b^m=e.$$

Und so sehen wir uns denn wieder auf dem durch unseren früheren Artikel (22 — 24, 29—33) bereits gebahnten Wege.

Digitized by Google

43.

Schlussbemerkungen.

Ich schmeichle mir demnach durch die That erwiesen zu haben, dass die Lehre von den natürlichen Logarithmen, ohne Zuhilfenahme der, einer zu weitwendigen Erörterung bedürfenden, convergirenden unendlichen Reihen, sogar — wie die in *D.* und *E.* zergliederten Verfahren darthun — höchst ungezwungen und einfach abgehandelt, und sofort unbedenklich in die niedere Algebra aufgenommen werden könne. Elementare, diese Reihen gleichfalls ausschliessende Methoden der wirklichen Berechnung natürlicher und künstlicher Logarithmen der Zahlen mittels Hilfstafeln, welche diese Lehre beschliessen müssen, darf ich wohl hier übergehen, da sie ohnehin schon von mehreren Schriftstellern gelehrt worden sind. Die bequemsten darunter scheinen mir die von Thibaut in seinem „Grundriss der allgem. Arithm. o. Analysis", Göttingen, 1809 und 1830, mitgetheilten zu sein.

Dadurch habe ich zugleich das Versprechen erfüllt, welches ich in meiner jüngst veröffentlichten, von der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag der Ehre der Aufnahme in ihre Sammlung von Abhandlungen (V. Folge. Band 6) gütigst gewürdigten, grösseren Monographie, betitelt: „Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra, oder einer Grundlehre von der Ablenkung algeb. Grössenbezeichnungen", 4. 1850. Prag, (Calve), §. 57, Note, gegeben habe. Und sonach dürften beide diese Abhandlungen Kennern genugsam verständlich zeigen, wie zur — noch immer sehr noth thuenden — streng wissenschaftlichen Vervollständigung und folgerechten Richtung der späteren Partien der Algebra, nach den 7 Grundrechnungen und ihrer Anwendung auf die erst- und zweitgradigen Gleichungen, nach einander die Lehren von den natürlichen Logarithmen, von der Ablenkung der algebraischen Grössenbeziehungen, vom Potenziren nach imaginären (ablenkend beziehlichen) Exponenten und von den damit engstens zusammenhängenden, folglich nur allein in die Algebra gehörigen s. g. goniometrischen Functionen abgehandelt, und schliesslich auf die, ihrer bedürfende, Lehre von den allgemeinen höheren Gleichungen angewendet werden können.

Nebstbei wird eine solche elementare Darstellung der Lehre von den natürlichen Logarithmen auch von einer systematischen Grundlage der Differentialrechnung geheischt, damit man die Herleitung der Differentialverhältnisse exponentieller logarithmischer und goniometrischer Functionen, ohne Hilfe der convergirenden Reihen und der Geometrie, durchzuführen und sofort zur Entwicklung der Functionen in convergente Reihen nach dem Taylor'schen Lehrsatze überzugehen vermöge.

Digitized by Google

IV.

Das Malfattische Problem. Beweis der Steinerschen Construction.

Von dem

Herrn Oberlehrer A. Quidde

am Gymnasium zu Herford.

Die folgenden Untersuchungen wurden veranlasst durch die von Adams im Jahre 1846 herausgegebene kleine Schrift über das Malfattische Problem. Die Analysis, welche Adams zu der eleganten Construction von Jakob Steiner gibt, befriedigte mich nicht, weil sie nicht rein planimetrisch war, sondern auf eine Gleichung zweiten Grades sich stützte. Die folgende Analysis hält sich in rein geometrischen Betrachtungen und ist, wenn die vorbereitenden Sätze einmal bekannt sind, zugleich sehr einfach und übersichtlich.

Ohne den Ort der Punkte weiter zu erörtern, von welchen an zwei Kreise Tangenten mit bestimmter Summe oder Differenz gehen, welcher Ort ein Kegelschnitt ist, leuchtet doch so viel auf den ersten Blick ein, dass die Tangenten, die von den Punkten der gemeinschaftlichen inneren oder gemeinschaftlichen äusseren Tangenten an die Kreise gehen, stets eine bestimmte Summe oder Differenz haben, nämlich das zwischen den Berührungspunkten liegende Stück derselben. Dass dieser Satz auch umgekehrt gilt, dass also, wenn die Summe oder Differenz der von einem Punkte an zwei Kreise gehenden Tangenten der Länge der von den Berührungspunkten begrenzten inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise gleich ist, dieser Punkt auf einer inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise lie-

Digitized by Google

gen muss, lässt sich leicht zeigen. Es sei M (Taf. III. Fig. 4.) ein solcher Punkt, dass $MB-MA=PQ$, und es liege M nicht auf PQ; seien D und C die Schnittpunkte von BM und AM mit PQ, so $DB=DP$, $CA=CQ$; $MB=DB-DM$, $MA=CA+MC$; es soll $MB-MA=PQ$, also $DB-DM-CA-MC=PQ$, oder $DP-DM-CQ-MC=PQ$ oder $DC+PQ-DM-MC=PQ$ oder $DC=DM+MC$ sein, was nicht möglich ist, wenn M nicht auf PQ liegt.

Man habe nun drei Kreise 1, 2, 3, mit drei gemeinschaftlichen Tangenten (Taf. III. Fig. 5.), die durch einen Punkt P gehen; A, B seien die Berührungspunkte des ersten, C, D des zweiten, E, F des dritten. Es seien ferner die gemeinschaftlichen Tangenten innere wie in der Figur. Man hat dann

$$PA+PF=AF, \quad PD+PE=DE;$$

folglich, da $PF=PE$,

$$PA-PD=AF-DE;$$

da aber

$$PA-PD=PB-PC=BC;$$

so ist

$$AF-DE=BC.$$

Construirt man nun für die Kreise 3 und 1 die zweite innere gemeinschaftliche Tangente F_1A_1, ebenso für 3 und 2 die 2te E_1D_1, welche sich in P_1 schneiden, so hat man

$$P_1F_1+P_1A_1=A_1F_1, \quad P_1E_1-P_1D_1=D_1E_1;$$
$$P_1A_1+P_1D_1=A_1F_1-D_1E_1;$$

und da

$$A_1F_1=AF, \quad D_1E_1=DE,$$

also auch

$$A_1F_1-D_1E_1=BC,$$

so ist auch

$$P_1A_1+P_1D_1=BC,$$

d. h. P_1 muss wieder auf einer der inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise 1 und 2 liegen, dieses Mal zwischen den beiden Berührungspunkten. Diese kann nicht wieder die erste BC sein, wenn sich nicht die Kreise 1 und 2 selbst berühren.

Denn man nenne (Taf. IV. Fig. 6.) S und R die Durchschnittspunkte von FA und F_1A_1, und von ED mit E_1D_1, und

Digitized by Google

betrachte diese vier Tangenten. Wäre nun PP_1, die Diagonale des Vierecks $RPSP_1$, die gemeinschaftliche Tangente der Kreise 1 und 2 mit den Berührungspunkten B und C, so wäre

$$PB=\frac{1}{2}(PP_1+PS+P_1S),\ PC=\frac{1}{2}(PP_1+PR+P_1R)$$

und

$$PS+P_1S=P_1F_1+SF-SF_1-PF=P_1F_1-PF=P_1E_1-PE$$
$$=P_1E_1+RE_1-RE+PR=P_1R+RP;$$

also

$$PB=PC.$$

Es lässt sich aber die obige Schlussweise nicht auf jede Art gemeinschaftlicher Tangenten anwenden. Hätte man z. B. statt des Kreises 3 (Taf. III. Fig. 5.) den Kreis 4 mit den Berührungspunkten G und H, so hätte man

$$PG+PD=DG,\ PA-PH=HA;$$

und wollte man nun $PG=PH$ verschwinden machen, so erhielte man

$$PD+PA=DG+AH,$$

welches keine Beziehung zwischen den Längen der von den Berührungspunkten begrenzten gemeinschaftlichen Tangenten BC, AH, DG ergibt. Eine solche findet überhaupt nur statt für entweder drei innere oder eine innere und zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten, wie die Betrachtung einer Figur mit Leichtigkeit lehrt. Somit hätten wir also folgenden

Lehrsatz 1. Wenn drei innere gemeinschaftliche Tangenten dreier Kreise oder eine innere mit zwei äusseren einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so haben die drei anderen gemeinschaftlichen Tangenten derselben Art ebenfalls einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

In dem besonderen Falle, dass zwei solche Tangenten eine gerade Linie bilden, ist der Berührungspunkt als ihr Durchschnittspunkt zu betrachten. Z. B. Taf. IV. Fig. 7. Die äusseren Tangenten der Kreise 1 und 3, 2 und 3 fallen in die Gerade GH zusammen. Wenn nun die anderen äusseren Tangenten dieser Kreise GB, HD sich auf der inneren der Kreise 1 und 2 in P schneiden, so wird die andere innere von 1 und 2 durch den Berührungspunkt F gehen; denn

$$FA-FC=KB-DE=PB-PD=PL-PM=LM.$$

woraus nach dem Obigen die Behauptung sich ergibt.

Digitized by Google

Wir sprechen den hiermit erwiesenen Satz in Rücksicht auf unsere Aufgabe vorzugsweise für den folgenden besonderen Fall aus:

Lehrsatz 2. Wenn die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten (Taf. IV. Fig. 7.) des 1ten und 3ten, 2ten und 3ten dreier Kreise, BK und DE, sich auf der inneren des 1ten und 2ten LM schneiden, in P, während die anderen äusseren AF, CF eine gerade Linie bilden, so geht die andere innere durch den Berührungspunkt F des 3ten Kreises.

Wenn (Taf. IV. Fig. 8.) 4 durch denselben Punkt gehende Gerade (Strahlen) von zwei geraden Linien geschnitten werden, die erste in A und A_1, die zweite in B und B_1, die dritte in C und C_1, die vierte in D und D_1, so sind die aus den Abschnitten entsprechend gebildeten anharmonischen Verhältnisse einander gleich. Ein solches anharmonisches Verhältniss ist bekanntlich das Verhältniss von zwei Verhältnissen. Die Glieder des einen sind zwei von demselben Punkte ausgehende Abschnitte, die des anderen erhält man, wenn man den Ausgangspunkt in jenen mit dem noch übrigen vierten Punkte vertauscht. Die Figur ist leicht zu entwerfen. Es wäre demnach

$$\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} : \frac{D_1B_1}{D_1C_1}$$

oder

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}, \quad \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A_1C_1}{A_1D_1} : \frac{B_1C_1}{B_1D_1}.$$

Der Beweis ist leicht zu führen, wenn wir ihn nicht als bekannt voraussetzen wollen. Nehmen wir z. B. die erste Gleichung.

$$\frac{\Delta SAB}{\Delta SAC} = \frac{AB}{AC}$$

wegen der gleichen Höhe; eben so

$$\frac{\Delta SDB}{\Delta SDC} = \frac{DB}{DC}, \quad \frac{\Delta SA_1B_1}{\Delta SA_1C_1} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}, \quad \frac{\Delta SD_1B_1}{\Delta SD_1C_1} = \frac{D_1B_1}{D_1C_1}.$$

Wegen der gleichen Winkel an der Spitze verhalten sich aber

$$\frac{\Delta SAB}{\Delta SA_1B_1} = \frac{SA.SB}{SA_1.SB_1}, \quad \frac{SAC}{SA_1C_1} = \frac{SA.SC}{SA_1.SC_1}, \quad \frac{SDB}{SD_1B_1} = \frac{SD.SB}{SD_1.SB_1},$$

$$\frac{SDC}{SD_1C_1} = \frac{SD.SC}{SD_1.SC_1};$$

Digitized by Google

folglich

$$\frac{SAB}{SAC} : \frac{SA_1B_1}{SA_1C_1} = \frac{SA.SB}{SA.SC} : \frac{SA_1.SB_1}{SA_1.SC_1} = \frac{SB}{SC} : \frac{SB_1}{SC_1}$$

und

$$\frac{SDB}{SDC} : \frac{SD_1B_1}{SD_1C_1} = \frac{SD.SB}{SD.SC} : \frac{SD_1.SB_1}{SD_1.SC_1} = \frac{SB}{SC} : \frac{SB_1}{SC_1},$$

woraus die Behauptung sich ergibt.

Ob die Linien auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von S gezogen sind, ist ganz gleichgültig. — Offenbar kommt es nicht darauf an, dass die Strahlen SA und SA_1, SB und SB_1 u. s. w. in derselben geraden Linie zusammenliegen; die Strahlenbüschel können auch eine getrennte Lage haben, wenn sie sich nur zusammenlegen lassen, wenn also nur die entsprechenden Strahlen gleiche Winkel mit einander bilden. — Wenden wir nun diesen Satz auf 4 Tangenten eines Kreises an. Es seien (Taf. V. Fig. 9.) B und E die Berührungspunkte zweier von A ausgehenden Tangenten eines Kreises um M; eine dritte schneide AB in C, AE in G, eine vierte AB in D, AE in F; ziehe MA, MB, MC, MD, MG, MF, ME. Winkel $CMD = ACM - ADM = \frac{1}{2} ACG - \frac{1}{2} ADF$; Winkel $GMF = \frac{1}{2} AFD - \frac{1}{2} AGC$. Es ist aber

$$ACG + AGC = ADF + AFD,$$

also auch

$$\frac{1}{2} ACG - \frac{1}{2} ADF = \frac{1}{2} AFD - \frac{1}{2} AGC,$$

also

$$CMD = GMF.$$

Ferner

$$DMB = 90^0 - \frac{1}{2} ADF,$$

$$FMA = \frac{1}{2} DAF + \frac{1}{2} DFA + ADF = 90^0 + \frac{1}{2} ADF,$$

so dass FMA = dem Winkel, den die Verlängerung von BM über M hinaus mit MD bildet. Endlich $AME = AMB$ oder auch der Winkel, den die Verlängerung von EM mit AM = dem, den die Verlängerung von BM mit AM bildet. Die beiden Strahlen-

Digitized by Google

büschel $MCDBA$ und $MGFAE$ lassen sich also in einen einzigen zusammenlegen, dass MC auf MG, MD auf MF, MB auf die Verlängerung von MA und MA auf die Verlängerung von ME fällt. Daher hat man zwischen den Abschnitten der von A ausgehenden Tangenten folgende Beziehung:

$$\frac{GE}{GF} : \frac{AE}{AF} = \frac{CA}{CD} : \frac{BA}{BD},$$

oder, da $AB = AE$:

$$GE.AF.CD = GF.CA.BD.$$

Beschreibt man nun einen Kreis, der DF, und AD in C, und einen zweiten, der CG, und AG in F berührt, mit den Mittelpunkten N und P, so ist

$$\frac{PF}{ME} = \frac{FG}{EG}, \quad \frac{NC}{MB} = \frac{CD}{BD};$$

und dies in obige Gleichung eingesetzt:

$$AF.ME.NC = AC.PF.MB,$$

oder da $MB = ME$:

$$AF.NC = AC.PF, \quad AF : FP = AC : CN;$$

woraus sich ergibt, dass Winkel $PAF = NAC$. Also

Lehrsatz 3. Wenn vier gerade Linien 1, 2, 3, 4 einen Kreis berühren und man beschreibt zwei Kreise, deren einer die Tangente 1 im Durchschnittspunkte mit 3, und Tangente 4, der andere 2 im Durchschnittspunkte mit 4, und Tangente 3 berührt, so bildet die vom Durchschnittspunkte der Tangenten 1 und 2 nach dem Mittelpunkte des ersten gezogene Linie mit der Tangente 1 denselben Winkel, wie die nach dem Mittelpunkte des zweiten gezogene mit der Tangente 2.

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zur Malfattischen Aufgabe selbst. Sie heisst:

In ein Dreieck drei Kreise zu beschreiben, welche einander und einzeln je zwei Seiten des Dreiecks berühren.

Wir nennen im Folgenden die vorkommenden Kreise mit ihren Mittelpunkten.

Digitized by Google

Man denke sich in das Dreieck ABC drei Kreise beschrieben α, β, γ, von denen α die Seiten AB und AC, β die Seiten BA und BC, γ die Seiten CA, CB berührt und die im Uebrigen so beschaffen seien, dass drei ihrer gemeinschaftlichen inneren Tangenten sich in einem Punkte P schneiden. Die der Kreise β und γ schneide ferner die Seite BC in k_1, die der Kreise γ und α schneide AC in l_1, die der Kreise α und β schneide AB in m_1. Man beschreibe drei Kreise, welche je zwei der 3 gemeinschaftlichen Tangenten von α, β, γ, und je eine Seite des Dreiecks berühren, und zwar jedesmal die Seite, welche von dem Kreise, an welchem jene zu gleicher Zeit Tangenten sind, nicht berührt wird; also einen Kreis a, welcher Pl_1, Pm_1 und BC, einen b, welcher Pm_1, Pk_1 und AC, einen c, welcher Pk_1, Pl_1 und AB berührt. Es haben dann die Kreise a und b die Linie Pm_1, b und c die Pk_1, c und a die Pl_1 zur gemeinschaftlichen inneren Tangente. Da demnach drei innere gemeinschaftliche Tangenten dieser Kreise a, b, c sich in demselben Punkte, in P schneiden, so werden auch die zweiten inneren gemeinschaftlichen Tangenten (nach Lehrsatz 1.) einen gemeinsamen Durchschnittspunkt haben. Er heisse S. Betrachtet man die Kreise a, b und γ, so zeigt sich, dass zwei äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente P zum gemeinsamen Durchschnittspunkte haben, nämlich die äussere von a und γ, die Verlängerung von Pl_1, die äussere von b und γ, Pk_1, die innere von a und b, Pm_1. Es werden also auch die anderen äusseren und die andere innere sich in demselben Punkte schneiden. Die zweite äussere von a und γ ist BC, von b und γ, AC, so dass also die zweite innere von a und b durch C gehen, SC sein muss. Auf gleiche Art ergibt sich, dass die zweite innere gemeinschaftliche Tangente von b und c, SA, von c und a, SB sein muss.

Es haben aber die ursprünglichen Kreise noch drei andere innere gemeinschaftliche Tangenten, welche sich ebenfalls in demselben Punkte schneiden müssen. Dieser Punkt heisse P_1 und es sei, der obigen Bezeichnung entsprechend, k der Punkt, in welchem BC von der an β und γ, l wo AC von der an γ und α, m wo AB von der an α und β getroffen wird. Man construire wieder drei Kreise, a_1 berührt von BC, P_1m und P_1l; b_1 berührt von AC, P_1m und P_1k; c_1 berührt von AB, P_1k und P_1l. Durch Anwendung derselben Schlüsse auf diese drei Kreise, wie oben auf a, b, c, ergibt sich, dass, da ihre ersten inneren gemeinschaftlichen Tangenten in P_1 zusammenlaufen, ihre zweiten ebenfalls in Einem Punkte zusammenlaufen müssen, den wir S_1 nennen; und dass diese zweiten S_1A, S_1B, S_1C sein müssen.

Ferner: a hat mit γ die gemeinschaftliche äussere Tangente Pl_1; mit β, Pm_1; die eine innere von γ und β, Pk_1 geht ebenfalls durch P; die anderen äusseren von a und γ, a und β fallen in die Gerade BC zusammen; also muss (nach Lehrsatz 2) die zweite innere von β und γ, P_1k, durch den Berührungspunkt von a mit BC gehen; k muss der Berührungspunkt von a mit BC sein. Hiernach ist es leicht zu zeigen, dass k_1 der Berührungspunkt von a_1 mit BC sein muss, so wie l von b, l_1 von b_1 mit AC, m von c, m_1 von c_1 mit AB.

Eine Anwendung des Lehrsatzes 3 auf den Kreis β z. B., mit den Kreisen c_1 und a, wo Bm_1, Bk, P_1k, Pm vier Tangenten von β sind. c_1 die Bm_1 in m_1, ausserdem P_1k; a die Bk in k, ausserdem Pm_1 berührt, zeigt man sogleich, dass $\angle aBk = c_1Bm_1$ oder $SBC = S_1BA$. Ebenso $SCB = S_1CA$, $SAC = S_1AB$.

Wären nun die ersten Kreise α, β, γ so genommen, dass

$$SCA = \frac{1}{2}ACB,\ SBC = \frac{1}{2}ABC,\ SAC = \frac{1}{2}CAB,$$

so würden SC und S_1C, SB und S_1B, SA und S_1A, S und S_1 zusammenfallen und damit auch die Kreise a und a_1, b und b_1, c und c_1. Es fiele dann aber auch Pl_1 mit P_1l zusammen, als zweite innere gemeinschaftliche Tangente der vereinigten Kreise a und a_1 mit den vereinigten b und b_1, deren erste SC, ferner Pk_1 mit P_1k, Pm_1 mit P_1m, P mit P_1. Somit wären die beiden inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise α und β, der Kreise α und γ, der Kreise β und γ jedesmal in eine zusammengefallen; die Kreise würden einander berühren. Hiermit sind wir bei der Striner'schen Auflösung unserer Aufgabe angelangt: Halbire die Winkel des Dreiecks, beschreibe in die dadurch entstandenen Dreiecke (SAB, SBC, SCA, wenn SA, SB, SC die die Winkel halbirenden sind) Kreise, construire ihre inneren gemeinschaftlichen Tangenten; diese werden die gemeinschaftlichen Tangenten der gesuchten Kreise sein.

Digitized by Google

V.

Discussion einer Curve der dritten Ordnung und Dreitheilung des Winkels mit Hülfe dieser Curve.

Von dem

Herrn Dr. J. R. Boyman,

Gymnasiallehrer zu Coblenz.

1.

Bezeichnen bei der Annahme eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems a und b zwei constante Geraden, die wir Parameter nennen wollen, so drückt die Gleichung

$$(x-a)x^2+(x+a)y^2=2bxy$$

eine Linie der dritten Ordnung aus, wie man sogleich ersieht, wenn man diese Gleichung nach der Veränderlichen x ordnet, wodurch man nämlich erhält:

$$x^3-ax^2-2bxy+xy^2+ay^2=0.$$

Wäre von den beiden Constanten die eine $b=0$, so gäbe die resultirende Gleichung

$$x^3-ax^2+xy^2+ay^2=0$$

immer noch eine Curve der dritten Ordnung, und die Form dieser Gleichung zeigt, dass die durch dieselbe dargestellte Curve zur Abscissenaxe symmetrisch liegt, also durch dieselbe in zwei congruente Zweige getheilt wird. — Wäre dagegen $a=0$, so erhielte man

$$x^2 - 2by + y^2 = 0,$$

die Gleichung eines Kreises (bezogen auf einen Punkt der Peripherie). — Wären endlich beide Constanten gleich Null, so ergäbe sich:

$$x^2 + y^2 = 0,$$

die Gleichung eines Punktes, des Anfangspunktes der Coordinaten.

2.

Gehen wir zur allgemeinen Gleichung zurück, um zunächst die Gestalt der durch dieselbe ausgedrückten Curve (Taf. 5. Fig. 10.) kennen zu lernen.

Setzt man zu dem Ende $x=0$, so ergiebt sich $y=0$, d. h. die Curve geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Dies war schon a priori daraus ersichtlich, dass in der obigen Gleichung kein constantes Glied enthalten ist.

Setzt man $x=a$, so erhält man $y=0$ und $y=b$, d. h. die Curve schneidet die Abscissenaxe in einem Punkte H in der Entfernung a vom Coordinaten-Anfang, und die auf die Abscissenaxe in H errichtete Senkrechte in in einem Punkte E in dem Abstande b von dieser Axe.

Die in der Gleichung vorkommende Constante a ist also vom Anfange der Coordinaten an auf der Abscissenaxe, die Constante b dagegen auf einer in der Entfernung a vom Coordinaten-Anfang zur Ordinatenaxe parallelen Geraden, und zwar von der Abscissenaxe an genommen. Die Gerade a ist der Hauptparameter, die Gerade b der Nebenparameter der Curve.

Setzt man $x=-a$, so ergibt sich $y=\frac{a^2}{b}$, d. h. die in der Entfernung $-a$ vom Anfang der Coordinaten zur Abscissenaxe errichtete Senkrechte begegnet der Curve nur in einem einzigen Punkte L, dessen Ordinate $y=\frac{a^2}{b}$.

3.

Setzt man $x=b$, so findet man $y=b$ und $y=\frac{b(b-a)}{b+a}$, d. h. die in der Entfernung $OB=b$ vom Coordinaten-Anfang zur Ordinatenaxe parallel gezogene Gerade schneidet die Curve in zwei Punkten K und D; für diesen ist die

Digitized by Google

Ordinate gleich der Abscisse, für jenen ist die Ordinate der vierten Proportionale zu der Summe beider Parameter, ihrer Differenz und dem Nebenparameter gleich.

Setzt man $x=-b$, so ergibt sich $y=b$ und $y=\frac{b(b+a)}{b-a}$, d. h. auch die in der Entfernung $OM=-b$ vom Coordinaten-Anfang zur Ordinatenaxe parallel gezogene Gerade schneidet die Curve in zwei Punkten J und N; auch hier ist für diesen die Ordinate gleich der Abscisse, während für jenen die Ordinate der vierten Proportionale zu der Differenz beider Parameter, ihrer Summe und dem Nebenparameter gleich ist.

Man wird bemerken, dass die Ordinaten der Punkte L und E, deren Abscissen dem Hauptparameter gleich, aber einander entgegengesetzt sind, sich wie die Quadrate des Haupt- und Nebenparameters, und dass die Ordinaten der Punkte J und R, deren Abscissen dem Nebenparameter gleich, jedoch auch einander entgegengesetzt sind, sich wie die Quadrate der Summe und der Differenz beider Parameter verhalten.

Setzt man $x=\pm\infty$, so ersieht man aus der in Beziehung auf y aufgelös'ten Gleichung

$$y=\frac{x(b\pm\sqrt{a^2+b^2-x^2})}{a+x},$$

dass y alsdann imaginär ist; auch erkennt man, dass y so lange imaginär sein wird, als

$$x>\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

ist: die Abscissen der Curve sind also immer kleiner als die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der beiden Parameter.

4.

Setzt man $y=0$, so ergibt sich $x=0$ und $x=a$: die Curve schneidet also die Abscissenaxe ausser im Anfangspunkt der Coordinaten noch in einem zweiten, auf der positiven Seite der Ordinatenaxe gelegenen Punkte H; die Abscisse dieses Punktes ist dem Hauptparameter gleich.

Setzt man $y=b$, so folgt $x=a$, $x=b$, $x=-b$, d. h. die Curve wird durch eine in dem Abstande b zur Abscissenaxe parallel gezogene Gerade in drei Punkten E

Digitized by Google

D, *N* geschnitten, von welchen der erste den Hauptparameter, die beiden andern (der eine auf der positiven, der andere auf der negativen Seite der Ordinatenaxe) den Nebenparameter zur Abscisse haben.

Setzt man $y=\pm n$, so ergibt sich:

$$x^3-ax^2+(n^2\mp 2bn)x+an^2=0.$$

Da in dieser Gleichung eines ungeraden Grades das letzte Glied positiv ist, so hat dieselbe eine negative reelle Wurzel; die beiden andern Wurzeln der Gleichung werden für

$$n>\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2+b^2}\pm b,$$

wo $+b$ dem Werthe $+n$, und $-b$ dem Werthe $-n$ entspricht, imaginär; für kleinere Werthe von n sind beide, wie man aus dem doppelten Zeichenwechsel ersieht, beständig positiv und reell: die Curve hat demnach nur einen Zweig mit positiven Ordinaten und negativen Abscissen, und ebenso nur einen Zweig mit negativen Abscissen und zugleich negativen Ordinaten.

Setzt man endlich $y=\pm\infty$, so ergibt sich $x=-a$, d. h. die Curve erstreckt sich sowohl auf der positiven als auch auf der negativen Seite der Abscissenaxe, aber nur auf der negativen Seite der Ordinatenaxe in's Unendliche. Während aber die Ordinaten in's Unendliche wachsen, nähern sich die Abscissen einer endlichen Gränze, welche dem Hauptparameter gleich ist.

5.

Man lege durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine beliebige die Curve schneidende gerade Linie *OA*, welche den Nebenparameter *HE* oder dessen Verlängerung in dem Punkte *C* begegne. Die Gleichung einer solchen durch den Coordinaten-Anfang gehenden Geraden ist bekanntlich

$$y=\gamma.x.$$

Daher ist $CH=\gamma.a$, und da $EC=EH-CH$, so ist

$$EC=b-\gamma a. \qquad 1)$$

Seien ferner x_1 und y_1 die Ordinaten des Durchschnittspunktes *A* der Geraden *OA* mit der Curve, und sei *E* mit *A* verbunden, so ist

$$EA=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen, der Curve und der Geraden, in Beziehung auf diesen Durchschnittspunkt, nämlich:

Digitized by Google

$$x_1^3 - ax_1^2 - 2bx_1y_1 + x_1y_1^2 + ay_1^2 = 0,$$

$$y_1 = \gamma x_1,$$

findet man aber für die Coordinaten x_1 und y_1 des Durchschnittspunktes A folgende Werthe:

$$x_1 = \frac{a + 2b\gamma - a\gamma^2}{1 + \gamma^2}, \quad y_1 = \frac{a\gamma + 2b\gamma^2 - a\gamma^3}{1 + \gamma^2}.$$

Substituirt man diese in den obigen Wurzelausdruck von EA, so ergibt sich nach Ausziehung der Wurzel und einigen nöthigen Reductionen:

$$EA = b - \gamma a. \qquad 2)$$

Aus (1) und (2) folgt nun, dass $EA = EC$, d. h. in Worten: Jede beliebige durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte gerade Linie schneidet den Nebenparameter oder dessen Verlängerung und die Curve in zwei Punkten, welche von dem Endpunkte E dieses Parameters gleich weit entfernt sind; — diese drei Punkte bilden also immer ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Scheitel der Punkt E ist.

Diese Eigenschaft der Curve, auf welche wir später noch zurückkommen werden, gibt uns zunächst ein leichtes Mittel an die Hand, dieselbe durch eine Reihe von Punkten zu construiren, und darnach hat dieselbe die Gestalt, wie Taf. V. Fig. 10. zeigt. Auch liesse sich wohl ein Instrument angeben, mittelst dessen man die Curve durch einen continuirlichen Zug beschreiben könnte, indem man beachtet, dass der Fusspunkt F der die Grundlinie AC des gleichschenkligen Dreieckes halbirenden Senkrechten EF in der über OE als Durchmesser beschriebenen Kreislinie liegt, dass also die Durchschnittspunkte der Curve und des Nebenparameters mit jeder durch den Coordinaten-Anfang gehenden geraden Linie OA, nämlich A und C, von dem Durchschnittspunkte dieser Kreislinie mit derselben stets gleich weit entfernt sind. — Dies weiter auszuführen, ist indess hier nicht unsere Absicht.

6.

Ist der Nebenparameter $b = 0$, so fällt der Punkt E mit dem Punkte H, und die Linie OE mit der Linie OH, dem Hauptparameter, zusammen. Alsdann hat man (Taf. V. Fig. 11.) ebenfalls $HR = HC$, und der Fusspunkt F des die Grundlinie RC des gleichschenkligen Dreiecks RHC halbirenden Perpendikels HF liegt hier immer auf der über dem Parameter a als Durchmesser beschriebenen Kreislinie. Daraus also folgt, dass die beiden Punkte R und C, in welchen eine beliebige durch den Anfang

der Coordinaten gehende gerade Linie diese spezielle Curve und die den Nebenparameter vertretende Senkrechte *HE* schneidet, wiederum von dem Durchschnittspunkte derselben mit dieser Kreislinie gleich weit entfernt sind.

7.

Bezeichnen v und w die Segmente, welche eine an die Curve gelegte Tangente resp. von der Abscissen- und Ordinatenaxe abschneidet, so ist bekanntlich:

$$v = x - y\frac{dx}{dy}, \quad w = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Durch Differentiation der allgemeinen Gleichung der Curve erhält man aber:

$$(3x^2 - 2ax - 2by + y^2)dx - (2bx - 2xy - 2ay)dy = 0.$$

Bildet man hieraus die Differentialquotienten $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{dy}{dx}$, und substituirt dieselben in die vorstehenden Formeln, so ergibt sich:

$$v = \frac{3x^3 - 2ax^2 - 4bxy + 3xy^2 + 2ay^2}{3x^2 - 2ax - 2by + y^2},$$

$$w = \frac{2ax^2 - 3x^3 + 4bxy - 3xy^2 - 2ay^2}{2bx - 2xy - 2ay}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken für y und x die Werthe, welche den Punkten der Curve in unendlicher Entfernung entsprechen, nämlich $y = \pm\infty$ und $x = -a$, so gehen dieselben in folgende über:

$$v = -a, \quad w = \pm\infty.$$

Die Curve hat also eine Asymptote, welche zu beiden sich in's Unendliche erstreckenden Zweigen gehört; es ist diejenige Gerade *KL* (Taf. V. Fig. 10. und 11.), welche auf der negativen Seite der Ordinatenaxe mit dieser in der Entfernung a parallel gezogen ist.

8.

Aus dem nachstehenden Ausdrucke des Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2ax - 2by + y^2}{2bx - 2xy - 2ay}$$

Digitized by Google

ergeben sich durch Substitution der entsprechenden Werthe von x und y für die trigonometrischen Tangenten der Berührenden in den Punkten E, H, D, N, in welchen die in der Entfernung a mit der Ordinatenaxe und in der Entfernung b mit der Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden die Curve schneiden, folgende Werthe:

$$\frac{b^2-a^2}{2ab}, \quad \frac{a}{2b}, \quad -\frac{b-a}{a}, \quad -\frac{b+a}{a};$$

darnach lassen sich die Berührenden selbst leicht construiren. — Da nun ferner:

$$\frac{a}{2b}\cdot-\frac{b-a}{a}\cdot-\frac{b+a}{a}=\frac{b^2-a^2}{2ab},$$

so ergibt sich: das Product der trigonometrischen Tangenten der Berührenden für die einfachen Durchschnittspunkte H, D, N ist der trigonometrischen Tangente der Berührenden für den doppelten Durchschnittspunkt E gleich.

9.

Die Substitution der entsprechenden Werthe von x und y für den Anfangspunkt der Coordinaten lässt obigen Differentialquotienten unbestimmt. Wir differentiiren daher die Differentialgleichung der ersten Ordnung noch einmal, und indem man dx und dy constant annimmt, erhält man:

$$(a-3x)dx^2+2(b-y)dxdy-(a+x)dy^2=0,$$

aus welcher Gleichung sich sogleich ergibt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(b-y)\pm\sqrt{(a+x)(a-3x)+(b-y)^2}}{a+x}.$$

Setzt man hierin die dem Anfangspunkt der Coordinaten entsprechenden Werthe von x und y, nämlich $x=0$ und $y=0$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Dieser Ausdruck enthält aber zwei verschiedene Werthe: Die Curve wird demnach im Anfangspunkt der Coordinaten von zwei Geraden berührt, und dieser Punkt ist folglich ein doppelter Punkt, indem zwei Zweige der Curve sich in demselben durchschneiden.

Digitized by Google

Mit Hülfe der vorstehenden trigonometrischen Tangenten lassen sich die beiden Berührenden tt' und TT' im Anfangspunkt der Coordinaten leicht construiren, wobei wir also nicht verweilen.

Nimmt man das Product der beiden trigonometrischen Tangenten, so findet man:

$$\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a} \times \frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{a} = -1,$$

d. h. die beiden Berührenden im Anfangspunkt der Coordinaten stehen senkrecht auf einander.

10.

Will man die Curve auf diese im Coordinaten-Anfang berührenden Geraden als Coordinatenaxen beziehen, so nehme man die bekannten Transformationsformeln und setze:

$$x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \text{ und } y = y'\cos\varphi - x'\sin\varphi,$$

oder da man

$$\sin\varphi = \frac{b+c}{\sqrt{2c(b+c)}} \text{ und } \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{2c(b+c)}}$$

findet, wo $c = \sqrt{a^2+b^2}$ gesetzt ist, die Ausdrücke:

$$x = \frac{ax'+(b+c)y'}{\sqrt{2c(b+c)}} \quad \text{und} \quad y = \frac{ay'-(b+c)x'}{\sqrt{2c(b+c)}}.$$

Substituirt man diese in die Gleichung der Curve

$$x^3 - ax^2 - 2bxy + xy^2 + ay^2 = 0,$$

so erhält man, indem man statt x' und y' wieder x und y schreibt, folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &(a^3+a(b+c)^2)x^3 + (a^2(b+c) + (b+c)^3)x^2y \\ &-(a^3 - 2ab(b+c) - a(b+c)^2)\sqrt{2c(b+c)}\,.\,x^2 \\ &-2(a^2b+2a^2(b+c) - b(b+c)^2)\sqrt{2c(b+c)}\,.\,xy \\ &+(a^3 - 2ab(b+c) - a(b+c)^2)\sqrt{2c(b+c)}\,.\,y^2 \\ &+(a^3+a(b+c)^2)xy^2 + (a^2(b+c)+(b+c)^3)y^3 \end{aligned}\right\} = 0,$$

oder wie sich durch Entwicklung der Coefficienten ergibt:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{r} 2ac(b+c)x^3+2c(b+c)^2x^2y \\ +4ab(b+c)\sqrt{2c(b+c)}\ .\ x^2 \\ -4(a^2-b^2)(b+c)\sqrt{2c(b+c)}\ .\ xy \\ +4ab(b+c)\sqrt{2c(b+c)}\ .\ y^2 \\ +2ac(b+c)xy^2+2c(b+c)^2y^3 \end{array}\right\}=0,$$

und diese Gleichung geht durch Ausscheidung des gemeinsamen Factors $2(b+c)$ endlich in die folgende über:

$$\left.\begin{array}{r} acx^3+c(b+c)x^2y+2ab\sqrt{2c(b+c)x^2} \\ -2(a^2-b^2)\sqrt{2c(b+c)}\,xy \\ +2ab\sqrt{2c(b+c)}y^2+acxy^2+c(b+c)y^3 \end{array}\right\}=0.$$

Für den Fall, dass der Nebenparameter gleich Null ist, ergibt sich hieraus die Gleichung:

$$x^3+x^2y-2\sqrt{2}.axy+xy^2+y^3=0.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dass die diesem besondern Falle entsprechende Curve (Taf. V. Fig. 11.) zu den im Anfangspunkt der Coordinaten berührenden Geraden als ihren Coordinatenaxen dieselbe Lage hat, und durch die gerade Linie OH, welche den von denselben gebildeten rechten Winkel halbirt, in zwei gleiche und ähnliche Theile getheilt wird.

11.

Man differentiire die allgemeine Gleichung der Curve, nämlich:

$$u=x^3-ax^2-2bxy+xy^2+ay^2=0$$

der Reihe nach in Beziehung auf x ung y, so erhält man:

$$\frac{du}{dx}=3x^2-2ax-2by+y^2,$$

$$\frac{du}{dy}=-2bx+2xy+2ay,$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=2x+2a.$$

Setzt man den zweiten dieser Differentialquotienten gleich Null, so gibt die Gleichung $bx-xy-ay=0$ unmittelbar:

$$y=\frac{bx}{a+x}.$$

Digitized by Google

Wenn man diesen Werth von y in die obige Gleichung der Curve substituirt und entwickelt, so kommt

$$x^2-a^2-b^2=0, \text{ oder } x^2-c^2=0,$$

indem man wieder $a^2+b^2=c^2$ setzt, und hieraus ergibt sich:

$$x=\pm c, \text{ und folglich } y=\frac{bc}{c\pm a}.$$

Aus der bekannten Formel zur Bestimmung des Maximums und Minimums bei unentwickelten Functionen:

$$\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}=0$$

folgt nun ferner, wenn man für die Differentialquotienten ihre oben gefundenen Werthe in dieselbe einsetzt,

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{2(a+x)}{3x^2-2ax-2by+y^2}.$$

Diese Gleichung geht aber, je nachdem man $x=+c$ und $y=\frac{bc}{c+a}$, oder $x=-c$ und $y=\frac{bc}{c-a}$ setzt, in folgende über:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{2(c+a)^3}{(3c^2-2ac)(c+a)^2-2b^2c(c+a)+b^2c^2},$$

und

$$\frac{d^2x}{dy^2}=+\frac{2(c-a)^3}{(3c^2+2ac)(c-a)^2-2b^2c(c-a)+b^2c^2},$$

oder, indem man den Nenner entwickelt und reducirt:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{(c+a)^2}{c^3} \text{ und } \frac{d^2x}{dy^2}=+\frac{(c-a)^2}{c^3}.$$

Der Differentialquotient der zweiten Ordnung ist also für die einen Werthe von x und y negativ, für die andern positiv: die Abscisse $x=+c$, welcher die Ordinate $y=\frac{bc}{c+a}$ entspricht, ist demnach ein Maximum, die Abscisse $x=-c$, welcher die Ordinate $y=\frac{bc}{c-a}$ zugeordnet ist, ein Minimum.

Digitized by Google

12.

Bezeichnet man den zwischen dem Bogen der Curve, der Ordinate und der Abscissenaxe enthaltenen Flächenraum mit F, so hat man zur Bestimmung desselben die bekannte Formel

$$F = \int y dx.$$

Nun ist aber, indem man wiederum $a^2 + b^2 = c^2$ setzt,

$$y dx = \frac{x(b \pm \sqrt{c^2 - x^2})\, dx}{a + x},$$

mithin

$$F = b \int \frac{x dx}{a+x} \pm \int \frac{x dx \sqrt{c^2 - x^2}}{a+x}.$$

Aber es ist

$$\int \frac{x dx}{a+x} = bx - ab.\text{lognat.}(a+x) + \text{const.};$$

soll der Flächenraum für $x = 0$ verschwinden, so muss const. $= ab.\text{lognat.}a$ sein.

Setzen wir ferner $a + x = u$, also $x = u - a$, so wird:

$$\int \frac{x dx \sqrt{c^2 - x^2}}{a+x} = \int \frac{(u-a) du \sqrt{b^2 + 2au - u^2}}{u}$$

$$= \int \frac{(u-a)(b^2 + 2au - u^2)\, du}{u \sqrt{b^2 + 2au - u^2}}.$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung den Wurzelausdruck mit R so ist:

$$\int \frac{(u-a)(b^2 + 2au - u^2) du}{u \sqrt{b^2 + 2au - u^2}}$$

$$= b^2 \int \frac{du}{R} + 2a \int \frac{u du}{R} - \int \frac{u^2 du}{R}$$

$$- ab^2 \int \frac{du}{uR} - 2a^2 \int \frac{du}{R} + a \int \frac{u du}{R}.$$

Nun aber, wie vorhin $a^2 + b^2 = c^2$ gesetzt, ist:

Digitized by Google

$$\int \frac{u^2 du}{R} = -\frac{1}{2} uR + \frac{1}{2} b^2 \int \frac{du}{R} + \frac{3}{2} a \int \frac{u du}{R},$$

$$\int \frac{u du}{R} = -R + a \int \frac{du}{R},$$

$$\int \frac{du}{R} = \text{arc.sin} \frac{u-a}{c},$$

$$\int \frac{b du}{uR} = \text{log nat.} \frac{b^2 + au - bR}{cu}.$$

Mit Rücksicht hierauf findet man nach einigen Reductionen:

$$\int \frac{(u-a)(b^2+2au-u^2)du}{u\sqrt{b^2+2au-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2}(b^2-a^2)\text{arc.sin}\frac{u-a}{c} - ab\,\text{lognat.}\frac{b^2+au-bR}{cu}$$

$$+ \frac{1}{2}(u-3a)R + \text{const.},$$

folglich, wenn man statt u den Werth $a+x$ wieder einsetzt:

$$\int \frac{dx\sqrt{c^2-x^2}}{a+x}$$

$$= \frac{1}{2}(b^2-a^2)\text{arc.sin}\frac{x}{c} - ab.\text{lognat.}\frac{c^2+ax-b\sqrt{c^2-x^2}}{c(a+x)}$$

$$+ \frac{1}{2}(x-2a)\sqrt{c^2-x^2} + \text{const.}$$

Zur Bestimmung der Constante setze man $x=0$, wodurch sich ergibt:

$$\text{const.} = ab.\log\text{nat}\frac{c-b}{a} + ac.$$

Durch Zusammenfassung des Vorhergehenden erhält man nun allgemein für die von der Curve begränzte Fläche:

$$F = bx - ab.\text{lognat}\frac{a+x}{a} \pm ab.\text{lognat}\frac{c(c-b)(a+x)}{ac^2+a^2x-ab\sqrt{c^2-x^2}}$$

$$\pm \frac{1}{2}(b^2-a^2)\text{arc.sin}\frac{x}{c} \pm \frac{1}{2}(x-2a)\sqrt{c^2-x^2} \pm ac,$$

wobei zu bemerken, dass das Zeichen + auf die positiven resp. grössern Ordinaten, das Zeichen — auf die negativen resp. kleinern Ordinaten sich bezieht.

Digitized by Google

Für die spezielle Curve, wenn nämlich der Nebenparameter Null ist, geht diese Formel in die folgende über:

$$F' = \mp\frac{1}{2}a^2 \text{arc.sin}\frac{x}{a} \pm \frac{1}{2}(x-2a)\sqrt{a^2-x^2} \pm a^2.$$

Für den Inhalt des von der Curve gebildeten Foliums, den wir mit f bezeichnen wollen, findet man:

$$f = \frac{1}{2}(b^2-a^2)\pi + 2ab.\log\text{nat}\frac{c-b}{a} + 2ac,$$

und im Falle, dass der Nebenparameter gleich Null ist:

$$f' = \frac{1}{2}(4-\pi)a^2.$$

Hieraus ergibt sich (Taf. V. Fig. 11.):

1) Beschreibt man über dem Parameter a das Quadrat $OHEG$ und mit demselben Parameter a den Kreisquadranten HQG, so ist das halbe Folium $OHRO$ dem Streifen $HEGQH$ an Inhalt gleich.

2) Beschreibt man mit dem Parameter a um O als Mittelpunkt einen Kreis und um diesen ein Quadrat, so ist das Doppelfolium den vier durch die Kreislinie abgeschnittenen Ecken des Quadrates gleich.

Nimmt man $a=3$, $b=4$, $c=5$, resp. $b=0$, $a=c=3$, so findet man für das Folium f, so wie für das Folium f' die Werthe:

$$f=15{,}05.. \qquad f'=3{,}86..$$

13.

Die Gleichung des um den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Radius $OE=c$ beschriebenen Kreises ist:

$$x^2+y^2=c^2.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung der Curve, am einfachsten in folgender Gestalt:

$$(x-a)(x^2+y^2)=2y(bx-ay),$$

so erhält man zur Bestimmung der Durchschnittspunkte der Curve und des Kreises die beiden Gleichungen:

$$(x-a)c^2=2bx\sqrt{c^2-x^2}-2a(c^2-x^2),$$

$$(a-\sqrt{c^2-y^2})c^2=2y(ay-b\sqrt{c^2-y^2});$$

Digitized by Google

oder wenn man entwickelt und nach den Potenzen der Veränderlichen ordnet:

$$4x^4 - 4ax^3 - 3c^2x^2 + 2ac^2x + a^2c^2 = 0,$$

$$4y^4 - 4by^3 - 3c^2y^2 + 4bc^2y - b^2c^2 = 0.$$

Diese Gleichungen sind vom vierten Grade: die Curve wird also von der Kreislinie in vier Punkten geschnitten, welche, wie sich leicht zeigen lässt, alle vier reell sind. Denn da eine Wurzel der vorstehenden Gleichungen resp. a und b ist, so ergeben sich die drei andern Wurzeln resp. aus den Gleichungen:

$$4x^3 - 3c^2x - ac^2 = 0,$$

$$4y^2 - 3c^2y + bc^2 = 0.$$

Da nun hierin das zweite Glied negativ, überdies $c > a$ und $c > b$, also

$$4(\frac{3}{4}c^2)^3 > 27(\frac{1}{4}ac^2)^2$$

und

$$4(\frac{3}{4}c^2)^3 > 27(\frac{1}{4}bc^2)^2,$$

so hat jede dieser Gleichungen drei reelle Wurzeln, und zwar hat die erstere Gleichung zwei negative und eine positive, die zweite Gleichung eine negative und zwei positive Wurzeln. Setzt man $\cos\varphi = \frac{a}{c}$ und $\cos\psi = \frac{b}{c}$, so sind dieselben:

$$+c.\cos\tfrac{1}{3}\varphi,\quad -c.\cos(60^0 - \tfrac{1}{3}\varphi),\quad -c.\cos(60^0 + \tfrac{1}{3}\varphi);$$

$$-c.\cos\tfrac{1}{3}\psi,\quad +c.\cos(60^0 - \tfrac{1}{3}\psi),\quad +c.\cos(60^0 + \tfrac{1}{3}\psi).$$

Die Wurzeln der ursprünglichen Gleichungen sind also alle vier reell, und der Kreis schneidet demnach die Curve in vier reellen Punkten, deren Abscissen und Ordinaten, wenn man berücksichtigt, dass hier immer $\frac{1}{3}\varphi$ resp. $\frac{1}{3}\psi < 60^0 - \frac{1}{3}\varphi$ resp. $60^0 - \frac{1}{3}\psi$, und dass immer $x^2 + y^2 = c^2$ ist, sich folgendermassen zusammen ordnen:

$x' = +a$	$y' = +b$
$x'' = +c.\cos\frac{1}{3}\varphi$	$y'' = +c.\cos(60^0 + \frac{1}{3}\psi)$

Digitized by Google

$$x''' = -c.\cos(60^0 - \frac{1}{3}\varphi) \qquad y''' = +c.\cos(60^0 - \frac{1}{3}\psi)$$

$$x'''' = -c.\cos(60^0 + \frac{1}{3}\varphi) \qquad y'''' = -c.\cos\frac{1}{3}\psi.$$

Wie man aus den Vorzeichen ersieht, liegen immer zwei Durchschnittspunkte im ersten, einer im zweiten, und einer im dritten Quadranten.

Für den Fall, dass $a=3$, $b=4$, $c=5$, ergeben sich für dieselben folgende Werthe:

$$x' = +3 \qquad y' = +4$$
$$x'' = +4{,}76304.. \qquad y'' = +1{,}5210..$$
$$x''' = -3{,}69874.. \qquad y''' = +3{,}36441..$$
$$x'''' = -1{,}06429... \qquad y'''' = -4{,}88541..$$

14.

Nach den in den vorhergehenden Paragraphen gemachten Erörterungen werden wir jetzt im Stande sein zu zeigen, wie man mit Hülfe unserer Curve in Folge der §. 5. angegebenen Eigenschaft die Trisection jedes beliebigen Winkels vornehmen kann.

Sei nämlich ein beliebiger Winkel gegeben, dessen Scheitelpunkt O (Taf. V. Fig. 10.), so fälle man von irgend einem Punkte E des einen Schenkels auf den andern oder dessen Verlängerung eine Senkrechte EH, construire zu OH als Hauptparameter und HE als Nebenparameter nach §. 5. die Curve $NORDEOS$ und beschreibe mit OE als Radius um O einen Kreis, welcher, wie wir gesehen haben, die Curve ausser in E noch in drei Punkten A, A', A'' schneidet. Man verbinde diese mit O und verlängere nöthigenfalls, wodurch man die Durchschnittspunkte C, C', C'' auf dem Nebenparameter erhält, und ferner verbinde man E mit den Punkten A, A', A''. Alsdann sind nach §. 5. die Dreiecke EAC, $EA'C'$, $EA''C''$ gleichschenklich, mithin die folgenden Dreiecke paarweise einander ähnlich:

$$\Delta OAE \sim \Delta EAC, \quad \Delta OA'E \sim \Delta EA'C', \quad \Delta OA''E \sim \Delta EA''C'',$$

da sie gleichschenklich sind, und jedes Paar den Winkel an der Grundlinie, resp. $\angle EAC$ oder $\angle EA'C'$ oder $\angle EA''C''$, gemeinsam hat; daher ist

$$\angle AEC = \angle EOA, \quad \angle A'EC' = \angle EOA', \quad \angle A''EC'' = \angle EOA''.$$

Ebenso, wenn man aus E die Senkrechten EF, EF', EF'' fällt, sind die folgenden rechtwinklichen Dreiecke paarweise ähnlich:

$$\Delta COH \sim \Delta CEF, \quad \Delta C'OH \sim \Delta C'EF', \quad \Delta C''OH \sim \Delta C''EF''.$$

Digitized by Google

Daraus ergibt sich nun:

$$\angle AOP = \angle COH = \angle CEF = \frac{1}{2}\angle AEC = \frac{1}{2}\angle EOA;$$

$$\angle A'OP' = \angle C'OH = \angle C'EF' = \frac{1}{2}\angle A'EC' = \frac{1}{2}\angle EOA';$$

$$\angle A''OP' = \angle C'OH = \angle C''EF'' = \frac{1}{2}\angle A''EC'' = \frac{1}{2}\angle EOA'';$$

$$\angle A''OP = (2R - C'OH) = (2R - C''EF'') = \frac{1}{2}(4R - A''EC'')$$
$$= \frac{1}{2}(4R - EOA'').$$

Hieraus folgt nun:

$$\angle AOP = \frac{1}{3}\angle EOP \ldots\ldots (\angle EOP > 0^0 \text{ und } < 1R),$$

$$\angle A'OP' = \frac{1}{3}\angle EOP' \ldots\ldots (\angle EOP' > 1R \text{ und } < 2R),$$

$$\angle A''OP' = \frac{1}{3}\text{conv.}\angle EOP' \ldots\ldots (\text{conv.}\angle EOP' > 2R \text{ und } < 3R),$$

$$\angle A''OP = \frac{1}{3}\text{conv.}\angle EOP \ldots\ldots (\text{conv.}\angle EOP > 3R \text{ und } < 4R).$$

Demnach ist also vollständig gezeigt, wie vermittelst unserer Curve jeder beliebige Winkel, sei er ein spitzer oder ein stumpfer oder ein erhabener, in drei gleiche Theile getheilt werden kann.

Da

$$\angle AOP = \frac{1}{3}\angle EOP \text{ und } \angle A''OP = \frac{1}{3}\text{conv.}\angle EOP,$$

ferner

$$\angle A'OP' = \frac{1}{3}\angle EOP' \text{ und } \angle A''OP' = \frac{1}{3}\text{conv.}\angle EOP';$$

so ergibt sich endlich noch, dass in den Punkten A, A', A'' (Taf. V. Fig. 10. und 11.) die ganze Kreisperipherie in drei gleiche Theile getheilt ist.

Digitized by Google

VI.

Nachtrag zu dem Aufsatze in Thl. XIII. Nr. XXXIII.

Von

Herrn Theodor Lange

zu Berlin.

Bevor ich der öffentlichen Aufforderung des Hrn. Prof. Grunert nachkomme, und den in dem Crelle'schen Journal erschienenen Beweis des Hrn. Prof. Steiner, dessen in der Nachschrift zu dem Aufsatze Thl. XIII. Nr. XXXIII. Erwähnung gethan wird, mittheile, muss ich auf einen Irrthum aufmerksam machen, der sich bei Aufstellung des allgemeinen Satzes in erwähntem Aufsatze eingeschlichen hat. Der daselbst geführte Beweis stützt sich nämlich auf Eigenschaften der Figur, welche von der dort angenommenen Lage der Winkel a und b abhängen und bei anderer Lage nicht stattfinden. Es kann demnach nur folgender Satz allgemein aufgestellt werden: Wird eine Gerade von zwei Strahlen geschnitten, und ist die Linie, welche aus dem Schnittpunkt des Einen auf den Andern gezogen wird, gleich der Linie, welche aus dem Schnittpunkt des Andern auf den Ersteren gezogen ist, so sind die Gegenwinkel, unter denen jene Strahlen die Gerade schneiden, einander gleich, wenn jene gleichen Linien diese Winkel in gleichen Verhältnissen schneiden.

Nach der Bemerkung, welche der Herr Professor Steiner seinem Aufsatze „Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und sphärische Dreieck" im 28. Bande des Crelle'schen Journals vorausschickt, kam demselben im Jahre 1840 von Herrn

Professor Lehmus folgende Aufgabe zu, mit der Bitte „eine rein geometrische Lösung derselben zu finden.“

„Wenn in einem geradlinigen Dreieck die zwei Geraden, welche dessen Winkel an der Grundlinie hälften und die bis an die Gegenseiten verlängert genommen werden, gleich lang sind, so ist die Frage, ob dann das Dreieck gleichschenklig sei?“ —

Darauf habe er folgende Lösung dem Hrn. Professor Lehmus mitgetheilt, die er unter anderen desshalb veröffentliche, da ein grosser Kenner der Geometrie, Herr Sturm, der von seinen Zuhörern und Andern verschiedene Lösungen besässe, die Seinige für die elementarste gehalten habe.

Ueber die Schwierigkeit der erwähnten Aufgabe sagt der Herr Professor Steiner in demselben Aufsatze: „die Schwierigkeit, welche die Aufgabe darbietet, mag ihren Grund darin haben, dass die eine Voraussetzung nicht so absolut bestimmt ist, wie man auf den ersten Blick leicht glauben möchte, denn wenn gesagt wird „die Winkel an der Grundlinie werden gehälftet“, so ist dies sowohl auf die innern als auf die äussern Winkel an der Grundlinie anzuwenden, was dann im Wesentlichen drei verschiedene Fälle giebt, indem nämlich, wenn man die bis an die Gegenseiten verlängerten Strahlen, welche die inneren Winkel hälften, durch a und b und diejenigen, welche die äusseren Winkel hälften, durch a_1 und b_1 bezeichnet, entweder

$$1)\ a=b,\ 2)\ a_1=b_1,\ 3)\ a_1=b \text{ oder } a=b_1$$

angenommen werden kann.

Im ersten Falle Taf. VI. Fig. 1.; wo also die inneren Winkel gehälftet werden, würde die Annahme, dass die Winkel α und β ungleich wären, etwa $\alpha>\beta$, einmal zu dem Schluss führen, dass der Winkel ADB, nämlich $2R-(\alpha+2\beta)$, grösser sei als der Winkel BEA, nämlich $2R-(\beta+2\alpha)$. Andererseits aber folgt aus derselben Annahme, wenn man das Dreieck AEB so an das Dreieck BDA legt, dass A in B, B in A und E in E_1 fällt, dass, da $DB>AE=BE_1$ wäre, $y>x$ sein müsste, mithin, da $n=m$ ist, der Winkel $x+n$ kleiner sein, als $y+m$, oder Winkel ADB kleiner als der Winkel BEA. Dieser Widerspruch zeigt die Unrichtigkeit der Annahme und dass unter obiger Bedingung das Dreieck gleichschenklig ist.

„Im zweiten Falle, wo also die äusseren Winkel gehälftet „werden, kommt es noch auf eine nähere Untersuchung an, ob „nämlich α) beide Strahlen a_1 und b_1 die verlängerten Gegensei„ten jenseits der Spitze C oder beide dieselben unterhalb der „Grundlinie AB treffen, oder ob β) der eine die Gegenseite jen„seits der Spitze und der andere sie unterhalb der Grundlinie „trifft. Unter der Bedingung α) ist das Dreieck gleichschenklig, „dagegen unter β) nicht.“

Denn wenn Taf. VI. Fig. 2. die Aussenwinkel gehälftet sind, und die Strahlen a_1 und b_1 die Gegenseiten jenseits der Spitze

Digitized by Google

C treffen, so führt die Annahme, dass die Winkel α und β nicht gleich wären, etwa $\alpha > \beta$, einerseits zu dem Schlusse, dass der Winkel DAB, nämlich $2R - \alpha_1$, kleiner als der Winkel EBA, nämlich $2R - \beta_1$, also dass $DB > AE$ sein müsste. Andererseits folgt, da $y > x$ ist, bei derselben Construction wie oben, dass der Winkel $E_1DB < DE_1B$, also $DB > BE_1$ oder $DB > AE$. — Dieser Widerspruch zeigt die Unrichtigkeit obiger Annahme und dadurch, dass das Dreieck gleichschenklig ist.

„Wenn dagegen beide Strahlen a_1 und b_1 den Gegenseiten „unterhalb der Grundlinie begegnen, wie in Taf. VI Fig. 3., so „scheint der Beweis nicht auf analoge Weise Statt zu finden." Daher giebt der Herr Professor Steiner folgenden minder einfachen Beweis.

Aus der Annahme, dass α und β ungleich wären, etwa $\alpha > \beta$, folgt $BF > AF$, und daraus $FD > FE$. Man nehme (Taf. VI. Fig. 3.) $FG = FA$ und $FH = FE$ und ziehe GH, so ist, wegen der Congruenz der Dreiecke HFG und EFA, der Winkel $\alpha_2 = \alpha_1$ also $\alpha_2 > \beta_1$, woraus folgt, dass die Gerade GH der Seite CB jenseits D, etwa in K, begegnet, und zwar unter einem Winkel $\gamma = \alpha_2 - \beta_1 = \alpha - \beta = 2\varepsilon$, denn $\alpha - \varepsilon = AGF = \beta + \varepsilon$. — Da der Winkel α_1, also auch $\alpha = C + D$ ist, so ist $\alpha > D$, also $BD > AB$. Nimmt man $BL = BA$, so wird BAG und BGC congruent, also $\varepsilon = \varepsilon_1$. Da aber $\varepsilon_1 > \gamma$ ist, so ist auch $\varepsilon > \gamma$, was dem Obigen $2\varepsilon = \gamma$ widerspricht. Es muss also $\alpha = \beta$ angenommen werden, woraus folgt, dass das Dreieck ACB gleichschenklig sein muss.

„Im dritten Falle, wo also ein innerer und ein äusserer Win„kel an der Grundlinie gehälftet wird, ist das Dreieck nicht „gleichschenklig. (Nur scheint die Möglichkeit vorhanden zu sein, „dass es in ganz besonderem Falle gleichschenklig sein kann, „wobei es dann aber ein der Form nach ganz bestimmtes Dreieck „ist, d. h. bestimmte Winkel hat*). — Da nun die Aufgabe alle

---

*) Sollte das Dreieck ACB (Taf. VI. Fig. 5) gleichschenklig sein, während $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ ist, so folgt, wenn $\delta = \alpha$ gemacht wird,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{2R - a}{2a + \alpha},$$

denn

$$\beta = a + E_1 = a + E = 2a + \delta = 2a + \alpha.$$

Für $\alpha = \frac{1}{n}a$ findet man

$$a = \frac{R}{n+1}.$$

Wenn also zwischen den Grössen a und n diese Gleichung besteht, ist das Dreieck gleichschenklig. Ist $n = 2$, also, wenn die Winkel gehälftet sein sollen, so muss

„diese Fälle für die Rechnung stillschweigend zugleich umfasst, „so begreift man, wie diese, wenn sie nicht geschickt angegriffen „wird, auf höhere Gleichungen führen muss."

Für die Lage Taf. VI. Fig. 1. und 2. lässt sich auf dieselbe Weise wie oben zeigen, dass auch in dem Falle, wo die Winkel nur unter gleichem Verhältniss getheilt werden, das Dreieck gleichschenklig sei. Für Taf. VI. Fig. 3. ist aber der Beweis dem Obigen nicht analog zu führen, und auch kein anderer Beweis für diesen Fall gegeben.

Die Untersuchung geht nun noch auf das sphärische Dreieck (Taf. VI. Fig. 4.) über, für den Fall, dass die Winkel gehälftet sind. „Es wird „gezeigt, dass, wenn die Winkel ungleich genommen würden, etwa „$\alpha > \beta$, so auch $BF > AF$ und daher $FD > FE$ wäre. Nimmt „man nun $FG = FE$ und $FH = FA$, so sind die Dreiecke AFE „und HFG symmetrisch gleich, also $x_1 = x$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. Da das „Dreieck BFD grösseren Inhalt hat, als das Dreieck HFG, so „muss auch die Winkelsumme grösser sein als die des letzteren. Den „Winkel bei F haben sie gemein und von den übrigen ist $\alpha_2 > \beta_1$ „(weil $\alpha_2 = \alpha_1 > \beta_1$); daher muss Winkel $y > x_1$ und somit auch „$y > x$ sein. Da ferner die Dreiecke BAD und ABE zwei Paar „gleiche Seiten und dazwischen die ungleichen Winkel $\alpha > \beta$ haben, „so ist Seite $d > e$ (d. i. $BD > AE$). Man denke sich nun das „Dreieck ABE in der Lage von BAE_1, wo nämlich Winkel $x_2 = x$, „$\gamma = \alpha + \alpha_1$, Seite $e_1 = e$ ($BE_1 = AE$) etc. ist, so wird man — falls „der Winkel $DBE_1 = \gamma + \beta + \beta_1 < \pi$, d. h. falls die Summe der „Winkel an der Grundlinie AB im gegebenen Dreieck ACB klei„ner als zwei Rechte ist — durch Hülfe des Hauptkreisbogens „DE_1 auf ganz gleiche Weise wie oben bei Taf. VI. Fig. 2. auf den „Widerspruch geführt, dass $e_1 > d$, also $e > d$ sein müsste; wor„aus sodann auf die Gleichheit von α und β und daraus auf die „Gleichheit von AC und BC geschlossen wird."

„Für die andere, allgemeinere Aufgabe, wo die Winkel an der „Grundlinie, statt gehälftet, in irgend einem gleichen Verhältniss „getheilt werden, folgt auf gleiche Weise, dass das Dreieck gleich„schenklich sein muss, falls die Summe der beiden Winkel an „der Grundlinie kleiner als zwei Rechte ist."

„Wenn dagegen die Summe der Winkel an der Grundlinie „grösser als zwei Rechte ist, so wird der Beweis für beide Auf„gaben unbrauchbar. — Ich begnüge mich, — schliesst der Herr „Professor Steiner seinen Aufsatz — mit dieser Andeutung und „überlasse es den Liebhabern, die vollständige, aber möglichst „elementare Lösung aufzufinden."

$$a = \frac{1}{3} R = 30^0$$

sein.

Durch die Freundlichkeit des Herrn Professor Lehmus bin ich in den Stand gesetzt, folgende, von ihm gefundene Beweise des einfachen Satzes mitzutheilen.

„*Lehrsatz.* Wenn die, zwei Winkel eines Dreiecks halbirenden Transversalen einander gleich sind, so sind es auch die halbirten Winkel, d. h. das Dreieck ist gleichschenklich, oder (Taf. VI. Fig. 1.):

Voraussetzung: $EAD=DAB$
$DBE=EBA$
$AD=BE$

Behauptung: $EAD=DBE$.

„I. Beweis. Aus der Annahme $EAD>DBE$ würde folgen

$$FAD=DBE$$

und hieraus (durch Addition)

1) $BAF>ABD$;

2) die vier Punkte A,F,D,B liegen in der Peripherie desselben Kreises. Da nun aber in Folge der Voraussetzung $BAF<90^0$, so entstünde $BF>AD$ und um so mehr $BE>AD$, als Widerspruch gegen die dritte Voraussetzung.

„II. Beweis durch Calcul.

„Man nenne die Dreiecksseiten a, b, c und die halbirenden Transversalen d.

Aus

$$ac=d^2+\frac{ab^2c}{(a+c)^2},$$

$$bc=d^2+\frac{ab^2c}{(b+c)^2}$$

folgt, wenn d eliminirt wird,

$$(a+b+c)c(a-b)[c^3+(a+b)(ab+c^2)+3abc]=0;$$

welcher Gleichung nur durch $a-b=0$ Genüge geschieht.“

Was den Satz in Betreff des sphärischen Dreiecks betrifft, so lässt sich der Beweis ganz in derselben Art, wie ich ihn beim

Digitized by Google

ebenen Dreieck gegeben habe, führen, wenn man nämlich bedenkt, dass alle Ebenen, die durch den Schenkel eines Winkels gehen und auf denen Linien liegen, welche mit dem andern Schenkel einen Winkel von der bestimmten Grösse ϱ bilden, den Kegel schneiden, dessen Axe der andere Schenkel, und dessen Erzeugungswinkel ϱ ist. Denkt man demnach um jeden Schenkel eines Winkels einen Kegel mit demselben Erzeugungswinkel ϱ und aus dem einen Schenkel (A) eine Schnittebene durch den Kegel des andern Schenkels (B), und die Ebenen zwischen je einer Schnittlinie und der Axe des zugehörigen Kegels, während man sich vorstellt, dass eine Ebene aus dem Schenkel (B) sich um B um 360^0 drehe, und dass fortwährend die Ebenen durch die Schnittlinien (derselben mit dem Kegel (A)) und dessen Axe gelegt werden; so lassen sich in Bezug der Neigungswinkel der erwähnten Ebenen gegen die Ebene des ursprünglichen Winkels dieselben Schlüsse anwenden wie im obigen Beweise.

Im Allgemeinen braucht wohl nicht erst darauf hingewiesen zu werden, dass die in den Figuren zu meinem Beweise vorkommenden Kreise nur gebraucht wurden, um der Vorstellung mehr Halt zu geben, und dass, wie in einer zweiten Bearbeitung*) geschehen, nur die elementarsten Lehrsätze der Geometrie benutzt sind. — Ferner möchte die von mir gegebene Beweisführung vielleicht desshalb einige Beachtung verdienen, da sie direct zu Werke geht und ein einheitliches Ganze bildet.

---

*) Diese zweite Bearbeitung soll auf den Wunsch des Herrn Vfs. in einem der nächsten Hefte des Archivs noch mitgetheilt werden, da jetzt kein Raum dazu war, und ich nur zuerst verschiedene Beweisarten mittheilen wollte. G.

Digitized by Google

VII.

Die continuirliche Function und ihre Abgeleiteten.

Von

Herrn Professor Franke,

zweitem Director der polytechnischen Schule zu Hannover.

In den Exercices d'Analyse tome II. p. 54. sagt Cauchy: die Function fx kann nach Maclaurins Formel in eine convergente Reihe nach den aufsteigenden Potenzen von x entwickelt werden, wenn der Modul der reellen oder imaginären Variabeln x einen kleineren Werth behält als der, für welchen die Function (oder deren erste Abgeleitete) aufhört, continuirlich zu sein. In dieser Gestalt hatte schon früher Cauchy den Satz aufgestellt, jedoch ohne den in der Klammer stehenden Zusatz beizufügen. Der Satz ist von grosser Wichtigkeit, weil er die Anwendbarkeit der gedachten Reihe an eine klare, feste Bestimmung knüpft. Indessen scheint er nicht richtig zu sein, und ohne die Gründe für diese Behauptung vorzuführen, welche in Cauchy's Beweise selbst liegen, will ich vielmehr direct die Grenzen der Anwendbarkeit der Reihe dadurch versuchen, dass ich in der ersten Nummer die doppelte Form des Differentials, in der zweiten die Beziehung der continuirlichen Function zu ihren Abgeleiteten, und in der dritten die Reihe Maclaurins selbst entwickele.

1.

Es sei Fx eine Function von x, die zwischen x_1 und $x_1 + h$ entweder nur zunimmt oder nur abnimmt und die zwischen denselben Grenzen continuirlich bleibt, d. h. die um unendlich kleine Grössen derselben oder einer höhern Ordnung zu- oder abnimmt, als die Veränderliche x selbst. Das Differential der Function ist

Digitized by Google

$$F(x+\alpha) - Fx = \alpha F'x,$$

wenn α eine unendlich kleine Zunahme bedeutet. Diese Gleichung ist aber nur genau bis auf das Unendlich-Kleine der zweiten Ordnung, so dass vollständig dafür zu setzen ist

$$1) \qquad F(x+\alpha) - Fx = \alpha F'x + \alpha^2 k_1,$$

wenn k_1 eine endliche Zahl bezeichnet, und x zwischen den angegebenen Grenzen liegt. Lässt man nun x immer um die unendlich kleine Grösse α zunehmen, bis sie den Werth $x+h$ erhält, so entstehen die streng wahren Gleichungen:

$$\begin{aligned}
F(x+\alpha) - Fx &= \alpha F'x + \alpha^2 k_1, \\
F(x+2\alpha) - F(x+\alpha) &= \alpha F'(x+\alpha) + \alpha^2 k_2, \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
F(x+[n-1]\alpha) - F(x+[n-2]\alpha) &= \alpha F'(x+[n-2]\alpha) + \alpha^2 k_{n-1}, \\
F(x+n\alpha) - F(x+[n-1]\alpha) &= \alpha F'(x+[n-1]\alpha) + \alpha^2 k_n;
\end{aligned}$$

in welchen die Grössen $k_2, \ldots k_{n-1}, k_n$ dieselbe Bedeutung beibehalten als k_1. Addirt man diese Gleichungen und ordnet rechts nach Grössen derselben Art, so erhält man

$$2)$$
$$\begin{aligned}
F(x+n\alpha) - Fx = \alpha\{&F'x + F'(x+\alpha) + \ldots + F'(x+[n-2]\alpha) + F'(x+[n-1]\alpha)\} \\
&+ \alpha^2\{k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} + k_n\},
\end{aligned}$$

eine Gleichung, welche wie Gleichung 1) streng richtig ist.

Offenbar giebt es einen Werth von x, der zwischen x und $x+n\alpha$ liegt, nemlich $x+m\alpha$, für welchen $F'(x+m\alpha)$ das arithmetische Mittel der Glieder der Reihe

$$F'x,\ F'(x+\alpha), \ldots F'(x+[n-2]\alpha),\ F'(x+[n-1]\alpha)$$

bedeutet, wenn m eine ganze oder gebrochene Zahl bezeichnet, die zwischen Null und n liegt. Wenn nun m eine Bruchzahl $\frac{s}{r}$, zwischen den Ganzzahlen p und $p+1$ gelegen, ist, so dass die Reihenfolge der Zahlen

$$p,\ p+\frac{s}{r},\ p+1$$

statt findet, so kann man immer die Zunahme α mit der kleineren $\frac{\alpha}{r}$ vertauschen, weshalb die Reihenfolge zwischen p und $p+1$ in die Reihe der ebenfalls ganzen Zahlen

$$rp,\ rp+1, \ldots rp+s, rp+s+1, \ldots rp+r$$

Digitized by Google

übergeht, und es ist klar, dass die Gleichung 1), folglich auch Gleichung 2), für kleinere α gültig bleibt.

Auf gleiche Weise wird es einen Mittelwerth k_q der Grössen

$$k_1, k_2, \ldots\ldots k_{n-1}, k_n$$

geben, für welche der Zeiger q zwischen 0 und n liegt.

Werden nun diese Mittelwerthe mit n multiplicirt und in Gleichung 2) eingeschaltet, so entsteht

$$F(x+n\alpha)-Fx=n\alpha F'(x+m\alpha)+n\alpha^2 k_q,$$

oder, wenn man $n\alpha$ mit h vertauscht,

$$3) \qquad F(x+h)-Fx=h\{F'(x+m\alpha)+\alpha k_q\}.$$

In dieser Gleichung ist k_q von der Veränderlichen x, sowie von der Form der Function Fx abhängig; es wird daher immer einen Werth $x+\mu\alpha$ geben, für welchen

$$F'(x+\mu\alpha)=F'(x+m\alpha)+\alpha k_q$$

besteht. Hier bedeutet μ wieder eine Zahl zwischen Null und n; denn $F'(x+m\alpha)$ ist von $F'(x+\mu\alpha)$ um die unendlich kleine Zahl αk_q verschieden, man kann daher αk_q als das Differential

$$F(x+m\alpha)-F(x+m\alpha-\beta)$$

ansehen, in welcher Differenz die unendlich kleine Zahl β so gewählt werden kann, dass die Gleichung

$$F(x+m\alpha)-F(x+m\alpha-\beta)=\alpha k_q$$

in aller Strenge bestehe, dass daher

$$F'(x+m\alpha)+\alpha k_q$$

in die Differenz

$$F(x+[m+1]\alpha)-F(x+m\alpha-\beta),$$

das ist in

$$(\alpha+\beta)\,F'(x+m\alpha-\beta),$$

und die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{F(x+[m+1]\alpha)-F(x+m\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}=F'(x+m\alpha-\beta)$$

in

$$F'(x+\mu\alpha)$$

übergeht, wenn man $m\alpha-\beta$ mit $\mu\alpha$ vertauscht. Die Gleichung 3) verwandelt sich sonach in

$$4) \qquad F(x+h)-Fx=hF'(x+\mu\alpha).$$

Schreibt man endlich $\Delta.n\alpha$ oder Δh statt $\mu\alpha$, so bedeutet $\Delta=\frac{\mu}{n}$ einen ächten Bruch, und aus Gleichung 4) entsteht

$$5) \qquad F(x+h)-Fx=hF'(x+\Delta h).$$

In der vorausgehenden Entwicklung liegt der Grund, dass die Gleichung 5) noch für eine Function gilt, welche innerhalb der Grenzen x und $x+h$ nicht mehr continuirlich bleibt; denn in diesem Falle sind zwar einzelne der Werthe

$$F'x,\ F'(x+\alpha),\ldots.F'(x+[n-2]\alpha),\ F'(x+[n-1]\alpha),$$

sowie

$$k_1,\ k_2,\ldots.k_{n-2},\ k_{n-1}$$

unendlich gross, aber immer wird ein Mittelwerth $F'(x+m\alpha)$ für die erste und k_q für die zweite Reihe, sowie $F'(x+\mu\alpha)$ für die Summe von $F'(x+m\alpha)$ und αk_q möglich sein, dergestalt, dass die Zahlen m, q, μ zwischen Null und n liegen.

Eben so unterliegt es keinem Zweifel, dass Gleichung 5) für unendlich kleine Zunahmen h gelten müsse, es mag die gegebene Function continuirlich oder discontinuirlich sein; sonach ist für ein unendlich kleines α

$$6) \qquad F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'(x+\Delta\alpha).$$

Ist daher die Function continuirlich, so giebt es zwei Formen, welche das Differential ergänzen, nemlich

$$F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'x+\alpha^2k,$$
$$F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'(x+\Delta\alpha);$$

und es ist in der ersten dieser Gleichungen k, sowie in der zweiten Δ eine endliche Zahl, denn aus

$$\Delta h=\Delta n\alpha=\mu\alpha \text{ folgt } \Delta=\frac{\mu}{n},$$

und wenn h selbst unendlich klein wird, so wird n endlich, folglich die Bruchzahl $\frac{\mu}{n}$ selbst endlich.

Die Gleichungen 5) und 6) gelten nur unter der zu Anfange gestellten Bedingung, dass Fx zwischen x und $x+h$ entweder immer zunehme oder immer abnehme. Nimmt nun die Function

Digitized by Google

zwischen x und $x+h'$ zu und zwischen $x+h'$ und $x+h'+h$ ab, oder umgekehrt, so gelten nach Gleichung 5) die Beziehungen

$$F(x+h')-Fx=h'F'(x+\Delta'h')$$

und

$$F(x+h'+h)-F(x+h')=hF'(x+h'+\Delta h),$$

wenn Δ' und Δ ächte Bruchzahlen bedeuten, und es entsteht durch Addition dieser Gleichungen

$$F(x+h'+h)-Fx=h'F'(x+\Delta'h')+hF'(x+h'+\Delta h);$$

für die rechte Seite wird aber immer ein Mittelwerth von der Form

$$(h'+h)\,F'(x+h'+h+\Delta''[h'+h])$$

sich finden oder denken lassen, in welchem Δ'' wieder einen ächten Bruch bezeichnet.

2.

Aus der Gleichung 5) in Nr. 1. lässt sich eine Beziehung zwischen einer continuirlichen Function und ihren Abgeleiteten entwickeln. Es sei nemlich Fx zwischen den Werthen x_0 und x_1 von x continuirlich, so gilt innerhalb dieser Grenzen

$$1.\quad \begin{cases} F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'(x+\Delta\alpha), & \text{und} \\ F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'x+\alpha^2 k; \end{cases}$$

in welchen Gleichungen Δ und k endliche Zahlen bedeuten, wenn, wie vorausgesetzt wird, α unendlich klein ist. Ob nun auch $F'x$ continuirlich oder discontinuirlich sein mag, immer gilt, wie in Nro. 1. nachgewiesen, die Gleichung

$$F'(x+\Delta\alpha)-F'x=\Delta\alpha F''(x+\Delta'\alpha),$$

in welcher Δ' einen ächten Bruch von $\Delta\alpha$ bezeichnet. Wird nun aus dieser Gleichung der Werth von $F'(x+\Delta\alpha)$ in die erste der Gleichungen 1. eingeschaltet, so dass dieselbe in

$$F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'x+\Delta\alpha^2 F''(x+\Delta'\alpha)$$

übergeht, und diese Gleichung mit der zweiten der gedachten Gleichungen 1. verglichen, so erhält man

$$k=\Delta F''(x+\Delta'\alpha).$$

Nun ist Δ eine endliche ächte Bruchzahl, und k ebenfalls eine endliche, wenigstens nicht eine unendlich grosse Zahl, da-

Digitized by Google

her kann $F''(x+\Delta'\alpha)$, das ist $F''x$, zwischen den Grenzen x_0 und x_1 nicht unendlich gross werden, wird also höchstens endlich bleiben. Wenn aber die abgeleitete Function $F''x$ einer gegebenen Function $F'x$ innerhalb bestimmter Grenzen von x höchstens endlich ist, so wird für unendlich kleine Zunahmen von x auch $F'x$ um unendlich kleine Grössen sich verändern, das heisst, $F'x$ wird innerhalb der gedachten Grenzen continuirlich sein.

Wenn also Fx eine zwischen zwei Grenzen continuirliche Function bedeutet, so ist die erste Abgeleitete derselben zwischen denselben Grenzen ebenfalls continuirlich.

Sowie der Schluss von Fx auf $F'x$ gilt, so ist er in gleicher Weise von $F'x$ auf $F''x$, von $F''x$ auf $F'''x$, ... gültig, weil $F''x$ die erste Abgeleitete von $F'x$, u. s. w. ist, daher der Satz:

Wenn eine Function von x innerhalb zweier Grenzen continuirlich ist, so bleiben auch die abgeleiteten Functionen derselben innerhalb derselben Grenzen continuirlich.

Dieser Satz gilt für jede $n$te Abgeleitete einer zwischen zwei Grenzen continuirlichen Function, so lange n eine endliche Zahl bleibt; wird aber n unendlich gross, so erleidet er eine Einschränkung, weil er nur die Beziehung einer Function und deren Abgeleiteten enthält, welche von der Variabeln x abhängig ist. Allein jede Abgeleitete einer Function ist, ausser von dieser Variabeln, auch vom Zeiger n abhängig, deshalb kann für wachsende n die Abgeleitete ins Unendliche wachsen, wenn der Zeiger n als Factor der von x abhängigen Function auftritt, wie bei der Abgeleiteten der Function

$$(a+bx^r)^m,$$

in welcher m jede reelle positive gebrochene oder negative Ganzzahl bedeutet.

Denn nach Gleichung 6) in Nr. 1. hat die erste Abgeleitete von Fx die Form:

$$\frac{F(x+\alpha)-Fx}{\alpha}=F'(x+\Delta'\alpha),$$

wenn Δ einen endlichen, ächten Bruch bedeutet. Daher ist für das unendlich kleine α die zweite Abgeleitete:

$$\frac{F'(x+\alpha+\Delta'\alpha)-F'(x+\Delta'\alpha)}{\alpha}=F''(x+\Delta'\alpha+\Delta''\alpha),$$

und, schliesst man weiter, die $n$te Abgeleitete

$$F^{(n)}(x+\Delta'\alpha+\Delta''\alpha+\Delta'''\alpha+\ldots+\Delta^{(n)}\alpha),$$

Digitized by Google

wenn diese Gleichungen für die Abgeleiteten in aller Strenge richtig sein sollen. Die Zahl

$$x + \Delta'\alpha + \Delta''\alpha + \Delta'''\alpha + \ldots + \Delta^{(n)}\alpha$$

kann nun innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 liegen oder nicht. Der erste Fall, für welchen diese Summe grösser als die untere Grenze x_0, und kleiner als die obere Grenze x_1 der Continuität der Function ist, ist es, den unser Satz voraussetzt. Ist aber diese Summe grösser, als die obere, oder kleiner, als die untere Continuitäts-Grenze, so hört auch die $n$te Abgeleitete auf, continuirlich zu sein.

In dieser Einschränkung unseres Satzes liegt der Grund, warum nicht jede Function, die mit ihren Abgeleiteten von endlicher Zahl innerhalb zweier Grenzen continuirlich bleibt, nach Maclaurin's Theorem in eine convergente Reihe sich entwickeln lässt; denn die eben angedeutete Form der Abgeleiteten, so wie selbst die Form des Theorems zeigt ohne Beweis, dass

1) die Function eine convergente Reihe giebt, wenn der Werth der $n$ten Abgeleiteten mit n nicht ins Unendliche wächst, und dass

2) die Function eine divergente oder halb convergente Reihe giebt, wenn der Werth der $n$ten Abgeleiteten mit n in's Unendliche zunimmt.

3.

Aus Gleichung 5) in Nro. 1. lässt sich zugleich Maclaurins Reihe mit dem Restgliede entwickeln. Bedeutet nemlich Fx eine zwischen x_0 und x_1 continuirliche Function von x, so hat man für irgend einen Werth k von x, der innerhalb dieser Grenzen liegt, die identische Gleichung

$$F(k) = F(x + [k-x]),$$

in welcher man $k-x$ als Zunahme von x betrachten kann, so dass nach Gleichung 5) in Nro. 1) die Beziehung entsteht:

$$1) \qquad F(k) = F(x) + (k-x)F(x + \Delta[k-x]).$$

In dieser Gleichung muss k, sowie x, zwischen x_0 und x_1 liegen, und für jeden der Werthe von k kann x unendlich verschiedene Werthe annehmen; es kann daher x sich ändern, ohne eine Veränderung des Werthes von k herbeizuführen. Differentiirt man daher mehrmals die Gleichung 1) in Bezug auf x, und schreibt der Kürze wegen u' statt $F(x+\Delta[k-x])$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$0 = F'x - u' + (k-x)u'',$$
$$0 = F'' - 2u'' + (k-x)u''',$$

Digitized by Google

$$0 = F'''x - 3u''' + (k-x)u^{IV},$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$0 = F^{(n)}x - nu^{(n)} + (k-x)u^{(n+1)};$$

aus welchen für u', u'', u''', ... $u^{(n)}$ die Werthe folgen:

$$u' = F'x + (k-x)u'',$$
$$u'' = \frac{F''x}{2} + \frac{(k-x)^2}{2}u''',$$
$$u''' = \frac{F'''x}{2.3} + \frac{(k-x)^3}{2.3}u^{IV},$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$u^{(n)} = \frac{F^{(n)}x}{2.3..n} + \frac{(k-x)^n}{2.3...n}u^{(n+1)}.$$

Diese Werthe aber wandeln die Gleichung 1) in folgende um:

$$2) \qquad F(k) = Fx + (k-x)F'x + \frac{(k-x)^2}{2}F''x + \frac{(k-x)^3}{2.3}F'''x$$
$$+ .... + \frac{(k-x)^n}{2.3...n}F^{(n)}x + \frac{(k-x)^n}{2.3...n}u^{(n+1)},$$

in welcher

$$u^{(n+1)} = F^{(n+1)}(x + \Delta[k-x])$$

ist. Bleibt nun die Function Fx für den Werth $x=0$ continuirlich, sind sonach mit Fx auch alle Abgeleiteten derselben, in endlicher Anzahl genommen, continuirlich, so geht, wenn man z für k schreibt, Gleichung 2) über in

$$3) \qquad Fz = F0 + zF'0 + \frac{z^2}{2}F''0 + \frac{z^3}{2.3}F'''0 + ... + \frac{z^n}{2.3...n}F^{(n)}0$$
$$+ \frac{z^n}{2.3...n}F^{(n+1)}(\Delta z).$$

VIII.

Auflösung der vom Herausgeber des Archivs gestellten Aufgabe: Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen, der einen anderen gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers des letztern Kreises schneidet.

Von dem

Herrn Doctor T. Clausen,

Observator an der Sternwarte zu Dorpat.

---

1. Es seien die gegebenen Punkte A und B (Taf. VII. Fig. 1.) und FGE der gegebene Kreis, dessen Mittelpunkt in D. Theilt man AB in zwei gleiche Theile in J und zieht JC senkrecht auf AB, so liegen die Mittelpunkte aller durch A und B gehenden Kreise auf der Geraden JC. Es sei C der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Zieht man CD und FDE senkrecht auf dieselbe, so sind E und F die beiden Durchschnitte der beiden Kreise. Also wenn man

$$AJ=\alpha,\ JC=\varrho,\ CD=r,\ DF=a$$

setzt, und den Durchmesser des gesuchten Kreises $AC=CF=X$:

$$X^2=\alpha^2+\varrho^2=a^2+r^2. \qquad (1)$$

Der geometrische Ort aller Punkte, in denen diese Gleichung zwischen den Entfernungen von J und von D Statt findet, ist eine Gerade, die auf der JD senkrecht steht. Nimmt man nemlich JD als Axe der x und J als den Anfangspunkt rechtwinklichter Coordinaten, $JD=f$, und nennt x und y die Coordinaten eines der gesuchten Punkte; so wird

Digitized by Google

$$a^2 + x^2 + y^2 = a^2 + (x-f)^2 + y^2$$

oder

$$a^2 = a^2 - 2fx + f^2.$$

Man braucht also nur einen Punkt dieser Geraden zu kennen, um sie ziehen zu können. Einen solchen findet man aber äusserst leicht, da der Gleichung 1) durch folgende Annahme Genüge geleistet wird:

$$\varrho^2 = f^2 + a^2, \quad r^2 = f^2 + \alpha^2.$$

Zieht man demnach DG senkrecht auf JD, bis sie den Kreis in G schneidet, und errichtet $JH = JA$ senkrecht auf JD; so ist in diesem besondern Falle $\varrho = JG$, $r = DH$. Man mache also $JK = JG$ und $DK = DH$ und fälle KC auf JD senkrecht, bis sie die Gerade JC in C schneidet; so ist C der gesuchte Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Es erhellet zugleich, dass es in jedem Falle nur einen solchen Kreis giebt.

2. Man kann die Aufgabe auf eine andere Art lösen, indem man den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise sucht, die durch einen gegebenen Punkt A gehen, und den gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmesser dieses Kreises durchschneiden; und nachher auf dieselbe Weise in Beziehung auf B verfährt. Der gemeinschaftliche Punkt dieser beiden geometrischen Oerter ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Es sei C der Mittelpunkt des gegebenen Kreises (Taf. VII. Fig. 2.), dessen Halbmesser R, CA die Axe der x, C der Anfangspunkt der rechtwinklichten Coordinaten, $CA = a$, die Coordinaten des Mittelpunkts eines der erwähnten Kreise ξ, v; dessen Halbmesser R'; so sind die Gleichungen für die Coordinaten des Durchschnitts dieser beiden Kreise x und y:

$$x^2 + y^2 = R^2 \ldots (1); \quad (x-\xi)^2 + (y-v)^2 = R'^2 \ldots (2);$$

und die Bedingungsgleichung, dass der gesuchte Kreis durch den Punkt A geht, ist:

$$(a-\xi)^2 + v^2 = R'^2 \ldots (3).$$

Subtrahirt man (1) von (2), so ergiebt sich:

$$\xi^2 + v^2 - 2\xi x - 2vy + R^2 = R'^2,$$

und wenn man wiederum von dieser die Gleichung (3) subtrahirt:

$$2\xi(a-x) - 2vy = a^2 - R^2 \ldots (4)$$

eine Gleichung einer Geraden, die die Durchschnittspunkte beider Kreise enthält. Die Bedingung, dass sie durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreise gehe, oder dass sie für $x = 0$, $y = 0$ gelte, giebt:

$$2a\xi = (a-R)(a+R) \ldots (5).$$

Digitized by Google

Diese Gleichung zeigt, dass die Mittelpunkte aller durch A gehenden Kreise, die den gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers schneiden, in einer auf AC senkrechten Geraden liegen. Nun ist aber, wenn man die Gerade AC bis B, ihrem Durchschnitte mit dem gegebenen Kreise, verlängert, und eine beliebige Grade AE zieht, die den Kreis in E und F schneidet:

$$AF.AE = AD.AB = (a-R)(a+R).$$

Macht man also $AE=a$, oder beschreibt man mit dem Halbmesser $AC=a$ einen Kreis, der den gegebenen in E schneidet, zieht darauf AE, die den gegebenen Kreis noch in F schneidet, und nimmt

$$2\xi = AF, \text{ oder } \xi = CG = \frac{1}{2}AF,$$

errichtet die Senkrechte GC' auf AC; so ist diese der gesuchte geometrische Ort aller solchen Kreise.

Verfährt man völlig eben so in Beziehung auf den Punkt B, indem man um B mit dem Halbmesser BC den Kreisbogen CE' beschreibt, bis er den gegebenen Kreis in E' schneidet; zieht die Gerade BE', die den Kreis in einem zweiten Punkte F' schneidet, macht auf der Geraden BC, $CG' = \frac{1}{2}BF'$ und errichtet in G' die Senkrechte $G'C'$ auf BC; so ist diese hinwiederum der geometrische Ort aller durch B gehenden Kreise, die den gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers schneiden.

Der Durchschnitt C' der beiden Geraden GC', $G'C'$, und nur dieser allein, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, der durch die Punkte A und B geht, und den gesuchten Kreis in den Endpunkten H und J desselben Durchmessers schneidet.

Digitized by Google

IX.

Auflösung der Aufgabe: Durch vier gegebene Punkte vier Gerade zu ziehen, die ein Quadrat bilden.

Von dem

Herrn Doctor T. Clausen,

Observator an der Sternwarte zu Dorpat.

Es seien in Taf. VII. Fig. 3. die gegebenen Punkte A, B, C, D und das gesuchte Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$. Zieht man $CE = AB$ senkrecht auf AB; so ist E ein zweiter Punkt der Seite, die durch D geht. Man ziehe also, um das Quadrat zu bilden, DE und durch C eine mit ihr parallele, ferner durch A und B zwei auf diese beiden senkrechte; so bilden diese vier Geraden das gesuchte Quadrat. Eben so würde ein Quadrat entstanden sein, wenn man den Punkt E auf der andern Seite von C auf der Geraden CE genommen hätte. Zwei andere fände man, wenn man von B eine senkrechte auf AC, und wieder zwei andere, wenn man diese senkrecht auf AD zöge. Es giebt also in allem sechs Auflösungen, den Fall ausgenommen, wenn der Punkt E mit D zusammenfällt, wo es deren eine unendliche Anzahl giebt.

Um die Richtigkeit der Auflösung zu zeigen, braucht man nur nachzuweisen, dass $\alpha\beta = \beta\delta$, da nach der Construction alle Winkel rechte sind. Es sei der Durchschnitt der beiden Geraden CE und $B\delta$ in ε: der beiden Geraden CE und AB in η. Es ist $\angle \varepsilon\eta B = \angle \varepsilon\delta E$ durch die Construction beide rechte Winkel, $\angle \delta\varepsilon E = \angle \eta\varepsilon B$, als Scheitelwinkel, also in den beiden Dreiecken $\varepsilon\eta B$, $\varepsilon\delta E$ auch $\angle \eta B\varepsilon = \angle \delta E\varepsilon$, oder $\angle ABa = \angle CEc$. Sei Aa senkrecht auf $B\delta$, also parallel mit $\alpha\beta$ und derselben gleich; Cc senkrecht auf cE, also Cc parallel mit $\beta\delta$ und derselben Geraden gleich.

Digitized by Google

Es sind demnach, da die beiden Dreiecke ABa und CEc rechtwinklicht sind, einen gleichen Winkel überdiess haben, und die den rechten Winkel gegenüberstehenden Seiten AB und CE einander gleich sind: beide Dreiecke einander gleich, und also auch die den beiden gleichen Winkeln $\angle ABa$ und $\angle CEc$ gegenüberstehenden Seiten Aa und Cc oder $\alpha\beta$ und $\beta\delta$ einander gleich.

X.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Satz von dem Herrn Doctor T. Clausen, Observator an der Sternwarte zu Dorpat.

Man kann in Taf. VII. Fig. 4. die Gerade AB ohne Zirkel halbiren, wenn man bloss zwei beliebige Gerade durch A und B zieht, die sich in C schneiden; darauf eine mit AB parallele Gerade zieht, die AC in D und BC in E trifft. Eine durch den Durchschnitt F der beiden Geraden BD und AE aus C gezogene Gerade CG halbirt die AB in G.

Digitized by Google

Druckfehler in der Abhandlung Thl. XIII. Nr. XVI.

Man setze:

Seite 195 Zeile 2 v. u. (7) statt (1).

„ 197 „ 3 v. u. im Zähler $-3)+$ statt $-3+$.

„ 202 „ 1 im Zähler $r^{\prime n}$ statt r^2.

„ „ „ 3 und 12 $(lr)^{2p+1}$ statt $(lr)^{2p}$.

„ „ „ 4 v. u. $de\,lr$ statt (lr).

„ 204 „ 2 v. u.
„ 205 „ 7 und 9 } (q) statt (9).

„ 206 „ 1 im Zähler Cos^2x statt $\mathrm{Cos}x$.

„ „ „ 9 ϱ^m statt ϱ^π.

„ 208 „ 3 $2\mathrm{Cos}^2x-1$ statt $2\mathrm{Cos}^2x=1$.

„ „ „ 4 $=\pi$ statt $-\pi$.

„ „ „ 13 (k) statt (h).

„ „ „ 16 (80) statt (81).

„ 209 „ 19 $\int_0^{2\pi}$ statt $\int_0^{\pi}$.

„ 210 „ 16 (71) statt (91).

„ 211 „ 10 (57) statt (67).

„ 216 „ 13 $\int_0^{2\pi}$ statt $\int_0^{\pi}$.

„ 217 „ 5 $\frac{\pi}{2}$ statt $\frac{\pi}{4}$,

„ 219 „ 10 (G_3) statt (G_2).

Druckfehler im 15ten Theile.

S. 63. Z. 3 statt „$a=$“ (vorn auf der Seite) setze man „$u=$“,

S. 106. Z. 6. v. u. statt „$+\frac{1}{2}\mathrm{Lim}.\,iy^2{}_b-\frac{1}{2}\mathrm{Lim}.\,iy'^2{}_b$“ setze man

„$-\frac{1}{2}\mathrm{Lim}.\,iy^2{}_b+\frac{1}{2}\mathrm{Lim}.\,iy'^2{}_b$“.

Digitized by Google

XI.

Ueber den Begriff der Combinations-Lehre und die Bezeichnung in derselben und einige neue Sätze über die Combinationen mit beschränkten Wiederholungen.

Von dem

Herrn Hofrath Oettinger

zu Freiburg i. B.

I.

Begriff und Bezeichnung der Combinationen.

§. 1.

Es ist nicht zu verkennen, dass die Lehre von den Combinationen seit ihrer Begründung durch Hindenburg, Kramp, Pfaff, Rothe, Weingärtner etc. an Inhalt und Umfang sich sehr erweitert hat. Eine einfache Vergleichung der diese Wissenschaft behandelnden Schriften aus der frühern Zeit mit denen aus der neuern und neuesten bestätigt diese Behauptung für jeden, der sie mit unbefangenem Auge betrachtet, hinlänglich. Sollte nun auch von mancher Seite ein ungünstiges Urtheil über diese Wissenschaft gefällt werden wollen, so behauptet sie doch durch ihre Anwendbarkeit und Brauchbarkeit in so verschiedenen Zweigen der Mathematik ihre Bedeutung und dadurch eine Stellung, welche ihren Einfluss auf die weitere Ausbildung der mathematischen Wissenschaften mehr und mehr sichern wird. Denn nicht nur in der sogenannten combinatorischen Analysis, wofür sie ihre ersten Begründer benutzten, bewährt sie eine unbestrittene Anwendbarkeit und Brauchbarkeit, sondern auch in der Differenzen- und Summenrechnung, in der Lehre von den Fakultäten (und

hiedurch indirect in der Differenzial- und Integralrechnung), bei der Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche, und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung leistet sie unverkennbare und nicht leicht auf anderem Wege ersetzbare Dienste, wie ich durch eine Reihe von Abhandlungen, welche grösstentheils in Crelle's Journal erschienen sind, nachzuweisen mich bemühte, und auch in einem Aufsatze in diesem Archiv (13. Theil. 1. Heft. Nr. II.) andeutete. Sie wird diese gewiss auch in andern Zweigen, z. B. in der Lehre von den continuirlichen Brüchen, in der Zahlenlehre nicht versagen, wenn sie zu diesem Zwecke benutzt und bearbeitet werden wird. Ein Versuch dürfte wohl der Mühe lohnen, selbst wenn der erste nicht gelingen sollte, und der Erfolg dürfte nicht zweifelhaft sein, wenn der Gegenstand von der richtigen Seite angefasst wird.

Wendet man nun den combinatorischen Gebilden seine Aufmerksamkeit zu, so drängen sich sogleich zwei grosse Uebelstände auf. Der eine ist: die verschiedene Benennung ihrer Grundbegriffe und Grundgebilde, der andere die Verschiedenheit, Zerfahrenheit und Unsicherheit in ihrer Zeichensprache, so dass kaum ein leitender Gedanke zu erkennen ist. Jede Wissenschaft bedarf einer Terminologie, denn sie muss ihre Begriffe feststellen und benennen. Je einfacher die Grundlage, worauf diese gebaut ist, desto leichter und klarer wird sich ihre weitere Entwicklung geben lassen. Der Name ist die Bezeichnung der Sache, deswegen aber nicht gleichgültig, denn er wird, wenn er richtig gewählt ist, das Verständniss sehr erleichtern. Gleich bei der ersten Begründung einer Wissenschaft wird daher eine scharfe Sichtung des in ihr zu behandelnden Stoffes nöthig. An ihn muss sich dann Name und Darstellung knüpfen.

Dieser Grundbedingung steht in der Mathematik die Bezeichnung des Begriffes zur Seite, denn in dieser Wissenschaft ist neben dem Begriff und der Benennung auch noch das Zeichen sorgfältig zu beachten. Das Zeichen oder das Symbol kann den Begriff nur andeuten, nicht entwickeln. Zwischen ihm und dem zugehörigen Begriffe findet kein innerer Zusammenhang statt. Es ist etwas Sinnliches, Zufälliges, nicht Haupt- sondern Nebensache und unterliegt der Wahl. Obgleich das Zeichen für etwas Aeusserliches und Zufälliges erklärt werden muss, so ist doch die Wahl desselben nicht gleichgültig, denn hieran knüpfen sich wesentliche Vortheile. Es unterstützt das Gedächtniss, die Auffassung und Darstellung der Begriffe, es erleichtert die Entwicklung und Ausbildung des Systems. Zur Verdeutlichung wird genügen, auf einen Fall, nämlich die Bezeichnung der Wurzelgrössen durch $\sqrt[m]{a}$ und $a^{\frac{1}{m}}$ aufmerksam zu machen. Während die erste Bezeichnungsweise für die Entwicklung schwerfällig und mühevoll ist, wirkt die zweite sehr erleichternd und fördernd. Ein Gleiches gilt von der Zeichensprache in der Combinations-Lehre, und es ist nicht zu verkennen, dass die Verschiedenheit und Zerfahrenheit in der Bezeichnung sehr ungünstig in der Lehre von den Combinationen gewirkt hat und noch wirkt; denn hat sich der Leser

Digitized by Google

die Zeichensprache einer Schrift zu eigen gemacht, so ist da durch der Schlüssel für eine zweite und dritte noch nicht gefunden.

Für die weitere Ausbildung der Combinations-Lehre ist daher eine Feststellung der Grundbegriffe und Bezeichnungsweise von Wichtigkeit. Zu dem Ende mögen folgende Bemerkungen hier ihre Stelle finden, die sich an die in meiner Combinations-Lehre gegebenen Begründungen und Erörterungen anschliessen.

§. 2.

Begriffs-Bestimmung und Eintheilung der Combinationen.

Die Combinationen zerfallen, wie sich leicht bei der ersten Anschauung der durch sie hervorgebrachten Gruppen ergibt, in zwei Arten und zwar:

a) in solche, worin die einzelnen Elemente, welche die Gruppen einer bestimmten Classe hervorbringen, in ihrer Stellung und Aufeinanderfolge unter einander betrachtet werden, und dann

b) in solche, worin die Stellung oder Ordnung der auf einander folgenden Elemente in den einzelnen Gruppen nicht in Betracht kommt, sondern nur darauf Rücksicht genommen wird, in wie fern sich die Gruppen einer bestimmten Classe von einander durch die in ihnen auftretenden Elemente unterscheiden.

In der ersten Art bildet nach dem angegebenen Begriffe die Ordnung, worin die erzeugenden Elemente unter einander erscheinen, das Merkmal der Unterscheidung, und es können mehrere Gruppen die gleichen Elemente, jedoch in veränderter Stellung enthalten; in der zweiten Art fällt dieses Merkmal weg, die Ordnung oder Stellung, worin die erzeugenden Elemente unter einander erscheinen, ist ganz gleichgültig und die Gruppen unterscheiden sich durch die Verschiedenheit der in ihnen vorkommenden Elemente.

Stellt man der Deutlichkeit wegen Combinationen nach dieser Begriffsbestimmung hier zusammen, so hat man für die Gruppen der dritten Classe aus vier Elementen, worin die Stellung der Elemente unter einander beachtet wird, oder für die Gruppen der ersten Art folgende Zusammenstellung:

abc	*bac*	*cab*	*dab*
abd	*bad*	*cad*	*dac*
acb	*bca*	*cba*	*dba*
acd	*bcd*	*cbd*	*dbc*
adb	*bda*	*cda*	*dca*
adc	*bdc*	*cdb*	*dcb*.

Für die Gruppen der dritten Classe aus vier Elementen, worin die Stellung nicht, sondern nur der Zutritt neuer Elemente beachtet wird, also für Gruppen der zweiten Art hat man folgende Zusammenstellung:

abc
abd
acd
bcd.

In den Gruppen der ersten Art kommen je sechs vor (*abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* u. s. w.), die sich immer nur durch die Ordnung oder Stellung, worin die Elemente unter einander vorkommen, unterscheiden. In den Gruppen der zweiten Art ist dieses Merkmal nicht vorhanden. Alle diese sechs Formen haben nur einen Repräsentanten (*abc*) und diese Gruppe unterscheidet sich von der Gruppe *abd*, *acd*, *bcd* durch die Aufnahme von wenigstens einem neuen Elemente.

Die erste Art dieser Gebilde soll mit dem deutschen Namen Versetzungen (die Elemente erscheinen unter einander versetzt); die der zweiten Art mit dem Namen Verbindungen (die Elemente erscheinen unter einander auf verschiedene Art verbunden) bezeichnet, und beide zusammen unter dem allgemeinen Namen Combinationen begriffen werden.

Untersucht man nun beide Arten von Combinationen näher, so können in jeder einzelnen Gruppe beider Arten nur verschiedene Elemente vorkommen. Diess ist in den oben angegebenen Zusammenstellungen der Fall. Es kann aber auch in den einzelnen Gruppen wenigstens ein Element (also auch alle) oder auch nur bestimmte Elemente wiederholt erscheinen, und zwar auf allen Stellen der einzelnen Gruppen oder nur auf bestimmten. Dadurch wird man ferner auf den Begriff der Combinationen mit Wiederholungen geführt, welcher sich auf die beiden vorhin genannten Arten von Combinationen ausdehnt, und man erhält sofort Versetzungen mit Wiederholungen und Verbindungen mit Wiederholungen.

Hiebei unterscheiden sich nun zwei Unterarten von selbst. Es können nämlich bestimmte Elemente ein oder mehrere mal in den einzelnen Gruppen, worin sie erscheinen, wiederholt erscheinen, oder es können alle Elemente, woraus die Gebilde erzeugt werden, wiederholt erscheinen. Im ersten Falle können dabei die Wiederholungen selbst auf verschiedene Weise beschränkt vorkommen. Hiernach zerfallen diese Arten von Combinationen in solche mit beschränkten Wiederholungen und in solche mit unbeschränkten Wiederholungen.

Da die Begriffsbestimmungen dieses Paragraphen die Grundlage der nachfolgenden Erörterungen bilden, und eine klare Einsicht vor allem hier erfordert wird, so soll nun auch eine Zusammenstellung dieser verschiedenen Combinationsarten hier gegeben werden. Wir verfolgen das oben gegebene Beispiel weiter.

Digitized by Google

Die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen aus vier Elementen zur dritten Classe sind:

aaa	*aca*	*baa*	*bca*	*caa*	*cca*	*daa*	*dca*
aab	*acb*	*bab*	*bcb*	*cab*	*ccb*	*dab*	*dcb*
aac	*acc*	*bac*	*bcc*	*cac*	*ccc*	*dac*	*dcc*
aad	*acd*	*bad*	*bcd*	*cad*	*ccd*	*dad*	*dcd*
aba	*ada*	*bba*	*bda*	*cba*	*cda*	*dba*	*dda*
abb	*adb*	*bbb*	*bdb*	*cbb*	*cdb*	*dbb*	*ddb*
abc	*adc*	*bbc*	*bdc*	*cbc*	*cdc*	*dbc*	*ddc*
abd	*add*	*bbd*	*bdd*	*cbd*	*cdd*	*dbd*	*ddd*

Die Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen aus vier Elementen zur dritten Classe sind:

aaa	*bbb*	*ccc*	*ddd*
aab	*bbc*	*ccd*	
aac	*bbd*	*cdd*	
aad	*bcc*		
abb	*bcd*		
abc	*bdd*		
abd			
acc			
acd			
add			

In den Gruppen der ersten Art macht sich der Begriff der Versetzung der einzelnen Elemente in einer Gruppe geltend, wie in *bcd*, *bdc*, *cbd*, *cdb*, *dbc*, *dcb* u. s. w. und zugleich der der Wiederholung, wie in *aaa*, *bbb*,.... und endlich beide in Verbindung mit einander, wie in *aab*, *aba*, *baa*, oder in *abb*, *bab*, *bba* u. s. w. Sie führen daher mit Recht den Namen Versetzungen mit Wiederholungen, denn ihre Eigenthümlichkeit ist durch beide Worte festgehalten.

In den Gruppen der zweiten Art macht sich vorerst der oben unter *b)* gegebene Begriff geltend. Die einzelnen Gruppen unterscheiden sich von einander nicht durch die Stellung der in ihnen vorkommenden Elemente, sondern dadurch, dass in den verschiedenen Gruppen nicht dieselben, sondern verschiedene Elemente vorkommen, und es genügt, wenn auch nur eines unter den vorkommenden Elementen verschieden ist, wie in den Gruppen *aaa*, *aab*, *bcd*, *bdd*.... Ferner macht sich neben der Art, wie die Elemente in den verschiedenen Gruppen mit einander in Verbindung treten, der Begriff der Wiederholung geltend, wie in den Gruppen *aab*, *bbc*, *ccc*.... Diese Gruppen werden in ihrer

Digitized by Google

Eigenthümlichkeit ganz gut durch den Namen Verbindungen mit Wiederholungen bezeichnet.

Die Combinationen mit beschränkten Wiederholungen sollen hier nicht besonders hervorgehoben werden, da wir später auf sie zurückkommen werden.

Die hier gemachten Bemerkungen führen nun zu folgendem Schema über Eintheilung der Combinationen:

1) *Versetzungen.*
   - *a*) Versetzungen ohne Wiederholungen,
   - *b*) Versetzungen mit Wiederholungen.
     - *α*) Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen,
     - *β*) Versetzungen mit unbeschränkten Wiederholungen.

2) *Verbindungen.*
   - *a*) Verbindungen ohne Wiederholungen,
   - *b*) Verbindungen mit Wiederholungen.
     - *α*) Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen,
     - *β*) Verbindungen mit unbeschränkten Wiederholungen.

Dieses Schema empfiehlt sich einerseits durch seine Einfachheit, andererseits durch den Zusammenhang, welcher zwischen beiden Combinationsarten herrscht. Man kann nämlich, wie man sich leicht aus der vorstehenden Zusammenstellung der Gruppen für dieselben überzeugt, von den Gruppen der Versetzungen (mit oder ohne Wiederholungen) zu einer bestimmten Classe auf die Gruppen der Verbindungen (mit oder ohne Wiederholungen) zu derselben Classe übergehen, wenn man aus den Gruppen der Versetzungen die Aufeinanderfolge der Elemente ausstösst, also nur die unter sich verschiedenen Gruppen berücksichtigt; und umgekehrt kann man von den Gruppen der Verbindungen (mit und ohne Wiederholungen) zu einer bestimmten Classe auf die Gruppen der Versetzungen zur nämlichen Classe übergehen, wenn man in die Gruppen der Verbindungen die verschiedene Aufeinanderfolge der Elemente oder die Versetzungen, welche die Elemente einer jeden Gruppe unter sich eingehen können, einführt.

Man könnte auch zur Benennung der verschiedenen Arten von diesen Gebilden nur den Namen Combinationen wählen; dann würden aus dem oben vorgelegten Schema folgende Namen zur Unterscheidung der in Frage stehenden Gebilde fliessen:

- *a*) Combinationen mit Versetzungen.
- *b*) Combinationen mit Versetzungen und Wiederholungen.

Digitized by Google

α) Combinationen mit Versetzungen und beschränkten Wiederholungen,

β) Combinationen mit Versetzungen und unbeschränkten Wiederholungen.

c) Combinationen ohne Versetzungen.

d) Combinationen ohne Versetzungen mit Wiederholungen.

α) Combinationen ohne Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen,

β) Combinationen ohne Versetzungen mit unbeschränkten Wiederholungen.

Diese Benennungen bezeichnen, wie man sieht, dieselben Dinge und Begriffe. Sie sind aber sehr schwerfällig, stehen jedenfalls den zuerst gegebenen an Kürze und Zweckmässigkeit nach und empfehlen sich deswegen keineswegs zur Annahme.

§. 3.

Geschichtliche Notizen über Begriffsbestimmung und Benennung der Combinationen nebst Kritik.

Wir stellen nun dem im vorigen Paragraphen aufgestellten ersten Schema die von Hindenburg gegebene Eintheilung der Combinationen entgegen. Nach ihm zerfallen sie (Novi systematis Permutationum, Combinationum ac Variationum primae lineae. Lips. 1781. pg. 4. u. ff.) in folgende drei:

a) Versetzungen (Permutationes sive transpositiones),

b) Verbindungen (Combinationes sive complicationes),

c) Variationen (Variationes sive complicationes cum permutationibus).

Unter Versetzungen (permutationes) versteht Hindenburg diejenigen Gebilde, welche immer die nämlichen Elemente (res) führen und sich nur durch die Stellung, welche die erzeugenden Elemente unter einander einnehmen, unterscheiden (cum datae res, servata earum multitudine, sed non ordine, omnibus quibus possunt modis coordinantur et transponuntur). Dabei können unter sich gleiche Elemente, aber immer gleich vielmal wiederholt erscheinen (wie z. B. *abb*, *bab*, *bba*). Aus der weitern Ausführung und auch aus der weitern Bestimmung der zugehörigen Gruppenzahl (pg. 23. u. f. des oben angeführten Werkes) geht hervor, dass die Zahl der erzeugenden Elemente der Classenzahl gleich kommen muss. Nach der hier gewählten Terminologie sind es die Versetzungen ohne Wiederholungen aus *n* Elementen zur *n*ten Classe und bestimmte Fälle der Versetzungen

Digitized by Google

mit beschränkten Wiederholungen (also beides nur specielle Fälle zweier Combinationsarten).

Unter Verbindungen (Combinationes) versteht er solche Gebilde, worin die Elemente aus irgend einer gegebenen Anzahl einfach oder zu zweien (Biniones), zu dreien (Terniones) u. s. w. zusammengestellt werden, die Ordnung aber, worin die Elemente auf einander folgen, ausser Acht gelassen wird (nullo tamen ordinis singularum (rerum) vicissitudinisve habito respectu). Dabei können die erzeugenden Elemente wiederholt erscheinen oder nicht.

Unter Variationen versteht er die Gebilde, welche entstehen, wenn in den Gruppen der Verbindungen (ohne und mit Wiederholungen) auch die Versetzungen vorkommen (Variationes sive Complicationes cum Permutationibus). Hiebei wird die unter *a*) gegebene Beschränkung aufgehoben, dass die Elementenzahl mit den Classenexponenten übereinstimmen müsse, und es können die einzelnen Gruppen weniger Elemente führen. Hierunter werden also nach unserer Ausdrucksweise die Versetzungen mit und ohne Wiederholungen aus n Elementen in den verschiedenen Classen verstanden, mit Ausnahme der genannten besondern Fälle. Die von Hindenburg gegebene Begriffsbestimmung wird von ihm jedoch nicht sehr strenge gehalten, denn er führt auch noch andere Falle bei Aufstellung der zugehörigen Zahlenausdrücke unter dieser Benennung auf.

Einen allgemeinen Namen, welcher die drei von ihm aufgeführten Arten dieser Gebilde umschliesst, hat Hindenburg nicht gegeben.

Die von Hindenburg aufgestellte Eintheilung der Combinationen wurde in den meisten, die Combinationslehre behandelnden Schriften beibehalten. So von Weingärtner (Lehrbuch der combinatorischen Analysis. 2 Thle), Stahl (Einleitung in das Studium der Combinationslehre), Lorenz (Lehrbegriff der Syntaktik oder Combinationslehre), Spehr (Lehrbegriff der reinen Combinationslehre), Thibaut (Grundriss der allgemeinen Arithmetik oder Analysis) u. A.

In der gebrauchten Benennung zeigt sich jedoch einige Verschiedenheit. So werden die Verbindungen auch mit dem Namen „Combinationen überhaupt“ mit und ohne Wiederholungen, auch „Combinationen imengern“, oder „eigentlichen Sinne“ bezeichnet. Auch kommen die Namen „geordnete, wohl geordnete“ oder „gut geordnete Combinationen“ vor, so dass man unwillkührlich an die Titel „wohlgeboren, hochwohlgeboren“ etc. erinnert wird.

Der hier gegebene Begriff der Variationen ohne und mit Wiederholungen fällt offenbar mit dem der Versetzungen ohne und mit Wiederholungen, wie er oben in dem von mir aufgestellten Schema vorkommt, zusammen. Nur ist dort weiter, wie es in der Natur der Sache liegt, zwischen beschränkten und un-

Digitized by Google

beschränkten Wiederholungen unterschieden. Die Gebilde, welche Hindenburg und seine Nachfolger unter dem unter *a*) aufgeführten Namen Versetzungen (Permutationes) bezeichneten, sind nach der Hindenburg'schen Terminologie in der That nichts anderes als Variationen ohne Wiederholungen aus *n* Elementen zur *n*ten Classe, worin auch eine bestimmte Zahl von Elementen einander gleich sein kann, verstanden.

Die von Hindenburg aufgestellte Eintheilung der Combinationen in drei Arten: in Permutationen, Combinationen und Variationen, ist nun nicht in der Natur der Sache begründet, widerspricht sogar einer richtigen Anschauungsweise und ist daher unrichtig. Sie charakterisirt einen besondern Fall einer bestimmten Unterart als allgemeinen Begriff, coordinirt ihn anstatt ihn unterzuordnen.

Alle Combinationen (Versetzungen und Verbindungen) zerfallen nach der Zahl der in den einzelnen Gruppen vorkommenden Elemente in verschiedene Classen oder Ordnungen und unterliegen in dieser Zergliederung durchweg den gleichen Gesetzen. Daher ist nicht abzusehen, warum die Gruppen des bestimmten Falles, wenn gerade so viel Elemente in ihnen vorkommen als der Classenexponent Einheiten enthält (Versetzungen aus *n* Elementen zur *n*ten Classe) einen besondern Namen führen und sogar zu einem Gattungsbegriff erhoben werden sollen. Diess geschieht aber offenbar in dem vorliegenden Falle nach der Hindenburg'schen Eintheilungsweise. Wollte man consequent verfahren, so müsste man den Verbindungen aus *n* Elementen zur *n*ten Classe (mit und ohne Wiederholungen) und den Versetzungen und Wiederholungen aus *n* Elementen zur *n*ten Classe auch einen besondern Namen beilegen und sie zu einem Gattungsbegriff erheben, was offenbar gegen jede richtige Schlussfolgerung verstösst.

Diese Erörterung dürfte einem unbefangenen Blicke unzweifelhaft darthun, dass die Hindenburg'sche Eintheilung der Combinationen in drei unter sich verschiedene und coordinirte Arten (Permutationen, Combinationen und Variationen) unrichtig ist, und dass eine richtige Zerlegung des Begriffes nur zwei unter sich verschiedene und coordinirte Arten zulässt, die von Hindenburg Combinationes sive Complicationes und Variationes sive Complicationes cum permutationibus genannt wurden, und die ich mit dem schon lange gebräuchlichen, deutschen Namen „Verbindungen und Versetzungen" bezeichne und wobei nur der Unterschied vorkommt, dass die Benennung „Variationen" durch „Versetzungen" ersetzt ist. Diess schien mir um so zulässiger, da das Wort „Versetzungen" den oben gegebenen Begriff ganz gut und richtiger bezeichnet als das Wort „Variationen", denn letzteres Wort bedeutet „Verwechslung, Abwechslung" und entspricht dem fraglichen Begriffe durchaus nicht.

Hindenburg hat keinen allgemeinen Namen für die in Frage stehenden Gebilde aufgestellt, wie der Titel des oben angeführten Werkes besagt. Sie lassen sich ganz zweckmässig mit dem

Namen „Combinationen“ bezeichnen. Dafür hat auch der Sprachgebrauch entschieden, wie die Ausdrücke „combinatorische Analysis, Combinations-Lehre, combinatorisches Verfahren etc.“ deutlich darthun, wodurch im Allgemeinen die Operationen, welche die Combinationslehre lehrt und die Analysis gebraucht, mit allen sich daran knüpfenden Geschäften, angedeutet werden.

Ganz unstatthaft ist die Benennung „geordnete, wohlgeordnete oder gut geordnete (rite ordinatae) Combinationen“. Sie bezieht sich nur auf die Methode, wie die Gruppen dieser Verbindungen gebildet werden (wobei man zur Erleichterung des Verfahrens allerdings ganz sachgemäss die Elemente nach einer bestimmten Weise ordnet), nicht aber auf die Gruppen und den Begriff selbst, wie diess auch bei der Gruppenbildung der Versetzungen mit und ohne Wiederholungen geschieht. Die Verbindungen (mit und ohne Wiederholungen) charakterisiren sich nach der in §. 2. gegebenen Begriffsentwicklung vorzugsweise als solche Gebilde, worin gerade die Ordnung, in welcher die Elemente auf einander folgen, ausgeschlossen und daher ganz unwesentlich ist. So stellen z. B. die sechs Formen *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* nur eine Gruppe dar, wenn von den Gruppen der Verbindungen zur dritten Classe die Rede ist, denn *acb* hat in diesem Falle die nämliche Bedeutung wie *cba* oder *bca* u. s. f. und alle zusammen vertreten den nämlichen Begriff. Ist aber von den Versetzungen zur dritten Classe die Rede, dann stellen diese Gebilde sechs verschiedene Gruppen dar und *acb* ist eine andere Gruppe als *abc*, oder *cba*. Sie sind nicht mehr unter einander identisch, sondern dem Begriffe nach unter sich gesonderte Dinge.

§. 4.

Bezeichnung der Combinationen.

Um die so wünschenswerthe Einheit und Einförmigkeit für die Bezeichnung der Combinationen zu gewinnen, werden folgende Sätze, die ich schon in meiner Combinationslehre §. 7. aufgeführt habe, als fördernd zu betrachten sein.

Die zu wählenden Zeichen sollen so beschaffen sein, dass sie

1) den anzudeutenden Begriff richtig aufnehmen und daher klar und erschöpfend vorlegen. Alle zur Erzeugung des Begriffs mitwirkende Elemente müssen zusammengefasst werden, keines darf übersehen, und nichts Unerhebliches oder Zufälliges als wesentlich bezeichnet sein;

2) dass sie sich der Methode, wornach die Zeichen einer Wissenschaft überhaupt gewählt werden, anschliessen. Willkühr und Unsicherheit müssen unterdrückt und allgemeinen Gesichtspunkten untergeordnet werden.

Digitized by Google

3) Zeichen, die in der Wissenschaft schon eine bestimmte Bedeutung erhalten haben, müssen hiefür ausschliesslich beibehalten und können nicht auf andere Begriffe übergetragen werden. Die Vernachlässigung dieses Punktes bringt Unsicherheit und Verwirrung in die Bezeichnungsweise.

Nach diesen Andeutungen müssen die Zeichen in der Combinationslehre so gewählt werden, dass in ihnen alle, von einem Begriffe umschlossenen Geschäfte enthalten und ausgesprochen sind. Das Zeichen muss daher angeben:

a) die Art der Combinationen, welche gebildet werden sollen, als da sind: Versetzungen oder Verbindungen, ohne und mit Wiederholungen, mit beschränkten und unbeschränkten;

b) die Elemente, woraus die Gruppen gebildet werden sollen, aus einer oder mehreren Elementenreihen. Viele von den bisher gewählten Zeichen übersehen diese Bedingung ganz, und dürften deswegen unzulässig sein;

c) die Classe, oder Ordnung, d. i. die Zahl der Elemente, welche in jeder der zu bildenden Classen zusammengestellt werden sollen

Ausser diesen drei Grundbedingungen, die in keinem Zeichen fehlen dürfen, können noch andere Nebenbegriffe aufgenommen werden, wie z. B. Summen, welche die zusammenwirkenden Elemente hervorbringen sollen, oder Abtheilungen oder Fächer, worein sie gebracht werden sollen und dergleichen mehr.

Stillschweigend werden wohl in jedem Werke, worin auch nur die ersten Elementarsätze der Combinationslehre behandelt werden, und selbst von denen, die keine Zeichen gebrauchen, sondern den darzustellenden Begriff mit Worten geben, die hier aufgestellten Bedingungen als massgebend anerkannt. Bis zu einer gleichförmigen Bezeichnungsweise hat sich aber diese Anerkennung noch nicht gesteigert. Jeder geht der hergebrachten Gewohnheit nach. Ein richtiges Zeichen aber ist die kürzeste Terminologie, erspart viele Worte und erleichtert die weitere Ausbildung der Wissenschaft ungemein. Die Mathematik erfreut sich dieses Vorzugs. Die Einigung aber scheint auch in diesem Gebiete eine Sisyphus-Arbeit zu sein. Sie kann nicht von dem Einzelnen durchgeführt, sondern muss durch das Zusammenwirken Einzelner angebahnt und durch allmälige Verbesserung bewerkstelligt werden. Hier soll nun der Versuch einer solchen Anbahnung in wohlgemeinter Absicht gemacht werden, der sich vielleicht dadurch empfehlen dürfte, dass die von Hindenburg gewählte aber nicht durchgeführte, in vielen Schriften auch schon angenommene, von andern wieder verlassene Bezeichnungsweise zu Grunde gelegt wird, die überdiess den Vorzug grosser Bildsamkeit und Brauchbarkeit bietet, wie aus meiner Combinationslehre hervorgeht, wo sie sich systematisch weiter ausgebildet und durchgeführt findet.

Digitized by Google

Die Versetzungen werden dieser Methode zufolge durch P (Anfangsbuchstabe des Wortes Permutatio), die Verbindungen durch C (Anfangsbuchstabe des Wortes Combinatio) angedeutet, die Elemente werden neben an geschrieben, durch Kommata getrennt und in Klammern eingeschlossen. Rechts oben an die Schlussklammer kommt die Classenzahl als Exponent zu stehen, so wie die unter $a) - c)$ aufgestellten Sätze es fordern. Die Wiederholungen werden durch einen Strich angezeigt, der oben rechts an den Buchstaben P und C nach dem Vorgange der meisten Schriften gesetzt wird. Beschränkte Wiederholungen werden durch Exponenten angedeutet, welche oben an die zu wiederholenden Elemente angeschrieben werden, wie diess bekanntlich längst gebräuchlich ist.

Hiernach werden die Versetzungen ohne Wiederholungen aus den Elementen a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ (n Elementen) zur $q$ten Classe bezeichnet durch

$$4) \qquad P(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)^q.$$

Die Versetzungen mit Wiederholungen (unbeschränkt) aus denselben Elementen zu derselben Classe durch

$$5) \qquad P'(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)^q.$$

Die Versetzungen, worin ein Element (a_2) $k$mal, ein anderes (a_4) $h$mal wiederholt erscheint (mit beschränkten Wiederholungen) durch

$$6) \qquad P(a_1, a^k{}_2, a_3, a^h{}_4, a_5, \ldots a_n)^q.$$

Hierin ist bekanntlich

$$1 + k + 1 + 1 + h + 1 + \ldots = q.$$

Die Verbindungen ohne und mit Wiederholungen aus den oben genannten Elementen zur $q$ten Classe werden analog durch folgende Zeichen angedeutet:

$$7) \qquad C(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)^q,$$

$$8) \qquad C'(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)^q$$

$$9) \qquad C(a_1, a^k{}_2, a_3, a^h{}_4, a_5, \ldots a_n)^q.$$

Sollen Combinationen in irgend einer Classe zu einer bestimmten Summe bezeichnet werden, so tritt noch ein neues Element hinzu, das in das Zeichen aufgenommen werden muss. Diess wird dadurch angedeutet, dass man in die Klammer vor die Elemente den kleinen lateinischen aber langen Buchstaben ($\int$) und neben ihn die verlangte Summe schreibt, und dann ein Semikolon vor den Elementen folgen lässt. Alles andere bleibt an der Bezeichnung ungeändert. Die Combinationen (Versetzungen und Verbindungen) mit und ohne Wiederholungen aus irgend einer

Digitized by Google

Elementenzahl in der $q$ten Classe zur Summe m werden sofort der Reihe nach bezeichnet durch:

10) $P(\int m; a_1, a_2, a_3, \ldots)^q$,

11) $P'(\int m; a_1, a_2, a_3 \ldots a_{m-q+1})^q$,

12) $C(\int m; a_1, a_2, a_3 \ldots)^q$,

13) $C'(\int m; a_1, a_2, a_3 \ldots a_{m-q+1})^q$.

Sollen Combinationen zu bestimmten Unterschieden angedeutet werden, so werden sie auf die vorstehende Weise, nur mit der Abänderung dargestellt, dass man allenthalben d statt $\int$ schreibt und alles Uebrige in dem Zeichen unverändert lässt. Kommen mehrere Elementenreihen in Frage, so werden sie in die Klammer eingetragen.

Die Zahlenausdrücke der bisher angedeuteten Begriffe lassen sich einfach durch eckige Klammern statt runder angeben. Man hat dann

14) $P[a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^q = n^{q|-1} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)$.

Die hier gegebene Bezeichnungsweise beurkundet ihre Zweckmässigkeit insbesondere dadurch, dass sie sehr leicht noch anderweitige Bestimmungen in sich aufnimmt, und dass sich noch andere Arten von Combinationen und vielerlei mit ihnen vorzunehmende Geschäfte durch sie andeuten lassen, die bisher durch Worte, also auf viel umständlichere Weise, ausgedrückt wurden. Diess ist bei der Verbindung der aus verschiedenen Elementenreihen erzeugten Gruppen unter einander, bei der Vertheilung der Elemente einer oder mehrerer Elementenreihen in Fächer u. s. w. der Fall, wie man sich aus meiner Combinationslehre, aus meiner Abhandlung „die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren Elementenreihen u. s. w." überzeugen kann. Sollen z. B. die Gruppen der Combinationen verschiedener Elementenreihen so mit einander verbunden werden, dass je h Elemente der ersten Reihe mit je k Elementen einer zweiten, mit je l Elementen einer dritten u. s. w. zusammentreten und zwar so, dass sich die Elemente verschiedener Reihen nicht unter einander vermischen, so kann man diess dadurch darstellen, dass man die Dimensionen, in welchen die Elemente neben einander treten, als Exponenten neben einander schreibt und durch Kommata von einander trennt. Hierdurch entstehen folgende Zeichen:

15) $P(a_1, a_2, a_3 \ldots a_m; b_1, b_2, b_3, \ldots b_n; c_1, c_2, \ldots c_p \ldots)^{h,k,l,\ldots}$

16) $C(a_1, a_2, \ldots a_m; b_1, b_2, b_3 \ldots b_n; c_1, c_2, \ldots c_p; \ldots)^{h,k,l,\ldots}$

die auch für die Versetzungen und Verbindungen mit Wiederholungen gelten.

Digitized by Google

Es wird genügen, die Grundzüge dieser Bezeichnungsweise hier festgestellt zu haben. Wegen der weitern Ausführung verweise ich auf den Inhalt der Abschnitte IV—VIII. meiner Combinations-Lehre, wo das Hieher-Gehörige nachzusehen ist.

§. 5

Geschichtliche Bemerkungen.

Die Elemente wurden anfänglich durch die Buchstaben des Alphabetes

$$a, b, c, d, e, f, \ldots\ldots$$

oder durch Zahlen,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$$

bezeichnet und zwar so, dass a das erste, b das zweite, c das dritte Element u. s. w. darstellte. Jedem Elemente wurde auf diese Weise ein Ordnungswerth beigelegt. So bei Hindenburg, Weingärtner, Stahl u. s. w. In spätern Schriften von Thibaut, Scherk u. A. wurde diese Darstellungsweise wieder verlassen und man findet nur ein Element, und über dasselbe die Ordnungszahl geschrieben auf folgende Weise:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & n \\ a, & a, & a, & a, & a, & a & \ldots a. \end{matrix}$$

Diese Bezeichnung ist im Schreiben sehr zeitraubend und für den Druck ungeeignet. Die oben in §. 4. angenommene Bezeichnungsweise der Elemente durch Anhängen der Stellenzahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots . a_n$$

vermeidet diese Nachtheile und fördert den Ueberblick sehr.

Das Vorschreiben der grossen Buchstaben P und C vor die in Klammern eingeschlossenen Elemente zur Bezeichnung der verschiedenen Combinationsarten steht mit der Methode, welche in der neueren Zeit zur Bezeichnung der Begriffe in der Mathematik in Anwendung gebracht wurde, vollkommen in Einklang. Man darf sich nur an die Bezeichnung der Differenzen, Logarithmen, Sinus, Cosinus etc. erinnern. Schon Hindenburg fasste diese Idee auf und sagt p. 41. des oben angeführten Werkes: „Operationes combinatoriae optime et simplicissime indicantur praeponendo ipsa verba, vel literas initiales literis sive numeris, positis pro rebus (Elemente), quibuscum operatio institui debet“ und schlägt folgende Zeichen vor:

Permutationes $(a, b, c, d, \ldots.)$ sive $P(1, 2, 3, 4, \ldots.)$,

Complicationes $(1, 2, 3, 4, \ldots.)$ vel $C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots.)$,

Variationes $(1, 2, 3, 4, \ldots.)$ sive $V(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots.)$;

Digitized by Google

hält aber den Gedanken nicht fest, und wählt sogar eine Bezeichnungsweise, worin die den Begriff erzeugenden Momente gar nicht zu erkennen sind. So bezeichnet er z. B. die Verbindungen aus n Elemente zur ersten, zweiten, dritten Classe u. s. w. durch

$$'A, 'B, 'C, 'D, \ldots.$$

Diese Bezeichnungsweise wird von Weingärtner, Stahl u. A. festgehalten. Dem Classenexponenten wird aber in all diesen Darstellungen keine Rücksicht getragen. In spätern Schriften wird der Exponent über den die Gebilde andeutenden Buchstaben und die Elemente oder Zahlen werden unten oder rechts zur Seite angeschrieben auf folgende Weise:

$$\overset{\gamma}{C}(a, b, c, \ldots n) \text{ oder } \overset{\gamma}{C}(1, 2, 3, \ldots n)$$

oder

$$\overset{\gamma}{C}_{(a, b, c, \ldots n)} \quad \text{oder} \quad \overset{\gamma}{C}_{(1, 2, 3, \ldots n)}.$$

Unzweifelhaft gebührt dem Zeichen

$$C(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)^{\gamma}$$

vor den genannten der Vorzug. In manchen Fällen und namentlich bei Collectiv-Bezeichnungen können zur Raum-Ersparung die Elemente unten angeschrieben werden.

Sollte nun noch der Begriff der Summe aufgenommen werden, so wurde die sie bezeichnende Zahl rechts oder links oben angeschrieben. Diese Stelle gebührt aber nicht der Summe, sondern dem Exponenten; daher muss das die Summe vertretende Zeichen eine andere Stelle einnehmen, wie diess auch schon oben durchgeführt ist.

Um nun zu zeigen, auf welche Weise die Bezeichnungen in den Combinationen durch einander laufen, soll hier Einiges zusammen und den oben gegebenen Zeichen gegenüber gestellt werden. Wir geben das Schema mit unseren Zeichen und denen von Hindenburg, Thibaut, Eytelwein und Spehr gebrauchten:

Digitized by Google

	Hindenburg	Thibaut Eytelwein Spehr
1) Versetzungen ohne Wiederholungen	$P(a_1,a_2,\ldots a_n)^m$, M'(lieg. M), $\overset{m}{V'}$,	V_m;
2) Versetzungen mit Wiederholungen	$P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^m$, $'M$(lieg. M), $'\overset{m}{V}$,	$'V_m$, $\overset{m}{V}$;
3) Versetzgn. mit Wiederhol. zu best. Summen	$P'(fn;a_1,a_2,..)^m$, ${}^nM$(lieg. M), ${}^n\overset{m}{V}_m$,	${}^nV'_m$, ${}^n\overset{m}{V}$;
4) Verbindungen ohne Wiederholungen	$C(a_1,a_2,\ldots a_n)^m$, M'(steh.M), $\overset{m}{C'}$,	C_m, $\overset{m}{C}$;
5) Verbindungen mit Wiederholungen	$C'(a_1,a_2,\ldots a_n)^m$, 'M(steh.M), $'C^m$,	$C'_{\overline{m}}$, $\overset{m}{C}$;
6) Verbind. mit Wiederh. zu best. Summen	$C'(fn;a_1,a_2,..)^m$, m^nM(steh.M), $c^n\overset{m}{C}$,	$\mu^s C'_m$, $\rho^n\overset{m}{C}$.

Wer ein treues Bild von dieser verwirrenden Bezeichnungsweise wünscht, der wird sie in der Schrift über „die Bezeichnung in der combinatorischen Analysis von Weingärtner“ finden, wo noch weitere Zusammenstellungen hierüber gegeben sind. Jedenfalls wird das Streben, und das ist hier Hauptsache, gerechtfertigt erscheinen, Ordnung in diese Unsicherheit und systemlose Zerfahrenheit und Verwirrung zu bringen. Zu diesem Zweck ist auch eine Schrift von C. G. Scheibert erschienen unter dem Titel „Ein Versuch die Combinationslehre als Wissenschaft zu begründen und die Wort- und Zeichensprache in ihr festzustellen“. Ferner hat der Herr Herausgeber dieses Archivs schon längst (1. Supplem.-Bd. zu Klügel's Wörterbuch der Mathematik S. 409. u. f.) auf das Bedürfniss und die Nothwendigkeit hingewiesen, auf möglichste Vereinfachung der Bezeichnung in der Combinationslehre hinzuwirken und sich zu einer gleichförmigen und gemeinschaftlichen Bezeichnungsweise zu vereinigen. Diesem Bedürfnisse soll die von mir vorgeschlagene Bezeichnungsweise entgegen kommen. Ich bin weit entfernt, sie für die einzig richtige zu erklären. Sie soll eine Grundlage sein, auf welcher man weiter aufbauen kann. Der Vorzug dürfte ihr wenigstens zuzusprechen sein, dass man durch sie und auf ganz consequente und systematische Weise weiter gelangt, als man mit jeder der bisher vorgeschlagenen und angenommenen gekommen ist. Man verbessere oder suche sie zu verbessern. Genügt sie nicht und ist das Mangelhafte an ihr nachgewiesen, so verlasse man sie. Es wird immer ein Gewinn sein, auf dem Wege des Ungenügenden zu dem Bessern vorgeschritten zu sein.

Aus den hier vorgelegten Gründen kann ich mich auch nicht der Ansicht derer anschliessen, die bei der genannten Sachlage in der neuesten Zeit auf die Begriffsbestimmung und Benennung

Digitized by Google

aus der Zeit des ersten Anfangs der Combinationslehre von Hindenburg wieder zurückkehren, da sich diese Bestimmungen und Bezeichnungen den gemachten Bemerkungen zufolge ungenügend erweisen.

Diess ist der Fall in einer Abhandlung von Herrn Weiss, welche im 34. Bande S. 255. und 38. Bd. S. 107. in Crelle's Journal erschienen ist und den Titel führt: „Einige Aufgaben aus der Combinationslehre". Der von dem Verfasser gewählte Gegenstand ist gut und gründlich durchgearbeitet. Man findet aber dort „im Einklange mit ältern Werken" wie es heisst, die Definitionen, Eintheilung und Benennungen wieder, wie sie oben §. 3. von Hindenburg aufgestellt wurden, und wornach sie in „Permutationen, Combinationen und Variationen" (S. 255. Crelle's Journ.) zerfallen. Ich glaube es dem Urtheile des Lesers überlassen zu sollen, ob nach dem in §. 3. Gesagten diese Eintheilung zulässig ist oder nicht, und bedauere nur, dass der Verfasser, der mit sehr grosser Gewandtheit seinen Stoff behandelt hat, nicht Veranlassung genommen hat, die Gründe anzugeben, warum er diese Eintheilung und Benennung festhält, und warum eine Aenderung derselben, die sich meines Dafürhaltens im Laufe der Zeit doch schon fühlbar gemacht hat, unzulässig erscheinen dürfte. Es hätten sich gewiss hieran Anhaltpunkte zur Verbesserung und Berichtigung und dadurch unmittelbar oder mittelbar zur Feststellung der Begriffe und der Zeichen knüpfen lassen. Wir vermissen diess um so mehr, da Herr Weiss in seiner Abhandlung einen bisher noch wenig beachteten Zweig der Combinationslehre „die Combinationen (Versetzungen und Verbindungen) mit beschränkten Wiederholungen" behandelt hat, der ihm gewiss Gelegenheit zu weitern Andeutungen für richtige Bezeichnungsweise gegeben hätte. Den Gegenstand selbst hat er in einer Ausdehnung untersucht, wie er bisher in den hierher gehörigen Schriften nicht untersucht wurde. Ein Theil der einschlagenden Aufgaben findet sich von Herrn Professor Scherk (Mathematische Abhandlungen. Berlin 1825. S. 67.) bearbeitet, aber nicht bis zu dem Umfange fortgeführt, welchen der Verfasser ihm zu geben wusste.

Wenn nun der genannte Gegenstand auch von mir hier aufgegriffen wird, so geschieht diess einerseits deswegen, weil ich die Bedeutung dieses Gegenstandes in der Combinationslehre und den beiden angeführten Arbeiten gerne anerkenne, andererseits deswegen, weil sich diesem Gegenstand noch eine weitere Ansicht abgewinnen lässt, wodurch sich, im Hinblicke auf die zu erzielenden Resultate, die Ausbeute neuer Sätze noch steigert. Der Gegenstand wird aber hier nicht in seinem ganzen Umfang behandelt werden, da es sich nicht darum handelt, Bekanntes wiederzugeben, sondern nur in so weit, als die Entwicklungsweise verschieden ist, und soweit die Auffindung anderer Sätze etwa Vorbereitung erheischt. Hierbei werde ich mich der oben aufgestellten und in meiner Combinationslehre durchgeführten Bezeichnungsweise bedienen.

Digitized by Google

II.

Einige Sätze über die Verbindungen und Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen.

§. 6.

Unter

$$1) \qquad C(a_1, \overset{p}{a_2}, a_3, \overset{r}{a_4}, \ldots a_n)^q$$

werden die Gruppen der Verbindungen aus n Elementen zur $q$ten Classe verstanden und zwar so, dass in jeder einzelnen Gruppe das Element a_2 gerade $p$mal (nicht mehr nicht weniger) und das Element a_4 gerade $r$mal und gleichzeitig mit ihnen von den übrigen Elementen jedes nur einmal in der erforderlichen Ergänzung bis zur Classendimension (q) vorkommen soll. Dieser Begriff und das Zeichen 1) steht ganz analog mit dem, was schon längst durch das Zeichen

$$2) \qquad P(a_1, \overset{p}{a_2}, a_3, \overset{r}{a_4}, \ldots a_n)^q$$

ausgedrückt wird.

Die hiedurch bedingte Gruppenanzahl ergibt sich durch Ausscheidung der zu wiederholenden Elemente sehr leicht und es ist

$$3) \quad C[a_1, \overset{p}{a_2}, a_3, \overset{r}{a_4}, \ldots a_n]^q = a_2^p a_4^r C[a_1, a_3, a_5, \ldots a_n]^{q-p-r}$$
$$= (n-2)_{q-p-r} = \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n+p+r-q-1)}{1.2\ldots\ldots(q-p-r)}.$$

Das Gesetz trägt sich auf folgende Weise in's Allgemeine über:

$$4) \quad C[\overset{p_1}{a_1}, \overset{p_2}{a_2}, \ldots \overset{p_r}{a_r}, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots a_n]^q$$
$$= a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_r^{p_r} C[a_{r+1}, a_{r+2} \ldots a_n]^{q-p_1-p_2 \ldots -p_r}$$
$$= (n-r)_{q-p_1-p_2 \ldots -p_r} = \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-q+p_1+p_2 \ldots p_r+1)}{1.2\ldots\ldots(q-p_1-p_2-\ldots-p_r)},$$

wenn unter

$$5) \quad (m)_x = \frac{m^{\underline{x}|-1}}{1^{\underline{x}|1}} = \frac{m(m-1)\ldots(m-x+1)}{1.2\ldots\ldots x}$$

oder nach Legendre'scher Schreibart

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(m)}$$

Digitized by Google

standen wird. Der Kürze wegen werden wir im Folgenden uns nächlich des Ausdrucks 5) bedienen.

In der vorstehenden Form ist der in 1), 3) und 4) liegende griff sehr enge und bald erschöpft. Bemerkt man aber, dass den Gruppen der Verbindungen mit unbeschränkten Wiederungen jedes Element für sich alle Wiederholungen bis zum sexponenten in allen zwischenliegenden Abstufungen durchfen kann, so lässt sich der in 1), 3) und 4) liegende Begriff erern und man kann folgende Probleme zur Beantwortung vor-

Die Gruppen der Verbindungen aus irgend einer mentenzahl zur $q$ten Classe werden gebildet:

a) wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin e bestimmte Anzahl von Elementen wenigstens einal, eine andere wenigstens zweimal, eine dritte wegefens dreimal u. s. w. wiederholt erscheint?

b) wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin e bestimmte Anzahl von Elementen höchstens einal, eine andere höchstens zweimal, eine dritte höchens dreimal u. s. w. wiederholt erscheint?

Hieran schliessen sich noch folgende in anderer Beziehung ht uninteressante Aufgaben an.

Die Gruppen der Verbindungen aus irgend einer mentenzahl zur $q$ten Classe werden gebildet

c) wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin gend eines der gegebenen Elemente wenigstens $r$mal derholt erscheint?

d) wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin es chstens $r$mal wiederholt erscheint?

Die unter *a*) aufgestellte Aufgabe soll so angedeutet werden:

$$C(a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \overset{2}{a}_{n_1+2}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{3}{a}_{n_2+1}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4} \ldots \overset{k}{a}_{n_k})^q.$$

Die unter *b*) aufgestellte so:

$$C(a_1, a_2, \ldots a_{n_k}, \overset{k}{a}_{n_k+1}, \ldots \overset{k-1}{a}_{n_{k-1}}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \overset{2}{a}_{n_2+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots a_{n_1})^q.$$

In dem Symbole 6) liegen folgende Bedingungen: n_1 Elemente

$$(a_1, a_2, \ldots a_{n_1})$$

wenigstens einmal; n_2 Elemente

$$(\overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2})$$

Digitized by Google

sollen wenigstens zweimal; n_3 Elemente

$$(a_1^{3}, a_2^{3}, \ldots a_{n_1}^{3}, \ldots a_{n_2}^{3}, \ldots a_{n_3}^{3})$$

sollen wenigstens dreimal wiederholt u. s. w. in den zu bildenden Gruppen vorkommen. Diess liegt in der Natur der Sache. Denn wenn eine bestimmte Elementenzahl wenigstens einmal vorkommen soll, so muss sie auch zweimal, ferner dreimal u. s. w. und endlich $q$mal (so oft als der Exponent angiebt) vorkommen. Für die Gruppirung der wiederholenden Elementenzahlen ergibt sich daher hinsichtlich der Grösse folgende Bedingung:

$$8) \qquad n_1 < n_2 < n_3 < n_4, \ldots < n_k.$$

Hiernach ist n_1 die kleinste und n_k die grösste Zahl. Die zwischen liegenden Werthe von n sind aufsteigend geordnet.

In dem Symbole 7) liegen folgende Bedingungen. n_1 Elemente

$$(a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n_1}),$$

also alle, sollen höchstens einmal; n_2 Elemente

$$(a_1^{2}, a_2^{2}, a_3^{2} \ldots a_{n_2}^{2})$$

sollen höchstens zweimal oder als Zweifaches; n_3 Elemente

$$(a_1^{3}, a_2^{3}, a_3^{3}, \ldots a_{n_3}^{3})$$

sollen höchstens dreimal oder als Dreifaches u. s. w. vorkommen, wie diess auch hier in der Natur der Sache liegt. Es ist ferner n_1 die grösste und n_k die kleinste Zahl. Die übrigen Zahlenwerthe liegen zwischen beiden Grenzen in abnehmendem Werthe. Hieraus ergibt sich folgende Bedingung:

$$9) \qquad n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \ldots > n_k.$$

k kann sich höchstens bis zu q erheben. Das Gesagte schliesst jedoch nicht aus, dass in 8) und 9)

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \ldots$$

sein kann, oder dass die n alle unter einander oder partienweise unter einander gleich sein können.

Die Aufgaben unter *c*) und *d*) stellen sich durch folgende Symbole ganz einfach dar:

$$10) \qquad {}'C(a_1^{r}, a_2^{r}, a_3^{r}, \ldots a_n^{r})^{q},$$

$$11) \qquad {}^{*}C(a_1^{r}, a_2^{r}, a_3^{r}, \ldots a_n^{r})^{q}.$$

Wird $r=1$ in 10), so fällt die Bedeutung von 10) mit $C'(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$ zusammen, denn es entstehen sofort die Gruppen der Verbindun-

Digitized by Google

gen mit unbeschränkten Wiederholungen aus n Elementen zur $q$ten Classe, denn es sollen die Gruppen der Verbindungen gebildet werden, worin jedes Element wenigstens einmal vorkommt. Wird $r=q$ in 11), so fällt 11) mit dem nämlichen Begriff zusammen, denn es sollen die Gruppen der Verbindungen aus n Elementen zur $q$ten Classe gebildet werden, worin jedes Element höchstens $q$mal wiederholt vorkommen soll. Mehr als $q$mal kann es nicht wiederholt vorkommen.

Manche werden vielleicht die Symbole 6) und 7) als schwerfällig tadeln. Ich glaube aber nicht, dass dieser Vorwurf gerecht ist, wenn man bedenkt, wie viele Worte erfordert werden, um den Sinn derselben nach *a*) und *b*) anzudeuten, und ferner bedenkt, wie viele Bedingungen in die Zeichen nach dem Inhalte der Aufgabe gelegt werden müssen, die alle anzugeben in Worten noch viel umständlicher ist, und wenn man endlich berücksichtigt, wie mühsam es wird aus den Worten die Bedingungen der Aufgabe sich klar zu machen, was alles durch das Symbol sehr veranschaulicht wird.

Die unter *a*)—*d*) aufgestellten Probleme lassen sich auf die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen anwenden. Die Uebertragung auf die Versetzungen wird dadurch leicht bewirkt, dass man in die Verbindungsgruppen die zugehörigen Versetzungszahlen einführt.

§. 7.

Die im vorigen Paragraphen vorgelegten Aufgaben lassen sich durch die besondere Art von Combinationen lösen, die sich im 5ten Abschnitte meiner Combinationslehre §. 31 — §. 37. S. 73 u. ff. aufgeführt finden, und die durch den Zusammentritt mehrerer Elementenreihen entstehen. Die Gleichung, welche zur Beantwortung dient, ist §. 36. Nro. 112. S. 85. angegeben und folgende:

1) $$C[a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_m; c_1, c_2, \ldots co; \ldots]^{h,k,l,\ldots}$$

$$= \frac{n^{h|-1}(m-h)^{k|-1}(o-h-k)^{l|-1}\ldots}{1^{h|1}.1^{k|1}.1^{l|1}\ldots} = (n)_h(m-h)_k(o-h-k)_l\ldots.$$

Diese Gleichung bestimmt die Gruppenanzahl der Verbindungen, wenn h Elemente der ersten Elementenreihe, mit k nicht ähnlichen (ungleichartigen) Elementen aus der zweiten und beide mit weitern l nicht ähnlichen oder ungleichartigen aus der dritten Elementenreihe u. s. w. zusammen treten. Unter ähnlichen oder gleichartigen Elementen werden nämlich solche verstanden, welche verschiedenen Elementenreihen zugehören, aber die gleichen Stellenzahlen führen, also die ersten, zweiten, dritten Elemente u. s. w. in den verschiedenen Elementenreihen, wie z. B.

Digitized by Google

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots\ldots$$

$$a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots\ldots$$

u. s. f. Die Gleichung 1) hat das Eigenthümliche, dass bei den nämlichen Elementenreihen und Classenexponenten die veränderte Ordnung, worin die Elementenreihen mit ihren zugehörigen Classenexponenten auf einander folgen, verschiedene Gruppenanzahlen erzeugt. (S. Combinationslehre S. 74. und 75). Die Gruppenanzahl wird am grössten, wenn die Elementenreihen nach der Zahl ihrer Elemente geordnet werden, so dass die Elementenzahl jeder nachfolgenden Reihe die der vorhergehenden an Grösse übertrifft. Diese Anordnung wird im Folgenden vorausgesetzt und ist schon in 8) §. 6. vorausgesehen. Wird eine andere Anordnung verlangt, oder bedingt, so ändert sich damit die Gruppenzahl.

Die Gleichung 1) kann nun dadurch für den vorliegenden Zweck bei Bildung der Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen benutzt werden, dass man unter den Elementen der verschiedenen Reihen beziehlich solche Elemente versteht, welche als **einfache** oder gerade **einmal wiederholt**, welche als **zweifache** oder gerade **zweimal wiederholt**, als **dreifache** u. s. w. zu betrachten sind. Hiernach ist z. B.

$$C[a_1, a_2, \ldots a_n; a_1^{2}, a_2^{2}, \ldots a_m^{2}; a_1^{3}, a_2^{3}, \ldots a_p^{3}]^{3,2,1}$$

$$= (n)_3 . (m-3)_2 (p-5)_1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} \cdot \frac{p-5}{1}$$

und man erhält die Gruppenanzahl der Verbindungen, worin drei unter sich verschiedene Elemente der ersten Reihe als **einfache** oder **gerade einmal wiederholt**, mit zwei weitern unter sich und von den andern verschiedenen Elementen der zweiten Reihe als **zweifache** oder **gerade zweimal wiederholt** und beide sofort mit je einem weitern, von sämmtlichen vorhergehenden verschiedenen Elemente aus der dritten Reihe als **dreifaches** oder gerade **dreimal wiederholt** erscheint. Die hierdurch entstehenden Gruppen gehören der (3.1+2.2+1.3)ten oder 10ten Classe an. Die allgemeine Darstellung für dieses Gesetz ist

$$2)\quad C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; a_1^{2}, a_2^{2}, \ldots a_{n_2}^{2}; a_1^{3}, a_2^{3}, \ldots a_1^{k}, a_2^{k}, \ldots a_{n_k}^{k}]^{q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots}$$

$$= (n_1)_{q_1} . (n_2 - q_1)_{q_2} . (n_3 - q_1 - q_2)_{q_3} \ldots (n_k - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k-1})_{q_k}$$

$$= \frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-q_1+1)}{1.2\ldots q_1} \cdot \frac{(n_2-q_1)(n_2-q_1-1)\ldots(n_2-q_1-q_2+1)}{1.2\ldots q_2} \ldots$$

Da diese Darstellung die Grundlage des Calculs bildet, so soll ein besonderer Fall zur bessern Einsicht und Erleichterung des Ueberblickes hier stehen:

Digitized by Google

3) $C(a_1, a_2, a_3, a_4; a_1^{2}, a_2^{2}, \ldots a_5^{2}, a_6^{2}; a_1^{3}, a_2^{3}, \ldots a_6^{3}, a_7^{3})^{3,2,1}$

$= a_1 a_2 a_3 \; a_4 a_4 \; a_5 a_5 \; a_6 a_6 a_6 + a_1 a_2 a_4 \; a_3 a_3 \; a_5 a_5 \; a_6 a_6 a_6$

1	2	3	4	4	5	5	7	7	7	1	2	4	3	3	5	5	7	7	7
1	2	3	4	4	6	6	5	5	5	1	2	4	3	3	6	6	5	5	5
1	2	3	4	4	6	6	7	7	7	1	2	4	3	3	6	6	7	7	7
1	2	3	5	5	6	6	4	4	4	1	2	4	5	5	6	6	3	3	3
1	2	3	5	5	6	6	7	7	7	1	2	4	5	5	6	6	7	7	7

$+ a_1 a_3 a_4 \; a_2 a_2 \; a_5 a_5 \; a_6 a_6 a_6 + a_2 a_3 a_4 \; a_1 a_1 \; a_5 a_5 \; a_6 a_6 a_6$

1	3	4	2	2	5	5	7	7	7	2	3	4	1	1	5	5	7	7	7
1	3	4	2	2	6	6	5	5	5	2	3	4	1	1	6	6	2	2	2
1	3	4	2	2	6	6	7	7	7	2	3	4	1	1	6	6	7	7	7
1	3	4	5	5	6	6	2	2	2	2	3	4	5	5	6	6	1	1	1
1	3	4	5	5	6	6	7	7	7	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7

Diese Darstellung umfasst die Gruppen mit beschränkten Wiederholungen zur 10ten Classe aus sieben Elementen, worin je drei Elemente von den vier ersten gerade einmal mit je zwei andern Elementen von den sechs ersten gerade zweimal und mit je einem weitern Elemente von den sieben ersten gerade dreimal wiederholt zusammen vorkommen. Die Elemente a_5 und a_6 dürfen daher nicht weniger als zweimal, das Element a_7 nicht weniger als dreimal vorkommen, wie klar vorliegt. Die Gruppenanzahl des vorliegenden Falles ist

4) $$C[a_1, a_2, \ldots a_4; a_1^{2}, \ldots a_6^{2}; a_1^{3}, a_2^{3}, \ldots a_7^{3}]^{3,2,1}$$
$$= (4)_3 (6-3)_2 (7-5)_1 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{3.2}{1.2} \cdot \frac{2}{1} = 24.$$

Sollen nun die für die Verbindungen aufgefundenen Sätze 1)—3) auf die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen unter den gleichen Prämissen übergetragen werden, so wird diess sich leicht bewerkstelligen lassen. Betrachtet man nemlich die Darstellung 3), so zeigt sich klar, dass jede Gruppe gleichviel verschiedene und gleichviel wiederholte Elemente führt. Man findet daher für jede einzelne Gruppe nach §. 9. meiner Combinationslehre aus der bekannten Formel die verlangte Versetzungszahl. Da nun jede Gruppe demselben Gesetze unterliegt, so hat man die Gesammtzahl der Gruppen mit der für jede einzelne Gruppe geltenden Versetzungszahl zu vervielfachen. Hiernach ist für den besondern mit 3) correspondirenden Fall

Digitized by Google

$$P[a_1, a_2, \ldots a_4; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_6}; \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_3}, \ldots \overset{3}{a_7}]^{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2.1.2.3} \times (4)_3 (6-3)_2 (7-5)_1 = 3628800$$

$$= \frac{(3.1+2.2+1.3)^{3.1+2.2+1.3|-1}}{(1^{1|1})^3 . (1^{2|1})^2 . 1^{3|1}} (4)_3 (6-3)_2 (7-5)_1 .$$

Um nun den in 2) aufgestellten Satz auf die Versetzungen überzutragen, hat man jede Gruppe so vielmal zu nehmen, als sich die in ihr vorkommenden Elemente unter einander versetzen lassen.

Es kommen nun in jeder Gruppe vor q_1 Elemente je einmal wiederholt, q_2 Elemente je zweimal, q_3 Elemente je dreimal u. s. w. und endlich q_k Elemente je $k$mal wiederholt. Daher hat die Dimension der zugehörigen Classe oder der Classenexponent

5) $$q = 1.q_1 + 2.q_2 + 3.q_3 + 4.q_4 + \ldots . k.q_k$$

Einheiten. Die hiedurch bedingte Versetzungszahl ist sofort

6) $$\frac{q^{q|-1}}{(1^{1|1})^{q_1} (1^{2|1})^{q_2} (1^{3|1})^{q_3} \ldots (1^{k|1})^{q_k}}$$

$$= \frac{q(q-1)(q-2)\ldots . 3.2.1}{(1)^{q_1} (1.2)^{q_2} (1.2.3)^{q_3} \ldots . (1.2.3 \ldots k)^{q_k}}$$

mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung 5). Die gesuchte Gruppenanzahl der Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen ist sofort unter den oben angegebenen Voraussetzungen

7) $$P[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}; \ldots . \overset{k}{a_1}, \overset{k}{a_2}, \ldots \overset{k}{a_{n_k}}]^{q_1, q_2, \ldots q_k}$$

$$= \frac{1.2.3 \ldots . q}{(1)^{q_1} (1.2)^{q_2} (1.2.3)^{q_3} \ldots (1.2.3..k)^{q_k}} (n_1)_{q_1} (n_2 - q_1)_{q_2} \ldots .$$

$$\ldots . (n_k - q_1 - q_2 \ldots - q_{k-1})_{q_k} .$$

Die Gleichungen 2) und 7) vereinfachen sich sehr, wenn die Zahl der Elemente in den verschiedenen Reihen gleich und

$$n_1 = n_2 = \ldots . \; n_k = n$$

ist. Für diesen Fall nehmen die begleitenden Fakultäten folgende Gestalt an:

$$\frac{n^{q_1 + q_2 + \ldots . q_k|-1}}{1.2 \ldots . q_1 . 1.2 \ldots . q_2 \ldots . 1.2 \ldots . q_k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \ldots . (n - q_1 - q_2 \ldots . - q_k + 1)}{1.2 \ldots . q_1 . 1.2 \ldots q_2 \ldots . 1.2.3 \ldots q_k} .$$

Digitized by Google

Die beiden Gleichungen lassen sich in so weit noch verallgemeinern als die Wiederholungsexponenten, welche in einer bestimmten Reihenfolge (1, 2, 3.....) bisher genommen wurden, auch beliebig angenommen werden können. Diese Bemerkung führt zu folgenden allgemeinen Formen:

$$8)\qquad C[a_1^{k_1},\ldots a_{n_1}^{k_1};a_1^{k_2},\ldots a_{n_2}^{k_2}\ldots a_1^{k_k},a_2^{k_k}\ldots a_{n_k}^{k_k}]^{q_1,q_2,\ldots q_k}$$

$$=(n_1)_{q_1}(n_2-q_1)_{q_2}(n_3-q_1-q_2)_{q_3}\ldots(n_k-q_1-q_2\ldots-q_{k-1})_{q_k}.$$

$$9)\qquad P[a_1^{k_1},a_2^{k_2},\ldots a_{n_1}^{k_1};a_1^{k_2},\ldots a_{n_2}^{k_2};\ldots a_1^{k_k},\ldots a_{n_k}^{k_k}]^{q_1,q_2,q_3\ldots q_k}$$

$$=\frac{1.2.3.4\ldots q}{(1.2\ldots k_1)^{q_1}(1.2\ldots k_2)^{q_2}\ldots(1.2.3\ldots k_k)^{q_k}}(n_1)_{q_1}(n_2-q_1)_{q_2}\ldots$$

$$\ldots(n_k-q_1-q_2\ldots-q_{k-1})_{q_k}$$

mit der Bedingung, dass in 9) ist

$$10)\qquad q=k_1q_1+k_2q_2+k_3q_3\ldots k_kq_k.$$

Willkührlich ist in diesen Darstellungen

a) die Zahl der Elemente, welche in den einzelnen Reihen vorkommen,

$$n_1,\ n_2,\ n_3\ldots n_k$$

mit der in 8) §. 6. angegebenen Beschränkung;

b) die Wiederholungszahlen

$$k_1,\ k_2,\ k_3\ldots k_k;$$

c) die Exponenten

$$q_1,\ q_2,\ q_3\ldots q_k,$$

welche sich auf die verschiedenen Reihen beziehen. (Vertheilungsexponenten).

Der Classenexponent ist eine Funktion der k und q, also von diesen nach Massgabe der Gleichung 10) abhängig.

Anders stellt sich die Sache, wenn die im vorigen Paragraphen unter *a*) bis *d*) gestellten Fragen beantwortet werden sollen. In diesem Falle sind dann die Wiederholungsexponenten (1,2,3...k) der Elemente und der Classenexponent (q), der für 2) und 7), 8) und 9) gilt, gegeben und man hat nach dem Gesetze der Gleichungen 5) und 10) die Vertheilungsexponenten $q_1,\ q_2,\ q_3\ldots q_k$ aus dem Classenexponenten und den Wiederholungsexponenten abzuleiten. Dadurch wird die Aufgabe im Allgemeinen zu einer

unbestimmten. Sie wird jedoch für jeden besondern Fall lösbar und die Auflösung besteht dann darin, dass man alle in ihr enthaltenen besondern Fälle specialisirt und nach den vorstehenden Gleichungen behandelt. Der Inbegriff aller hierdurch erhaltenen Gruppenzahlen ist dann die Antwort auf die in §. 6. vorgelegten Fragen. Wir erörtern zu dem Ende die verschiedenen Classen, daraus wird sich dann ein Bildungsgesetz ableiten lassen.

§. 8.

1) Die Gruppenzahl der Verbindungen zur zweiten Classe soll bestimmt werden

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}]^{2}$$

worin n_1 Elemente wenigstens einmal und n_2 Elemente zweimal wiederholt erscheinen.

Die Aufgabe umschliesst zwei Fälle. n_1 Elemente sollen als einfache gerade zweimal und n_2 als zweifache erscheinen. Es ist aus 2) §. 7.

$$C[a_1, a_2 \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_1}]^{2,0} = (n_1)_2 = \frac{n(n-1)}{1.2},$$

$$C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}]^{0,1} = (n_2)_1 = n_2.$$

2) Die Gruppenzahl soll bestimmt werden für

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{3}{a}_{n_2+1}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^{3}.$$

Diese Aufgabe umfasst drei Fälle. n_1 Elemente sollen als einfache gerade dreimal; n_2 Elemente sollen als zweifache mit n_1 Elementen als einfache und n_3 Elemente sollen als dreifache erscheinen. Aus 2) §. 7. ist

$$C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}; \overset{3}{a}_1, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^{3,0,0} = (n_1)_3 = \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)}{1.2.3},$$

$$C[a_1, a_2 \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1 \ldots \overset{2}{a}_{n_2}; \overset{3}{a}_1, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^{1,1,0} = (n_1)(n_2-1) = n_1(n_2-1),$$

$$C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}; \overset{3}{a}_1, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^{0,0,1} = (n_3)_1 = n_3.$$

Man erkennt schon hieraus, dass das Specialisiren der einzelnen Fälle, das sich bei den höhern Classen mehrt, ziemlich

Digitized by Google

weitläufig wird. Wir wollen es dadurch abkürzen, dass wir für die n_1 Elemente, welche als einfache erscheinen sollen, das Zeichen e^1 als Repräsentanten; für die n_2 Elemente, die als zweifache erscheinen sollen, das Zeichen e^2 als Repräsentanten wählen u. s. w. Hiernach werden die Elemente bezeichnet werden, wie folgt:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n_1} \text{ durch } e^1,$$

$$\overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \overset{2}{a}_3, \ldots \overset{2}{a}_{n_2} \text{ durch } e^2,$$

$$\overset{3}{a}_1, \overset{3}{a}_2, \overset{3}{a}_3, \ldots \overset{3}{a}_{n_3} \text{ durch } e^3$$

u. s. f. Soll nun die Gruppenzahl bestimmt werden für

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{3}{a}_{n_2+1} \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}]^4,$$

so ergeben sich folgende Fälle. n_1 Elemente sollen als einfache gerade viermal erscheinen; n_2 Elemente sollen als zweifache einmal mit n_1 Elementen als einfache zweimal; n_2 Elemente als zweifache zweimal; n_3 Elemente als dreifache einmal mit n_1 Elementen als einfache einmal; n_4 Elemente als vierfache einmal. Wir deuten diess durch die e^1, e^2, e^3 an und führen dabei diese Symbole zwischen Gleichheitszeichen mit auf, wodurch allmälig das Bildungsgesetz hervortreten wird. Nach 2) §. 7. ist

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{4,0,0,0} = e^1 e^1 e^1 e^1 = (e^1)^4 = (n_1)_4,$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{2,1,0,0} = e^1 e^1 e^2 = (e^1)^2 e^2 = (n_1)_2 (n_2 - 2)_1,$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{0,2,0,0} = e^2 e^2 = (e^2)^2 = (n_2)_2,$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{1,0,1,0} = e^1 e^3 = (n_1)_1 (n_3 - 1),$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{0,0,0,1} = e^4 = n_4.$$

4) Die Gruppenzahl soll bestimmt werden für

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}]^5.$$

Die Aufgabe umschliesst die Fälle: n_1 Elemente sollen als einfache fünfmal erscheinen; n_2 Elemente als zweifache einmal mit n_1 Elementen als einfache dreimal; n_2 Elemente als zweifache zweimal mit n_1 Elementen als einfache; n_3 Elemente als dreifache mit n_1 Elementen als einfache zweimal; n_3 Elemente als dreifache mit n_2 Elementen als zweifache; n_4 Elemente als vierfache mit n_1 Elementen als einfache; n_5 Elemente als fünffache. Aus 2) §. 7. ist

Digitized by Google

$$C[e^1,e^2,e^3,e^4,e^5]^{5,0,0,0,0} = e^1e^1e^1e^1e^1 = (e^1)^5 = (n_1)_5,$$

$$C[e^1,e^2,e^3,e^4,e^5]^{3,1,0,0,0} = e^1e^1e^1e^2 = (e^1)^3e^2 = (n_1)_3(n_2-3)_1$$

$$C[e^1,e^2,e^3,e^4,e^5]^{1,2,0,0,0} = e^1e^2e^2 = e^1(e^2)^2 = (n_1)_1(n_2-1)_2,$$

$$C[e^1,e^2,e^3,e^4,e^5]^{2,0,1,0,0} = e^1e^1e^3 = (e^1)^2e^3 = (n_1)_2(n_3-2),$$

$$C[e^1,e^2,e^3,e^4,e^5]^{0,1,1,0,0} = e^2e^3 = (n_2)_1(n_3-1),$$

$$C[e^1,e^2,e^3,e^4,e^5]^{0,0,0,0,1} = e^5 = (n_5)_1.$$

Schon aus den Darstellungen 3) und 4) erkennt man durch die Exponenten der e das Fortgangsgesetz. Sie bilden die Verbindungen mit Wiederholungen zu derjenigen Summe, welche der Classenexponent angibt, durch alle möglichen Classen, oder die Zerfällungen des Classenexponenten in alle möglichen Zahlen, zu einem, zweien, dreien Gliedern u. s. f. In Nro. 3) entsteht die Summe 4, in 4) entsteht die Summe 5) aus den Elementen 1, 2, 3.... mit Wiederholungen.

Man hat nun nicht mehr nöthig alle Verbindungsausdrücke zum Voraus darzustellen, um die nöthigen Specialisirungen zu erhalten. Man kann sogleich mit Darstellung der Gruppen der e beginnen, und die Auffindung aller zusammengehörigen Fälle sich dadurch erleichtern, dass man mit e^1 (dem Exponenten in der ersten Dimension als Einfaches) beginnt, und diesen so oft wiederholt bis der Classenexponent erzeugt ist. Hierauf nimmt man e^2 (den Exponenten in der zweiten Dimension) und lässt so oft e^1 und e^2 (beide zuerst getrennt und dann in Verbindung mit einander) zutreten, bis auf jede mögliche Weise die zu bildende Summe erzeugt ist. Hierauf nimmt man e^3 (den Exponenten in der dritten Dimension oder den Repräsentanten der dreifachen) und lässt so oft e^1, e^2, e^3 (getrennt und in Verbindung mit einander) zutreten, bis die zu bildende Summe auf jede mögliche Weise hervorgebracht ist, und steigt so allmälig zu den höhern Dimensionen auf, bis alle durchlaufen und alle möglichen Fälle durch Zutreten der gleichen und niedern Dimensionen erschöpft sind.

Soll nun die Gruppenzahl für

$$5) \qquad C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a_{n_1+1}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots \overset{3}{a_{n_3}}, \ldots \overset{6}{a_{n_6}}]^6$$

angegeben werden, so hat man hiernach folgende Specialisirung und Zusammenstellung:

Digitized by Google

$$e^1e^1e^1e^1e^1e^1e^1 = (e^1)^6,$$

$$e^1e^1e^1e^1e^1e^2 + e^1e^1e^1e^2e^2 + e^2e^2e^2 = (e^1)^4e^2 + (e^1)^2(e^2)^2 + (e^2)^3,$$

$$e^1e^1e^1e^3 + e^1e^2e^3 + e^3e^3 = (e^1)^3e^3 + e^1e^2e^3 + (e^3)^2,$$

$$e^1e^1e^4 + e^2e^4 = (e^1)^2e^4 + e^2e^4,$$

$$e^1e^5 = e^1e^5,$$

$$e^6 = e^6.$$

Hiefür ergeben sich nun folgende Zahlenausdrücke aus 2) §. 7.

6)
$$\begin{aligned}&(n_1)_6 + (n_1)_4(n_2-4)_1 + (n_1)_2(n_2-2)_2 + (n_2)_3\\ &+ (n_1)_3(n_3-3)_1 + (n_1)(n_2-1)(n_3-2) + (n_3)_2\\ &+ (n_1)_2(n_4-2)_1 + n_2(n_4-1)_1\\ &+ n_1(n_5-1) + (n_6)_1.\end{aligned}$$

Vergleicht man nun die Darstellung 6) mit der Darstellung der e aus 5) auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so kann man die Zahlenausdrücke in 6) direct aus jenen und ohne Beihülfe von 2) §. 7. erhalten, wenn man die Exponenten der e innerhalb der Klammer als Stellenzahlen von n schreibt und die Exponenten ausserhalb der Klammern als Fakultätsexponenten anhängt. Bei dem Zutritt von einem neuen n muss immer die Summe der vorhergehenden Fakultätsexponenten abgezogen werden. Kommt bei einem e kein Exponent ausserhalb der Klammer vor, so ist immer die Einheit als solcher anzunehmen.

Wird nun zu weiterer Verdeutlichung noch der Ausdruck

7)
$$C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a_{n_1+1}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots \overset{3}{a_{n_3}}, \ldots \overset{7}{a_{n_7}}]^7$$

nach dieser Methode behandelt, so hat man sofort als Schema für die e

$$e^1e^1e^1e^1e^1e^1e^1 = (e^1)^7,$$

$$e^1e^1e^1e^1e^1e^2 + e^1e^1e^1e^2e^2 + e^1e^2e^2e^2 = (e_1)^5e^2 + (e^1)^3(e^2)^2 + e^1(e^2)^3,$$

$$e^1e^1e^1e^1e^3 + e^1e^1e^2e^3 + e^1e^3e^3 + e^2e^2e^3 = (e^1)^4e^3 + (e^1)^2e^2e^3 + e^1(e^3)^2 + (e^2)^2e^3$$

$$e^1e^1e^1e^4 + e^1e^2e^4 + e^3e^4 = (e^1)^3e^4 + e^1e^2e^4 + e^3e^4,$$

$$e^1e^1e^5 + e^2e^5 = (e^1)^2e^5 + e^2e^5,$$

$$e^1e^6 + e^7 = e^1e^6 + e^7.$$

Hieraus ergiebt sich sofort folgende Gruppenzahl für 7):

Digitized by Google

$$(n_1)_7 + (n_1)_5(n_2-5) + (n_1)_3(n_2-3)_2 + n_1(n_2-1)_3$$
$$+ (n_1)_4(n_3-4) + (n_1)_2(n_2-2)(n_3-3) + n_1(n_3-1)_2$$
$$+ (n_1)_3(n_4-3) + n_1(n_2-1)(n_4-2) + n_3(n_4-1)$$
$$+ (n_1)_2(n_5-2) + n_2(n_5-1)$$
$$+ n_1(n_6-1) \quad + n_7.$$

Diese Untersuchungen führen nun zu folgender Zusammenstellung:

8) $$'C[a_1, a_2, \ldots a_n]^1 = n,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}]^2 = (n_1)_2 + n_2,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^3 = (n_1)_3 + n_1(n_2-1) + n_3,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}]^4 =$$
$$= (n_1)_4 + (n_1)_2(n_2-2) + (n_2)_2 + n_1(n_3-1) + n_4,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{5}{a}_{n_3}]^5 =$$
$$= (n_1)_5 + (n_1)_3(n_2-3) + n_1(n_2-1)_2$$
$$+ (n_1)_2(n_3-2) + n_2(n_3-1) + n_1(n_4-1) + n_5,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \overset{6}{a}_{n_6}]^6 =$$
$$= (n_1)_6 + (n_1)_4(n_2-4) + (n_1)_2(n_2-2)_2 + (n_2)_3$$
$$+ (n_1)_3(n_3-3) + n_1(n_2-1)(n_3-2) + (n_3)_2$$
$$+ (n_1)_2(n_4-2) + n_2(n_4-1) + n_1(n_5-1) + n_6$$

u. s. f.

In allen den vorliegenden Problemen findet sich die Forderung, dass eine bestimmte Zahl Elemente wenigstens einmal, eine zweite wenigstens zweimal wiederholt vorkommen soll u. s. f. Es können nun in den Wiederholungszahlen auch Unterbrechungen vorkommen. Diess ändert die Schlussweise und Bildungsmethode in nichts, und man hat die zwischenliegenden fehlenden Wiederholungszahlen sämmtlich der nächstvorhergehenden niedern gleich zu setzen und dann nach der Zusammenstellung 8) die erforderlichen Gruppenzahlen anzugeben. Oder man hat nach der oben angegebenen Vorschrift das Schema der e ohne Rücksicht der $n_1, n_2, n_3 \ldots$ zu entwerfen und nach Massgabe desselben die zugehörigen Gruppenzahlen (2) §. 7.) abzuleiten. Ist z. B.

$$'C[a_1, a_2 \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{4}{a}_{n_3+1}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}]^5$$

Digitized by Google

zu bestimmen, so fehlt die Wiederholungszahl 3, und die ihr zugehörige Elementenzahl n_3. Sie ist durch n_2 zu ersetzen, denn das Schema 4) bleibt in Kraft, da n_2 Elemente auch dreimal (weil wenigstens zweimal) vorkommen sollen. Man hat sofort

9) $$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{4}{a}_{n_3+1}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}]^5 =$$
$$= (n_1)_5 + (n_1)_3(n_2-3) + n_1(n_2-1)_2$$
$$+ (n_1)_2(n_2-2) + n_2(n_2-1) + n_1(n_4-1) + n_5.$$

Eben so ist

10) $$'C[a_1, a_2 \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^6 =$$
$$= (n_1)_6 + (n_1)_4(n_2-1) + (n_1)_2(n_2-2) + (n_2)_3$$
$$+ (n_1)_3(n_3-3) + n_1(n_2-1)(n_3-2) + (n_3)_2$$
$$+ (n_1)_2(n_3-2) + n_2(n_3-1) + n_1(n_3-1) + n_3.$$

Die Anwendung auf besondere Fälle ergibt sich nun sehr leicht. Man hat nämlich für den besondern Fall

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_8, \overset{3}{a}_9, \overset{3}{a}_{10}, \overset{3}{a}_{11}, \overset{4}{a}_{12}, \overset{5}{a}_{13}, \overset{5}{a}_{13}]^5 =$$

$$= 974 = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} + \frac{8.7.6}{1.2.3}.5 + 8.\frac{7.6}{1.2} + \frac{8.7}{1.2}.10 + 8.11 + 8.11 + 14.$$

Denn es ist

$$n_1 = 8,\ n_2 = 8,\ n_3 = 12,\ n_4 = 12,\ n_5 = 14.$$

Bei allen diesen Gebilden ist Bedingung, dass sich die Wiederholungszahlen bis zum Classenexponenten erheben müssen. Fehlen die spätern, so ist stillschweigende Bedingung, dass sie bis dahin fortgeführt werden. Fehlen aber frühere Wiederholungszahlen, so fallen alle die Gebilde der e aus dem Schema weg und deswegen sind auch die n, welche die fehlende Stellenzahl tragen, in den Darstellungen von 8) gleich 0 zu setzen. Es liegt alsdann die Aufgabe vor, die Summen der Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen in den verschiedenen Classen mit ausgeschlossenen Anfangselementen zu bilden und darauf die Gleichung 2) §. 7. anzuwenden.

Hiernach ist z. B.

11) $$'C[\overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{6}{a}_{n_6}]^6 = e^2e^2e^2 + e^2e^4 + e^3e^3 + e^6$$
$$= (n_2)_3 + n_2(n_4-1) + (n_3)_2 + n_6,$$

Digitized by Google

$$'C[\overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_{n_3}}, \ldots \overset{4}{a_{n_4}}, \ldots \overset{9}{a_{n_9}}]^9 = e^3 e^3 e^3 + e^3 e^6 + e^4 e^5 + e^9$$
$$= (n_3)_3 + n_3 (n_6 - 1) + n_4 (n_5 - 1) + n_9$$

§. 9.

Die nämliche Schlussfolgerung, so wie die im vorigen Paragraphen entwickelte Methode, gilt auch für die in 7) §. 6 gestellte Aufgabe

$$^*C(\overset{k}{a_1}, \overset{k}{a_2}, \ldots \overset{k}{a_{n_k}}, \ldots \overset{k-1}{a_{n_{k-1}}}, \ldots \overset{3}{a_{n_3}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots a_{n_1}]^q.$$

Man hat zur Darstellung der Gruppenzahlen die nämlichen Schemata der e zu entwerfen. Die Symbole e^1, e^2, e^3, ... vertreten dann der Reihe nach die Elemente

$$a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}; \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_{n_3}}; \ldots$$

jedoch mit dem Unterschiede, dass hier

$$n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \ldots > n_k$$

ist, und dadurch die n_1, n_2, n_3, ... in der entwickelten Darstellung die umgekehrte Ordnung wie in §. 8. einnehmen.

Berücksichtigt man diess, was sich leicht durch Specialisirung einiger Fälle rechtfertigt, so hat man sofort zur Darstellung der gesuchten Gruppenzahlen Folgendes:

1) $^*C(a_1, a_2, \ldots a_n]^1 = n,$

$$^*C[\overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, a_{n_2+1}, \ldots a_{n_1}]^2 = (n_1)_2 + n_2,$$

$$^*C[\overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_{n_3}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots a_{n_1}]^3 = (n_1)_2 + n_2 (n_1 - 1) + n_3,$$

$$^*C[\overset{4}{a_1}, \overset{4}{a_2}, \ldots \overset{4}{a_{n_4}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots a_{n_1}]^4 = (n_1)_2 + n_2 (n_1 - 1)_2 + (n_2)_2$$
$$+ n_3 (n_1 - 1) + n_4,$$

$$^*C[\overset{5}{a_1}, \overset{5}{a_2}, \ldots \overset{5}{a_{n_5}}, \ldots \overset{4}{a_{n_4}}, \ldots \overset{3}{a_{n_3}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots a_{n_1}]^5 =$$
$$= (n_1)_2 + n_2 (n_1 - 1)_3 + (n_2)_2 (n_1 - 2) + n_3 (n_1 - 1)_2$$
$$+ n_3 (n_2 - 1) + n_4 (n_1 - 1) + n_5,$$

$$^*C[\overset{6}{a_1}, \overset{6}{a_2}, \ldots \overset{6}{a_{n_6}}, \ldots \overset{5}{a_{n_5}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots a_{n_1}]^6 =$$
$$= (n_1)_2 + n_2 (n_1 - 1)_4 + (n_2)_2 (n_1 - 2)_2 + (n_2)_3$$
$$+ n_3 (n_1 - 1)_3 + n_3 (n_2 - 1) (n_1 - 2) + (n_3)_2$$
$$+ n_4 (n_1 - 1)_2 + n_4 (n_2 - 1) + n_5 (n_1 - 1) + n_6$$

Digitized by Google

u. s. w, Die Wiederholungszahlen und die mit ihnen correspondirenden Stellenzahlen der n können sich höchstens bis zum Classenexponenten erheben. Fehlen die höhern Wiederholungszahlen von oben herab, so fallen die sie vorstellenden e aus dem Schema und die n mit den correspondirenden Stellenzahlen werden 0. Fehlt eine zwischenliegende Wiederholungszahl, oder mehrere, so tritt so lange die nächst höhere Wiederholungszahl an ihre Stelle, bis wieder andere folgen. Fehlen die niedersten, so ergänzt die nächst höhere sämmtliche fehlende Stellen. Hiernach ist z. B.

$$2)\ {}^{s}C[a_1^5,\ a_2^5,\ldots a_{n_5}^5,\ldots a_{n_4}^4,\ldots a_{n_3}^3]^5 =$$
$$=(n_3)_3+n_3(n_3-1)_3+(n_3)_2(n_3-2)+n_3(n_3-1)_2$$
$$+n_3(n_3-1)+n_4(n_3-1)+n_5,$$

denn es ist $n_1=n_3$, $n_2=n_3$, weil $a_1, a_2, \ldots a_{n_3}$ Elemente höchstens dreimal, also auch zweimal und einmal vorkommen sollen, und ferner

$$3)\ {}^{s}C[a_1^4,\ a_2^4,\ldots a_{n_4}^4,\ldots a_{n_3}^3,\ldots a_{n_2}^2\ldots a_{n_1}]^6 =$$
$$=(n_1)_6+n_2(n_1-1)_4+(n_2)_2(n_1-2)_2+(n_2)_3$$
$$+n_3(n_1-1)_3+n_3(n_2-1)(n_1-2)+(n_3)_2$$
$$+n_4(n_1-1)_2+n_4(n_2-1),$$

weil keine fünf- und sechsfachen Elemente, also auch nicht n_5 und n_6 vorkommen sollen u. s. w. Die besondern Fälle bestimmen sich leicht. So ist nach 1)

$${}^{s}C[a_1^4,\ a_2^4,\ldots a_6^4,\ a_7^2,\ a_8^2,\ a_9^2]^5=1146$$
$$=\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}+9.\frac{8.7.6}{1.2.3}+\frac{9.8}{1.2}.7+6.\frac{8.7}{1.2}+6.8+6.8,$$

denn es ist

$$n_1=9,\ n_2=9,\ n_3=6,\ n_4=6,\ n_5=0.$$

Ebenso hat man

$${}^{s}C[a_1^4,\ a_2^4,\ldots a_4^4,\ a_5^2,\ldots a_8^2,\ a_9\ a_{10}]^4$$
$$=\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}+8.\frac{9.8}{1.2}+\frac{8.7}{1.2}+4.9+4$$
$$=566,$$

denn es ist

$$n_1=10,\ n_2=8,\ n_3=4,\ n_4=0.$$

Digitized by Google

Der Ausdruck, der auch geschrieben wird:

$$^{*}C[a_1^{0}, a_2^{4}, a_3^{4}, a_4^{4}, a_5^{2}, a_8^{2}, a_9 \cdot a_{10}]^4,$$

ist nicht wohl zulässig, denn die Wiederholungen können nicht höher als der Exponent (4) steigen.

§. 10.

Die in §. 6. unter *c*) und *d*) genannten Aufgaben lassen sich nun ohne alle Schwierigkeit lösen. Sie charakterisiren sich als besondere Fälle der in den beiden vorhergehenden Paragraphen beantworteten allgemeineren. Sollen nun die Gruppenanzahlen im einzelnen Falle bestimmt werden, so hat man die verschiedenen Elementenzahlen gleich und

$$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots . n_k = n$$

zu setzen, und die nöthigen Schemata nach §. 8. aufzustellen, oder man kann auch die Zusammenstellung 8) §. 8. und 1) §. 9. direct benutzen, indem man diejenigen Ausdrücke unterdrückt, welche vermöge der Aufgabe nicht vorkommen dürfen. Diess Unterdrücken hängt von der Stellenzahl der n ab. Nach der Aufgabe *c*) §. 6. müssen nämlich alle Ausdrücke in 8.) §. 8., worin alle Stellenzahlen der n ausschliesslich niederer als r sind, ausgestossen werden. Nach der Aufgabe *d*) §. 6. müssen aber diejenigen Ausdrücke ausgestossen werden, worin Stellenzahlen der n vorkommen, welche höher als r sind.

Im letzten Falle ist die Sache an und für sich klar. Weniger klar dürfte die Sache im ersten Falle sein. Es werden aber einige Worte genügen, um sie festzustellen. Soll die Gruppenzahl der Verbindungen aus n Elementen zur $q$ten Classe bestimmt werden, worin irgend ein Element wenigstenst r mal wiederholt erscheint, so ist dadurch nicht ausgeschlossen, dass die andern Elemente nicht in niederer Anzahl wiederholt vorkommen dürfen, denn die Aufgabe verlangt, dass irgend ein Element entweder r, oder $(r+1)$, oder $(r+2)$ mal u. s. w. vorkommen solle. An diese Forderung können sich nun alle die Erscheinungen in den einzelnen Gruppen knüpfen, die mit dem Sinne der Aufgabe nicht in Widerspruch stehen, als da sind das Vorkommen einzelner Elemente in geringerer Wiederholungszahl. Sollte der Zutritt der so eben berührten Elemente ausgeschlossen sein, so müsste die Aufgabe so formulirt sein: Die Gruppenzahl der Verbindungen aus n Elementen in der $q$ten Classe soll bestimmt werden, worin kein Element weniger als $r$mal wiederholt erscheint, oder worin jedes mitwirkende Element wenigstens $r$mal wiederholt erscheint". Der Sinn dieser Aufgabe ist aber offenbar ein ganz anderer als der hier in Frage stehende und unter *c*) §. 6. ausgesprochene. Die hierher gehörigen Fragen können, wie leicht zu erkennen ist, mit den vorhandenen

Digitized by Google

Mitteln nur im einzelnen Falle bestimmt werden, lassen sich aber immer beantworten. Hiernach hat man z. B. für die Gruppenzahl der Verbindungen aus n Elementen in der 6ten Classe, worin irgend ein Element wenigstens dreimal wiederholt erscheint,

$$1)\ {}'C[a_1^3,\ a_2^3,\ldots a_n^3]^6 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3) + n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2) + 2n(n-1) + n.$$

Die Gruppenzahl der Verbindungen aus n Elementen in der 6ten Classe, worin irgend ein Element höchstens dreimal wiederholt erscheint, ist aus 1) §. 9.

$$2)\ {}^*C[a_1^3, a_2^3, \ldots a_n^3]^6 = \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{1.2\ldots n} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.2.3.4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}.$$

Dass die hier gemachten Schlüsse richtig sind, bestätigt sich dadurch, dass man von den Gruppenanzahlen der Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen auf die mit unbeschränkten übergehen kann. So ist aus 8) §. 8.

$$'C[a_1^1,\ a_2^1, \ldots a_n^1]^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + n(n-1) + n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = {}'C[a_1,\ a_2, \ldots a_n]^3,$$

wie diess sein muss, wenn die Gruppen der Verbindungen aus n Elementen zur 3ten Classe gebildet werden, worin die Elemente wenigstens einmal (also auch zwei und dreimal) wiederholt erscheinen sollen. Ebenso ist aus 1) §. 9.

$$^*C[a_1^3,\ a_2^3, \ldots a_n^3]^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + n(n-1) + n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = C'[a_1,\ a_2, \ldots a_n]^3,$$

wie diess sein muss, weil die Elemente in den Gruppen höchstens dreimal (also auch zwei und einmal) wiederholt erscheinen sollen. Diess bestätigt sich auch an Zahlenbeispielen. So ist

$$'C[a_1^3,\ a_2^3, \ldots a_6^3]^6 = 321 = \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot 3 + 6.5.4 + \frac{6.5}{1.2} + \frac{6.5}{1.2}\cdot 4 + 2.6.5 + 6,$$

$$*C[a_1^3, a_2^2, \ldots a_6^2]^6 = 141$$
$$= \frac{6.5..2.1}{1.2..6} + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4} + \frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{4.3}{1.2} + \frac{6.5.4}{1.2.3}.$$

Beide Ausdrücke ergänzen sich zur vollständigen Gruppenanzahl mit unbeschränkten Wiederholungen, und es ist, wie sein muss,

$$C'[a_1^3, a_2^3, \ldots a_6^3]^6 + *C[a_1^2, a_2^2, .. a_6^2]^6 = 321 + 141 = 462,$$

$$C'[a_1, a_2, \ldots a_6]^6 = \frac{6.7.8.9.10.11}{1.2.3.4.5.6} = 462;$$

also

$$C'[a_1, a_2, .. a_6]^6 = 'C[a_1^3, a_2^3, \ldots a_6^3]^6 + *C[a_1^2, a_2^2, .. a_6^2]^6.$$

§. 11.

Die Gruppenanzahlen der Versetzungen, ohne und mit Wiederholungen, lassen sich aus den Gruppenanzahlen der Verbindungen (ohne und mit Wiederholungen) ableiten, wenn man in die einzelnen Gruppen der Verbindungen die Versetzungen einführt, welche die in ihnen vorkommenden Elemente unter einander eingehen können.

Wendet man das Gesagte auf die in §. 7.—§. 10. gefundenen Sätze an, so beantworten sich folgende Probleme:

Die Versetzungen aus irgend einer Elementenzahl zur $q$ten Classe werden gebildet. Wie gross ist

a) die Anzahl der Gruppen, worin eine bestimmte Anzahl von Elementen wenigstens einmal, eine andere wenigstens zweimal, eine dritte wenigstens dreimal u. s. w. wiederholt erscheinen? Diess stellt sich in Zeichen so dar:

1) $$'P[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, a_{n_1+1}^2, \ldots a_{n_2}^2, .. a_{n_3}^3, \ldots a_{n_k}^k]^q;$$

b) die Anzahl der Gruppen, worin eine bestimmte Anzahl von Elementen höchstens einmal, eine andere höchstens zweimal, eine dritte höchstens dreimal u. s. w. wiederholt erscheinen? In Zeichen

2) $$*P[a_1^k, a_2^k, \ldots a_{n_k}^k, a_{n_k+1}^{k-1}, \ldots a_{n_{k-1}}^{k-1}, \ldots a_{n_2}^2, \ldots a_{n_1-1}, a_{n_1}]^q;$$

c) die Anzahl der Gruppen, worin irgend ein Element wenigstens r mal wiederholt erscheint?

Digitized by Google

3) $'P[\overset{r}{a_1}, \overset{r}{a_2}, \ldots \overset{r}{a_n}]^q$;

d) die Anzahl der Gruppen, worin irgend ein Element höchstens *r*mal wiederholt erscheint?

4) $^*P[\overset{r}{a_1}, \overset{r}{a_2}, \ldots \overset{r}{a_n}]^q$.

Man hat zu dem Ende nach Angabe von §. 8. die nöthigen Schemata zu entwickeln, hieraus die Funktionen der n, wie dort geschehen, abzuleiten und mit jeder einzelnen nach 6) und 7) §. 7. die gehörige Versetzungszahl zu verbinden, denn jede Funktion von n bezieht sich auf gleichartige Gebilde der Gruppen.

Die Versetzungszahlen leiten sich dadurch aus den Gebilden der e unmittelbar leicht ab, wenn man bemerkt, dass alle zusammengehörige Ausdrücke eines Schemas einer und derselben Dimension oder Classe zugehören. Jede einzelne Gruppe der e führt daher auf eine Bruchfakultät, deren Zähler die so vielte um die Einheit steigende Fakultät von der Einheit ist als die Summe aller in ihr vorkommenden Exponenten von e angiebt, und deren Nenner aus so vielen um die Einheit steigenden Fakultäten besteht, als e vorkommen. Die Exponenten der e bilden dann die Exponenten der einzelnen Fakultäten. Kommt man auf das Schema 5) in §. 8. zurück, so gehört zu

$e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1 = (e^1)^6$ die Versetzungszahl $\dfrac{1^{6|1}}{1^{1|1}1^{1,1}1^{1|1}1^{1,1}1^{1,1}1^{1|1}}$,

$e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^2 = (e^1)^4 e^2$ „ „ $\dfrac{1^{6|1}}{1^{1|1}1^{1,1}1^{1|1}1^{1|1}1^{2|1}}$,

$e^1\ e^1\ e^2\ e^2 = (e^1)^2 (e^2)^2$ „ „ $\dfrac{1^{6|1}}{1^{1,1}1^{1|1}1^{2|1}2^{|1}}$,

$e^2\ e^2\ e^2 = (e^2)^3$ „ „ $\dfrac{1^{6|1}}{1^{2|1}1^{2|1}1^{2|1}}$,

$e^3\ e^3 = (e^3)^2$ „ „ $\dfrac{1^{6|1}}{1^{3|1}1^{3|1}}$,

u. s. f. Bringt man nun diese Zahlenausdrücke mit den zugehörigen Fakultäten der n in Verbindungen, so erhält man für die Gruppenanzahlen der Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen für die verschiedenen Classen folgende Zusammenstellung:

5) $'P[a_1, a_2, \ldots a_n]^1 = n$,

$'P[a_1, a_2 \ldots a_{n_1}, \overset{3}{a_{n_1+1}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}] = n_1 (n_1 - 1) + n_2$,

$'P[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots \overset{3}{a_{n_3}}]^3 = n_1 (n_1 - 1)(n-2) + 3 n_1 (n_2 - 1) + n_3$,

$$'P[a_1,\ a_2,\ldots a_{n_1},\ldots \overset{2}{a}_{n_2},\ldots \overset{3}{a}_{n_3},\ldots \overset{4}{a}_{n_4}]^4 = n_1(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)$$
$$+ \frac{4.3}{1.2} n_1^{2|-1}(n_1-2) + 3n_2(n_2-1) + 4n_1(n_3-1) +$$

$$'P[a_1,\ a_2\ldots a_{n_1},\ldots \overset{2}{a}_{n_2},\ldots \overset{5}{a}_{n_5}]^5 =$$
$$= n_1^{5|-1} + 10.n_1^{3|-1}(n_2-1) + 15.n_1(n_2-1)^{2|-1}$$
$$+ 10n_1^{2|-1}(n_3-2) + 10n_2(n_3-1) + 5n_1(n_4-1) +$$

$$'P[a_1,\ a_2,\ldots a_{n_1},\ldots \overset{2}{a}_{n_2},\ldots \overset{6}{a}_{n_6}]^6 =$$
$$= n_1^{6|-1} + 15n_1^{4|-1}(n_2-4) + 45n_1^{2|-1}(n_2-2)^{2|-1} + 15n_2^{3|-1}$$
$$+ 20n_1^{3|-1}(n_3-3) + 60n_1(n_2-1)(n_3-2) + 10n_3^{2|-1} + 15n_1^{2|-1}(n_4$$
$$+ 15n_2(n_4-1) + 6n_1(n_5-1) + n_6,$$

u. s. w.

Die Zahlenausdrücke für die Gruppen der in 2), 3) und 4) an deuteten Versetzungen ergeben sich nun aus 1) §. 9. und aus Gesagten leicht. Man hat daher aus gleichen Gründen:

6) $^*P[a_1,\ a_2,\ldots a_n]^1 = n,$

$$^*P[\overset{2}{a}_1,\ \overset{2}{a}_2,\ldots \overset{2}{a}_{n_2},\ a_{n_2+1},\ldots a_{n_1}]^2 = n_1^{2|-1} + n_2,$$

$$^*P[\overset{3}{a}_1,\ldots \overset{3}{a}_{n_3},\ldots \overset{2}{a}_{n_2},\ldots a_{n_1}]^3 = n_1^{3|-1} + 3n_2(n_1-1) + n_3,$$

$$^*P[\overset{4}{a}_1,\ldots \overset{4}{a}_{n_4},\ldots \overset{3}{a}_{n_3},\ldots \overset{2}{a}_{n_2},\ldots a_{n_1}]^4 =$$
$$= n_1^{4|-1} + 6n_2(n_1-1)^{2|-1} + 3n_2^{2|-1} + 4n_3(n_1-1) +$$

$$^*P[\overset{5}{a}_1,\ldots \overset{5}{a}_{n_5},\ldots \overset{4}{a}_{n_4},\ldots \overset{2}{a}_{n_2}\ldots, a_{n_1}]^5 =$$
$$= n_1^{5|-1} + 10n_2(n_1-1)^{3|-1} + 15n_2^{2|-1}(n_1-2) + 10n_3(n_1-1)^2$$
$$+ 10n_3(n_2-1) + 5n_4(n_1-1) + n_5,$$

$$^*P[\overset{6}{a}_1,\ldots \overset{6}{a}_{n_6},\ldots \overset{5}{a}_{n_5},\ldots \overset{2}{a}_{n_2};\ldots a_{n_1}]^6 =$$
$$= n_1^{6|-1} + 15n_2(n_1-1)^{4|-1} + 45n_2^{2|-1}(n_1-2)^{2|-1} + 15n_2^{3|}$$
$$+ 20n_3(n_1-1)^{3|-1} + 60n_3(n_2-1)(n_1-2) + 10n_3^{2|}$$
$$+ 15n_4(n_1-1)^{2|-1} + 15n_4(n_2-1) + 6n_5(n_1-1) +$$

Digitized by Google

u. s. w. Bei diesen Fakultäten-Ausdrücken ist die Kramp'sche Bezeichungsweise $m^{x|-1} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-x+1)$ gebraucht. Hiernach ist:

$$*P[a_1^4, \ldots a_4^4, a_5^3, a_6^3, a_7^3, a_8^2, a_9^2, a_{10}, a_{11}, a_{12}]^4 =$$
$$= 12.11.10.9 + 6.9.11.10 + 3.9\,8 + 4.7.11 + 4 = 18348$$

für

$$n_1 = 12,\ n_2 = 9,\ n_3 = 7,\ n_4 = 4.$$

Würde man schreiben

$$*P[a_1^6, a_2^5, a_3^4, a_4^4, a_5^3, a_6^3, a_7^3, a_8^2, a_9^2, a_{10}, a_{11}, a_{12}]^4$$

wie auch geschieht, so hat a_1^6, a_2^5 keine Bedeutung, da die Wiederholungsexponenten nicht höher als der Classenexponent werden können.

§. 12.

Die in §. 6. — §. 11 geführte Untersuchung hat die darin aufgestellten Probleme gelöst, aber keine geschlossene Ausdrücke geliefert, um die dort vorgelegten Fragen zu beantworten. Wir wenden uns nun zu einer zweiten Auflösungsmethode, die dieser Beschränkung nicht unterliegt, und stellen folgendes Problem zur Untersuchung auf:

Die Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $q$ten Classse werden gebildet. Wie gross ist die Zahl der Gruppen, worin irgend ein Element wenigstens $r$mal erscheint?

Die Aufgabe stellt sich in Zeichen dar:

$$'C[a_1^r, a_2^r, a_3^r \ldots a_n^r]^q.$$

Eine nothwendige Bedingung ist, dass $r \leqq q$ ist. Die Methode, welche wir betreten, besteht darin, dass wir uns die Gruppen gebildet denken und nach einer Richtung hin (von der Linken zur Rechten) dieselben untersuchen und fragen, in welchen sich die auflösenden Gruppen finden können und dann die hiedurch bedingte Zahl angeben.

Din auflösenden Gruppen sind

$$(a_1)^r,\ (a_2)^r,\ (a_3)^r, \ldots (a_n)^r.$$

Diese Gruppen können entweder auf den r ersten Stellen, oder auf r Stellen von der zweiten Stelle an, oder auf r Stellen von

der dritten an u. s. f., oder auf den r letzen Stellen erscheinen. Mit jeder eingenommenen Stellung werden bestimmte Bedingungen eintreten, die nicht übersehen werden dürfen. Es kann nämlich, so verlangt es die Bildungsweise der Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen, keiner der genannten Gruppen ein Element vorausgehen, welches die gleiche oder gar eine höhere Stellenzahl führt, und ein Element folgen, welches eine niedere Stellenzahl führt. Elemente mit der gleichen Stellenzahl dürfen folgen. Nach dieser Bemerkung beginnen wir mit der Untersuchung der einzelnen Fälle.

a) Die auflösenden Gruppen nehmen die r ersten Stellen ein. In diesem Falle kann auf den $(q-r)$ letzten Stellen jede beliebige Zusammenstellung von Elementen folgen, welche den oben gestellten Grundbedingungen nicht widerspricht. Hieraus hat man folgende der Aufgabe genügende Aufstellungen:

$$(a_1)^r\, C^r(a_1,\ a_2, \ldots a_n)^{q-r},$$

$$(a_2)^r\, (C^r(a_2,\ a_3 \ldots . a_n)^{q-r},$$

$$(a_3)^r\, C^r(a_3,\ a_4, \ldots a_n)^{q-r},$$

$$\vdots$$

$$(a_{n-1})^r\, C^r(a_{n-1},\ a_n)^{q-r},$$

$$a_n{}^r\, C^r(a_n)^{q-r}.$$

Bestimmt man die jedem einzelnen Ausdrucke zugehörige Gruppenzahl, so hat man folgende Reihe:

$$A_1 = [n]_{q-r} + [n-1]_{q-r} + [n-2]_{q-r} + \ldots . [3]_{q-r} + [2]_{q-r} + [1]_{q-r}$$
$$= [n]_{q-r+1}.$$

Hierin bedeutet

$$[m]_x = \frac{m(m+1)\ldots.(m+x-1)}{1.2\ldots.x} = \frac{m^{x|1}}{1^{x|1}}.$$

b) Die auflösenden Gruppen erscheinen auf r Stellen von der zweiten Stelle an. Ein Element kann daher vorausgehen und $(q-r-1)$ Elemente können folgen. Vorausgehen und folgen darf keines, den oben genannten Bedingungen widersprechendes Element. Diess führt zu folgender Aufstellung:

$$a_1\, (a_2)^r\, C^r(a_2,\ a_3 \ldots . a_n)^{q-r-1},$$

$$C^r(a_1,\ a_2)^1\, (a_3)^r\, C^r(a_3,\ a_4, \ldots a_n)^{q-r-1},$$

$$C^r(a_1,\ a_2,\ a_3)^1 (a_4)^r\, C^r(a_4,\ a_5, \ldots . a_n)^{q-r-1},$$

$$\vdots$$

$$C^r(a_1,\ a_2, \ldots a_{n-2})^1 (a_{n-1})^r\, C^r(a_{n-1},\ a_n)^{q-r-1},$$

$$C^r(a_1,\ a_2, \ldots a_{n-1})^1 (a_n)^r\, C(a_n)^{q-r-1}.$$

Digitized by Google

Hierdurch wird folgende Gruppenzahl berbeigezogen:

$$A_2 = 1.[n-1]_{q-r-1} + \frac{2}{1}[n-2]_{q-r-1} + \frac{3}{1}[n-3]_{q-r-1} \ldots + \frac{n-2}{1}[2]_{q-r-1} + \frac{n-1}{1}[1]_{q-r-1}$$

$$= [n-1]_{1+q-r-1+1} = [n-1]_{q-r+1},$$

denn die Gruppenform

$$a_1 (a_1)^r C^r (a_1, a_2, \ldots a_n]^{q-r-1}$$

kann als den Bedingungen widersprechend nicht aufgenommen werden und ist auch in der That schon unter *a)* vorgesehen.

Die Reihe A_2 und alle hierhergehörigen Reihen werden nach folgendem Gesetze summirt:

1) $$[m]_k [1]_p + [m-1]_k [2]_p + \ldots\ldots [2]_k [m-1]_p + [1]_k [m]_p$$

$$= [m]_{k+p+1} = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+k+p)}{1.2.3\ldots\ldots(k+p+1)} = \frac{m^{k+p+1|1}}{1^{k+p+1|1}}.$$

c) Die auflösenden Gruppen erscheinen von der dritten Stelle an. Zwei Elemente können vorausgehen und $(q-r-2)$ Elemente können folgen. Diess führt zu folgendem Aggregate:

$$C^r (a_1)^2 (a_2)^r C^r (a_2, a_3 \ldots a_n)^{q-r-2},$$

$$C^r (a_1\ a_2)^2 (a_3)^r C^r (a_3, a_4, \ldots\ldots a_n)^{q-r-2},$$

$$C^r (a_1\ a_2, a_3)^2 (a_4)^r C^r (a_4, a_5, \ldots a_n)^{q-r-2},$$

$$\vdots$$

$$C^r (a_1, a_2, \ldots a_{n-2})^2 (a_{n-1})^r C^r (a_{n-1}, a_n)^{q-r-2},$$

$$C^r (a_1\ a_2, \ldots a_{n-1})^2 (a_n)^r C^r (a_n)^{q-r-2}.$$

Werden die einzelnen Gruppen gezählt, so erhält man nach 1)

$$A_3 = [1]_2 [n-1]_{q-r-2} + [2]_2 [n-2]_{q-r-2} + \ldots [n-2]_2 [2]_{q-r-2} + [n-1]_2 [1]_{q-r-2}$$

$$= [n-1]_{q-r+1}.$$

d) Rücken die auflösenden Gruppen auf r Stellen vor von der vierten an, so hat man folgende Zusammenfassung:

$$C^r (a_1)^3 (a_2)^r C^r (a_2, a_3, \ldots\ldots a_n)^{q-r-3},$$

$$C^r (a_1, a_2)^3 (a_3)^r C^r (a_3, a_4, \ldots a_n)^{q-r-3},$$

$$C^r (a_1, a_2, a_3)^3) (a_4)^r C^r (a_4, a_5, \ldots a_n)^{q-r-3},$$

$$\vdots$$

Digitized by Google

$$\vdots$$

$$C^r(a_1\ a_2,\ldots a_{n-2})^3(a^n{}_{-1})^r\ C^r(a_{n-1},\ a_n)^{q-r-3},$$

$$C^r(a_1\ a_2\ldots a_{n-1})^3(a_n)^r\ C^r(a_n)^{q-r-3}.$$

Hieraus und aus 1) ergibt sich die Zahl der Gruppen

$$A_4=[1]_3\,[n-1]_{q-r-3}+[2]_3\,[n-1]_{q-r-3}\ldots.[n-2]_3\,[2]_{q-r-3}$$
$$+[n-1]_3\,[1]_{q-r-3}$$
$$=[n-1]_{q-r+1}.$$

Diese Schlüsse wiederholen sich. Jede einzelne Aufstellung führt zur nämlichen Gruppenzahl, denn die den auflösenden Gruppen vorausgehenden und nachfolgenden Gebilde ergänzen sich immer zu gleichen Dimensionen. Hiernach erzeugt sich der Ausdruck $[n-1]_{q-r+1}$ im Ganzen $(q-r)$ mal. Denn er kommt in allen Fällen mit Ausnahme des ersten (a), also in den $(q-r)$ letzten Stellungen vor. Die Summe aller auf diese Weise in Betrachtung kommenden Gruppen ist

$$A_1+A_2++A_3+\ldots\ldots A_{q-r+1}=M,$$

und sie führt zu folgendem Ausdrucke:

2) $$M=[n]_{q-r+1}+(q-r)[n-1]_{q-r+1}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+q-r)}{1.2.3\ldots\ldots(q-r+1)}+(q-r)\frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+q-r-1)}{1.2.3\ldots(q-r+1)}.$$

Diese Schlüsse führen so lange zu einem richtigen Resultate, bis die vorausgehenden Gruppen zur rten Classe angewachsen sind. Geschieht diess, dann enthalten die vorausgehenden Gruppen selbst wieder Gebilde, welche der Aufgabe genügen. Diese müssen sofort gezählt und ausgeschieden werden. Die Darstellung, wodurch die erste Ausscheidung bedingt wird, hat folgende Gestalt:

$$C^r(a_1)^r\ (a_2)^r\ C^r(a_2,\ a_3,\ldots a_n)^{q-2r},$$

$$C^r(a_1,\ a_2)^r\ (a_3)^r\ C^r(a_3,\ a_4,\ldots a_n)^{q-2r},$$

$$C^r(a_1\ a_2,\ a_3)^r\ (a_4)^r\ C^r(a_4,\ a_5,\ldots a_n)^{q-2r},$$

$$\vdots$$

$$C^r(a_1,\ a_2,\ldots a_{n-2})^r\ (a_{n-1})^r\ C^r(a_{n-1},\ a_n)^{q-2r},$$

$$C^r(a_1,\ a_2,\ldots a_{n-1})^r\ (a_n)^r\ C^r(a_n)^{q-2r}.$$

Die Ausscheidungen können durch die Gleichung 2) bewerkstelligt werden, indem man der Reihe nach wegen der vorausgegehenden Ausdrücke $q=r$ und statt n allmählig die Elementenanzahlen, also 1, 2, 3, 4, ..., $n-1$ setzt. Wegen des ersten Ausdrucks ist dann auszuscheiden:

$$[1]_1\,[n-1)_{q-2r},$$

Digitized by Google

wegen des zweiten

$$[2]_1\ [n-2]_{q-2r}\ ,$$

wegen des dritten

$$[3]_1\,[n-2]_{q-2r}$$

u. s. w. wegen des letzten

$$C(a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1})^r\ (a_n)^r\ C^r(a_n)^{q-2r}\ ,$$

endlich

$$[n-1]_1\,[1]_{q-2r}\ .$$

Die Summe aller dieser Ausscheidungen bedingt folgende Reihe:

$$B_1 = 1\,[n-1]_{q-2r} + [2]_1[n-2]_{q-2r} + [3]_1[n-2]_{q-2r} \ldots [n-1]_1[1]_{q-2r}$$
$$= [n-1]_{q-r+1}\ .$$

Die Darstellung, wodurch die zweite Ausscheidung bedingt ist, fasst sich in Folgendem zusammen:

$$C^r(a_1)^{r+1}(a_2)^r\ C^r(a_2,\ a_3 \ldots a_n)^{q-2r-1},$$
$$C^r(a_1\ a_2)_r{}^{+1}(a_3)^r\ C^r(a_3,\ a_4, \ldots, a_n)^{q-2r-1},$$
$$C^r(a_1\ a_2,\ a_3)^{r+1}(a_4)^r\ C^r(a_4,\ a_5, \ldots a_n)^{q-2r-1},$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$C^r(a_1\ a_2, \ldots a_{n-1})^{r+1}(a_n)^r\ C^r(a_n)^{q-2r-1}.$$

Um alle hieraus auszuscheidende Gruppen zu erhalten, hat man $r+1$ statt q und 1, 2, 3.... $(n-1)$ statt n in 2) zu setzen und mit den nachfolgenden ergänzenden Gruppenzahlen zu vervielfachen. Es entsteht sodann:

$$[[1]_2 + 1.[0]_2][n-1]_{q-2r-1},$$
$$[[2]_2 + 1.[1]_2][n-2]_{q-2r-1}\ ,$$
$$[[3]_2 + 1.[2]_2][n-3]_{q-2r-1}\ ,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$[[n-1]_2 + 1.[n-2]]_2\,[1]_{q-2r-1}\ .$$

Wird nun vervielfacht, so entstehen zwei Reihen, die sich nach der Gleichung 1) summiren lassen, und man erhält

$$[1]_2[n-1]_{q-2r-1} + [2]_2[n-2]_{q-2r-1} \ldots$$
$$\ldots [n-1]_2\,[1]_{q-2r-1} = [n-1]_{q-2r+2}\ .$$

Digitized by Google

$$[1]_2[n-2]_{q-2r-1}+[2]_2[n-3]_{q-2r-1}\ldots.$$
$$\ldots.[n-2]_2[1]_{q-2r-1}=[n-2]_{q-2r+2}.$$

Die hiedurch bedingte auszuscheidende Gruppenzahl ist

$$B_2=[n-1]_{q-2r+2}+1[n-2]_{q-2r+2}.$$

Die dritte Ausscheidung ist durch folgende Zusammenstellung bedingt:

$$C^r(a_1)^{r+2}(a_2)^r\ C^r(a_2,\ a_3\ldots a_n)^{q-2r-2},$$
$$C^r(a_1,\ a_2)^{r+2}(a_3)^r\ C^r(a_3,\ a_4,\ldots.a_n)^{q-2r-2},$$
$$C^r(a_1,\ a_2,\ a_3)^{r+2}(a_4)^r\ C^r(a_4,\ a_5,\ldots a_n)^{q-2r-2},$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$C^r(a_1,\ a_2,\ldots a_{n-1})^{r+2}(a_n)^r\ C^r(a_n)^{q-2r-2}.$$

Die hieraus hervorgehenden Gruppenzahlen ergeben sich, wenn $r+2$ statt q und allmählig 1, 2, 3,....$n-1$ statt n in 2) gesetzt wird. Dadurch entsteht

$$([1]_3+2.0)[n-1]_{q-2r-2},$$
$$([2]_3+2[1]_3)[n-2]_{q-2r-2},$$
$$([3]_3+2[2]_3)[n-3]_{q-2r-2},$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$([n-1]_3+2[n-2]_3)[1]_{q-2r-2}.$$

Wird hier vervielfacht, so entstehen wieder zwei Reihen, die sich nach 1) summiren lassen und man erhält sofort für die durch obige Aufstellung bedingten Ausscheidungen

$$B_3=[n-1]_{q-2r+2}+2[n-2]_{q-2r+2}.$$

Diese Ausscheidungen führen sich nun leicht weiter fort. Die Darstellung, wozu man bei der letzten Ausscheidung gelangt, ist:

$$C^r(a_1)^{q-r}(a_2)^r,$$
$$C^r(a_1\ a_2)^{q-r}(a_3)^r,$$
$$C^r(a_1\ a_2,\ a_3)^{q-r}(a_4)^r,$$
$$\vdots$$
$$C^r(a_1\ a_2\ldots a_{n-1})^{q-r}(a_n)^r.$$

Um die hiedurch bedingte Gruppenzahl zu erhalten, hat man in 2) $q-r$ statt q und 1, 2, 3... $(n-1)$ statt n zu setzen. Man erhält:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&[1]_{q-2r+1} && + (q-2r).0,\\
&[2]_{q-2r+1} && + (q-2r)[1]_{q-2r+1},\\
&[3]_{q-2r+1} && + (q-2r)[2]_{q-2r+1},\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&[n-1]_{q-2^r+1} && + (q-2r)[n-2]_{q-2r+1}.
\end{aligned}
$$

Diese zwei Reihen vereinigen sich in folgenden Ausdruck:

$$B_{q-2r+1} = [n-1]_{q-2r+2} + (q-2r)[n-2]_{q-2r+2}.$$

Alle die auf diesem Wege erhaltenen Ausscheidungen werden durch die Summe

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + \ldots B_{q-2r+1} = N$$

angegeben, welche $(q-2r+1)$ Glieder hat. Alle B enthalten den Ausdruck

$$[n-1]_{q-2r+2}.$$

Dieser Ausdruck kommt daher $(q-2r+1)$ mal vor. Die $(q-2r)$ letzten B enthalten noch einen zweiten Ausdruck, der einem bestimmten Gesetze unterliegt, sich auf folgende Weise darstellt und zusammenziehen lässt:

1. $[n-2]_{q-2r+2} + 2[n-2]_{q-2r+2} + 3[n-2]_{q-2r+2} + \ldots$
$\ldots [q-2r][n-2]_{q-2r+2}$

$$= \frac{(q-2r)(q-2r+1)}{1\,.\,2}[n-2]_{q-2r+2} = [q-2r]_2.[n-2]_{q-2r+2}.$$

Die Gruppenzahl, welche daher von 2) ausgeschieden werden muss, begreift sich in folgendem Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
3)\ N &= [q-2r+1]_1\,[n-1]_{q-2r+2} + [q-2r]_2\,[n-2]_{q-2r+2}\\
&= (q-2r+1)\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n+q-2r)}{1\,.\,2\ldots\ldots(q-2r+2)}\\
&\quad + \frac{(q-2r)(q-2r+1)}{1\,.\,2}\,\frac{(n-2)\,(n-1)\,n\ldots\ldots(n+q-2r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(q-2r+2}.
\end{aligned}
$$

Diese Ausscheidungen sind so lange richtig, bis sich die den auflösenden Gruppen vorangehenden Verbindungsclassen bis zur (2r)ten Dimension erheben. In diesem Falle sind zu viel ausgeschieden worden und zwar alle unter den ausgeschiedenen begriffene Gruppen, welche die Eigenschaft der auflösenden Gruppen selbst haben.

Die Gleichung 3) kann nun benutzt werden, um die Ausscheidungen zu bewerkstelligen, denn sie zeigt die Gruppen an, welche die Eigenschaft des wiederholten Zusammentrittes haben. Es

Digitized by Google

wird nun nicht mehr nöthig die erforderlichen Zusammenstellungen zu geben. Mat hat nur $2r$, $2r+1$, $2r+2$, ... $q-r$ statt q und allmählig 1, 2, 3 .... $(n-1)$ statt n bei jedem einzelnen Werthe von q in 3) zu setzen, und jedes einzelne Glied mit der ergänzenden Verbindungszahl zu vervielfachen. Es werden auch hier immer Reihen entstehen, die sich nach 1) summiren lassen. Die Ausdrücke, welche hiedurch erzeugt werden, sind der Reihe nach folgende:

$$C_1 = [1]_1 \cdot [1]_2 [n-2]_{q-3r} = [1]_1 [n-2]_{q-3r+3}$$
$$[1]_1 \cdot [2]_2 [n-3]_{q-3r}$$
$$[1_1] \cdot [3]_2 [n-4]_{q-3r}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$[1]_1 \cdot [n-2]_2 [1]_{q-3r} .$$

Wird nun $2r+1$ statt q und allmälig 1, 2, ... $(n-1)$ statt n in 3) gesetzt und werden die hieraus sich ergebenden Ausdrücke mit den ergänzenden Verbindungsclassen verbunden, so entsteht in Rücksicht auf 1)

$$C_2 = (2[1]_3 + [1]_2 0)[n-2]_{q-3r-1} = 2[n-2]_{q-3r+3} + [1]_2 [n-3]_{q-3r+3}$$
$$(2[2]_3 + [1]_2 [1]_3)[n-3]_{q-3r-1}$$
$$(2[3]_3 + [1]_2 [2]_3)[n-4]_{q-3r-1}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$(2[n-2]_3 + [1]_2 [n-3]_3)[1]_{q-3r-1};$$

Ferner wird für $2r+2$ statt q und unter den oben angegebenen Bedingungen:

$$C_3 = (3[1]_4 + [2]_2 [0]_4)[n-2]_{q-3r-2} = 3[n-2]_{q-3r+3} + [2]_2 [n-3]_{q-3r+3}$$
$$(3[2]_4 + [2]_2 [1]_4)[n-3]_{q-3r-2}$$
$$(3[3]_4 + [2]_2 [2]_4 [n-4]_{q-3r-2}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$(3[n-2]_4 + [2]_2 [n-3]_4)[1]_{q-3r-2}$$

u. s. w. Man erkennt nun leicht, welchem Gesetze die sämmtlichen C unterliegen. Es entstehen zwei Reihen, wovon die erste $(q-3r+1)$ Glieder und die andere $(q-3r)$ Glieder zählt, die sich auf folgende Weise behandeln lassen:

$$(1+2+3+4 .... + (q-3r+1))[n-2]_{q-3r+3}$$
$$= \frac{(q-3r+1)(q-3r+2)}{1 \cdot 2} [n-2]_{q-3r+3},$$

Digitized by Google

$([1]_2+[2]_2+[3]_2\ldots+[q-2r]_2)\,[n-3]_{q-3r+3}=[q-2r]_2\,[n-3]_{q-3r+3}$

Für die aus 3) auszuscheidende Grnppenanzahl ist sofort

4) $$P=[q-3r+1]_2\,[n-2]_{q-3r+3}+[q-2r]_3\,[n-3]_{q-3r+3}$$
$$=\frac{(q-3r+1)\,(q-3r+2)}{1\,.\,2}\,\frac{(n-2)(n-1)\ldots(n+q-3r)}{1\,.\,2\ldots(q-3r+3)}$$
$$+\frac{(q-2r)\,(q-2r+1)\,(q-2r+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{(n-3)(n-2)\ldots(n+q-3r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(q-3r+3)}.$$

Setzt man nun diese Schlussweise fort, so erhält man für die Zahl aller auflösenden Gruppen (A)

5) $$A=M-N+P-Q+\ldots\ldots$$

Hieraus entsteht durch Einführung der aufgefundenen Werthe:

6) $$'C[a_1^r,\ a_2^r,\ a_3^r,\ldots\ldots a_n^r]^q=$$
$$=[n]_{q-r+1}\qquad\qquad +[q-r]_1\,[n-1]_{q-r+1}$$
$$-[q-2r+1]_1\,[n-1]_{q-2r+2}\qquad -[q-2r]_2\,[n-2]_{q-2r+2}$$
$$+[q-3r+1]_2\,[n-2]_{q-3r+3}\qquad +[q-3r]_3\,[n-3]_{q-3r+3}$$
$$-[q-4r+1]_3\,[n-3]_{q-4r+4}\qquad -[q-4r]_4\,[n-4]_{q-4r+4}$$
$$\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots$$
$$=\frac{(n(n+1)\ldots(n+q-r)}{1\,.\,2\,..\,(q-r+1)}+\frac{q-r}{1}\,\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\ldots(n+q-r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(q-r+1)}$$
$$-\frac{q-2r+1}{1}\cdot\frac{(n-1)n\ldots.(n+q-2r)}{1\,.\,2\ldots(q-2r+2)}$$
$$-\frac{(q-2r)\,(q-2r+1)}{1\,.\,2}\,\frac{(n-2)\,(n-1)\ldots.(n+q-2r-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(q-2r+2)}$$
$$+\frac{(q-2r+1)\,(q-2r+2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{(n-2)\,(n-1)\ldots(n+q-3r)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(q-3r+3)}$$
$$+\frac{(q-2r)\,(q-2r+1)\,(q-2r+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{(n-3)\,(n-2)\ldots(n+q-3r-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(q-3r+3)}.$$
$$\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots$$

Diese Darstellung lässt sich auch so umformen:

7) $$A=\frac{\lfloor n+q-r|1}{\lfloor n-1|1\,\lfloor q-r+1|1}+\frac{q-r}{1}\cdot\frac{\lfloor n+q-r-1|1}{\lfloor n-2|1\,\lfloor q-r+1,1}$$
$$-\frac{q-2r+1}{1}\,\frac{\lfloor n+q-2r|1}{\lfloor n-2,1\,\lfloor q-2r+2|1}-\frac{(q-2r)^2|1}{\lfloor 2|1}\,\frac{\lfloor n+q-2r-1,1}{\lfloor n-3|1\,\lfloor q-2r+2,1}$$

$$+\frac{(q-3r+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\frac{1^{n+q-3r|1}}{1^{n-3|1}1^{q-3r+3|1}}+\frac{(q-3r)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{1^{n+q-3r-1|1}}{1^{n-4|1}1^{q-3r+3|1}}\cdot$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Werden hierin die Fakultäten im Nenner, welche den Exponenten q führen, ausgeschieden, so ergibt sich folgende Darstellung:

8) $$'C[\overset{r}{a_1},\ \overset{r}{a_2},\ldots\overset{r}{a_n}]^q=$$

$$=\frac{(q-r+2)^{n-1|1}}{1^{n-1|1}}+\frac{q-r}{1}\frac{(q-r+2)^{n-2|1}}{1^{n-2|1}}$$

$$-\frac{q-2r+1}{1}\frac{(q-2r+3)^{n-2|1}}{1^{n-2|1}}-\frac{(q-2r)^{2|1}}{1^{2|1}}\frac{(q-2r+3)^{n-3|1}}{1^{n-3|1}}$$

$$+\frac{(q-3r+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(q-3r+4)^{n-3|1}}{1^{n-3|1}}+\frac{(q-3r)^{3|1}}{1^{3|1}}\frac{(q-3r+4)^{n-4|1}}{1^{n-4|1}}\cdot$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Bei kleinen n wird sich diese Darstellung vortheilhaft gebrauchen lassen.

Die Anwendung dieser Gleichungen auf besondere Fälle ist sehr bequem. So ist z. B.

$$'C[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2},\ldots\overset{3}{a_6}]^6=\frac{6.7.8.9}{1.2.3.4}+3.\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4}-1.\frac{5.6}{1.2}$$
$$=126+3.70-15=321,$$

wenn man $r=3$, $n=6$, $q=6$ in Nr. 6) setzt, wie schon oben §. 10. gefunden wurde.

Die Gruppenanzahl der Verbindungen, worin irgend ein Element höchstens $r$mal wiederholt erscheint, ergibt sich aus 6) leicht. Man hat zu dem Ende $(r+1)$ statt r zu setzen und das erhaltene Resultat von der Gesammtzahl der Gruppen mit unbeschränkten Wiederholungen abzuziehen, denn die gesuchte Gruppenanzahl ist die Erganzung zu der vollständigen Gruppenanzahl. Hiernach ist

9) $$^*C[\overset{r}{a_1},\ \overset{r}{a_2},\ \overset{r}{a_3},\ldots\overset{r}{a_n}]^q=$$

$$=[n]_q$$
$$-[n]_{q-r}-[q-r-1]_1\,[n-1]_{q-r}$$
$$+[q-2r-1]_1\,[n-1]_{q-2r}+[q-2r-2]_2\,[n-2]_{q-2r}$$
$$-[q-3r-2]_2\,[n-2]_{q-3r}-[q-3r-3]_3\,[n-3]_{q-3r}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Digitized by Google

$$= [n]_q$$
$$- [q-r+1]_{n-1} - [q-r-1]\,[q-r+1]_{n-2}$$
$$+ [q-2r-2]_2\,[q-2r+1]_{n-2} + [q-2r-2]_2\,[q-2r+1]_{n-3}$$
$$- [q-3r-3]_2\,[q-3r+1]_{n-3} - [q-3r-3]_3\,[q-3r+1]_{n-4}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Mit diesen Mitteln kann man nun weitere Fragen beantworten.

Die Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $q$ten Classe werden gebildet. Wie gross ist die Zahl der Gruppen, worin irgend ein Element gerade $r$mal wiederholt vorkommt?

Dieses Problem lässt nach dem früher Gesagten zu, dass die begleitenden Elemente auch in geringerer Zahl wiederholt in den auflösenden Gruppen vorkommen. Die gesuchte Gruppenzahl bestimmt sich ohne Schwierigkeit, wenn man $(r+1)$ statt r in 6) setzt und das so erhaltene Resultat von 6) abzieht. Es ist sofort

$$10) \qquad A_r = {}'C[a_1^{r}, a_2^{r}, \ldots a_n^{r}]^q - {}'C[a_1^{r+1}, a_2^{r+1}, \ldots a_n^{r+1}]^q$$
$$= C_{n,r} - C_{n,r+1}.$$

Durch $C_{n,r}$ und $C_{n,r+1}$ sollen der Kürze wegen die oben angedeuteten Zahlenausdrücke bezeichnet werden, um nicht die entwickelten Darstellungen geben zu müssen.

Dieser Satz lässt sich noch verallgemeinern auf folgende Weise:

$$11) \qquad A_{r;s} = {}'C[a_1^{r}, a_2^{r}, \ldots a_n^{r}]^q - {}'C[a_1^{r+s+1}, a_2^{r+s+1}, \ldots a_n^{r+s+1}]^q$$
$$= C_{n,r} - C_{n,r+s+1}.$$

Man hat $(r+s+1)$ statt r in 6) zu setzen und das erhaltene Resultat von 6) abzuziehen. Die Darstellung 11) beantwortet folgendes Problem.

Die Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $q$ten Classe werden gebildet. Wie gross ist die Gruppenzahl, worin irgend ein Element wenigstens r und höchstens $(r+s)$mal wiederholt, also gerade r, $r+1$, $r+2$, ... $(r+s)$mal wiederholt erscheint?

Hiebei ist zu bemerken, dass

$$12) \qquad C_{n,1} - C_{n,2} = C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}]^q = (n_1)^q =$$
$$= \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots(n_1-q+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, q}$$

ist, wie sich leicht rechtfertigt; denn diess sind in der That die Verbindungen ohne Wiederholungen aus n_1 Elementen zur $q$ten Classe.

Digitized by Google

Die Richtigkeit dieser Gleichungen soll an einigen besonder Fällen nachgewiesen werden.

Die Gruppen der Verbindungen aus 6 Elementen zur 6ten Class sollen gezählt werden, worin irgend ein Element gerade dreim wiederholt erscheint. Man findet sie, wenn man $q=6$, $n=6$ un $r=3$, dann $r=4$ in Nr. 6. setzt. Hiernach ist

$$A_3 = C_{6,3} - C_{6,4} = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} + 3.\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4} - 1.\frac{5.6}{1.2} = 321 - 126 = 195.$$
$$- \frac{6.7.8}{1.2.3} - 2.\frac{5.6.7}{1.2.3}$$

Löst man die Aufgabe nach der in 8) angegebenen Method so hat man für die e folgendes Schema:

$$e^3\ e^1\ e^1\ e^1 + e^3\ e^2\ e^1 + e^3\ e^3,$$

woraus sich folgende Gruppenzahl ableitet:

$$A_3 = \frac{6.5.4.3}{1.2.3} + 6.5.4 + \frac{6.5}{1.2} = 195.$$

Die Gruppen der Verbindungen zur 6ten Classe aus 6 Eleme ten sollen bestimmt werden, worin ein Element wenigstens zwe mal und höchstens viermal wiederholt erscheint. Man hat $q=$ $n=6$, $r=2$ und $r=5$ zu setzen, und es ist

$$A_{2,4} = C_{6,2} - C_{6,3} = \frac{6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5} + 4.\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5} - 3.\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4} - 3.\frac{4.5.6.}{1.2.3.}$$
$$+ \frac{4.5.6}{1.2.3}$$
$$- \frac{6.7}{1.2} - \frac{5.6}{1.2}$$
$$= 461 - 36 = 425.$$

Löst man auch hier die Aufgabe nach dem Schema der so ist

$$e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^2 + e^1\ e^1\ e^2\ e^2 + e^2\ e^2\ e^2$$
$$e^1\ e^1\ e^1\ e^3 + e^1\ e^2\ e^3 + e^3\ e^3$$
$$e^1\ e^1\ e^4 + e^2\ e^4,$$

wodurch folgende Anzahl bedingt ist:

$$A_{2,4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.2 + \frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{4.3}{1.2} + \frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{6.5.4}{1.2.3}.3 + 6.5.4$$
$$+ \frac{6.5}{1.2} + \frac{6.5}{1.2}.4 + 6.5 = 30 + 90 + 20 + 60 + 120 + 15 + 60 + 3$$
$$= 425.$$

Digitized by Google

§. 13.

Es ist nun noch übrig folgendes Problem zu lösen:

Die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $q$ten Classe werden gebildet. Wie gross ist die Zahl der Gruppen, worin irgend ein Element wenigstens $r$mal wiederholt erscheint? In Zeichen

$$P[a_1^r, a_2^r, \ldots a_n^r]^q.$$

Die Vorbedingungen, welche zu der Aufgabe des vorigen Paragraphen gestellt wurden, gelten mit wenigen Abänderungen auch hier. Die Aufgabe wird deswegen auf eine ähnliche und folgende Weise gelöst.

a) Die auflösenden Gruppen

$$(a_1)^r, (a_2)^r, (a_3)^r, \ldots (a_n)^r$$

erscheinen von der ersten Stelle an. In diesem Falle können alle Elemente ohne Unterschied auf den letzten $(q-r)$ folgenden Stellen in jeder beliebigen Anordnung aufrücken. Hieraus ergibt sich folgendes Schema:

$$(a_1)^r P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r} = P'(a_1^r, a_2^r, \ldots a_n^r)^1 P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r},$$
$$(a_2)^r P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{q-r}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(a_n)^r P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r}$$

wenn jede der Gruppen

$$(a_1)^r, (a_2)^r, \ldots \text{in } P'(a_1^r, a_2^r, \ldots a_n^r)^1$$

als ein Element betrachtet wird.

Die Anzahl der hiedurch bedingten Gruppen ist

$$A_1 = n \cdot n^{q-r}.$$

b) Geht man nun eine Stelle weiter, so kann ein fremdes Element in jede der auflösenden Gruppen treten, ohne dass die Bedingungen der Aufgabe aufgehoben werden. Die Elemente der auflösenden Gruppen dürfen aber nicht auf den r ersten Stellen erscheinen, denn dieser Fall ist in *a*) vorgesehen. Daher muss ein fremdes Element auf einer der r ersten Stellen erscheinen, oder es kann r Stellen durchlaufen. Auf den nachfolgenden $(q-r-1)$ Stellen können alle Elemente ohne Unterschied erscheinen. Hieraus entsteht folgendes Schema:

$$(a_1)^{r-1} P'(a_2, a_3 \ldots a_n)^1 . a_1 P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r-1}$$
$$(a_2)^{r-1} P'(a_1, a_3, \ldots a_n)^1 . a_2 P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r-1}$$

Digitized by Google

$$(a_3)^{r-1}P^{\prime}(a_1,\ a_2,\ a_4,\ a_n)^1.a_3\,P^{\prime}(a_1,\ a_2,\ldots a_n)^{q-r-1}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(a_n)^{r-1}P^{\prime}(a_1.\ a_2,\ldots a_{n-1})^1.a_n\,P^{\prime}(a_1,\ a_2,\ldots a_n)^{q-r-1}.$$

Das getrennte Element hinter dem Punkte nimmt eine feste Stellung ein. Jede Zusammenstellung von

$$(a_1)^{r-1}P^{\prime}(a_2,\ a_3,\ldots a_n)^1;$$
$$(a_2)^{r-1}P^{\prime}(a_1,\ a_3,\ldots a_n)^1\ldots.(a_n)^{r-1}P^{\prime}(a_1,\ a_2,\ldots a_{n-1})^1$$

bringt wegen des Eintrittes eines fremden Elementes

$$\frac{r(r-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(r-1).1}=\frac{r}{1}$$

Versetzungen hervor. Hieraus ergibt sich folgende der Aufgabe genügende Gruppenzahl:

$$A_2=\frac{r}{1}.n(n-1)n^{q-r-1}.$$

c) Geht man nun zwei Stellen weiter und dehnt diese Betrachtung auf $(r+2)$ Stellen aus, so können zwei fremde Elemente zwischen die auflösenden Gruppen treten. Die fremden Elemente müssen aber auf den $(r+1)$ ersten Stellen vorkommen, weil sonst die unter *a*) und *b*) vorgeschenen Fälle eintreten würden. Diess führt zu folgendem Schema:

$$(a_1)^{r-1}P^{\prime}(a_2,a_3\ldots a_n)^2.a_1\,P^{\prime}(a_1,a_2\ldots a_n)^{q-r-2}$$
$$(a_2)^{r-1}P^{\prime}(a,a_3,\ldots a_n)^2.a_2\,P^{\prime}(a_1,a_2\ldots a_n)^{q-r-2}$$
$$(a_3)^{r-1}P^{\prime}(a_1,a_2,a_4,\ldots a_n)^2.a_3\,P^{\prime}(a_1,a_2\ldots a_n)^{q-r-2}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(a_n)^{r-1}P^{\prime}(a_1,a_2\ldots a_{n-1})^2.a_nP^{\prime}(a_1,a_2\ldots a_n)^{q-r-2}.$$

Das getrennte Element hinter dem Punkte nimmt auch hier eine feste Stellung ein. Die vorausgehenden $(r+1)$ Elemente können unter sich jede beliebige Stellung einnehmen. Die aus diesen Versetzungen sich ergebende Vervielfachungszahl ist

$$\frac{(r+1)(r)(r-1)\ldots 3.2.1}{1.2.1.2\ldots.(r-1)}=\frac{r(r+1)}{1.2}.$$

Sie gehört jeder einzelnen Gruppe in der vorstehenden Zusammenstellung an. n Gruppen sind es. Die hieraus sich ergebende Zahl der der Aufgabe genügenden Gruppen ist

$$A_3=\frac{r(r+1)}{1.2}n(n-1)^2n^{q-r-2}.$$

Digitized by Google

Setzt man nun die angegebene Schlussweise durch alle Stellen fort und zählt die hieraus fliessenden Gruppen zusammen, so hat man sofort folgende Gesammt-Gruppen-Anzahl:

1) $A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots$

$$= n\,n^{q-r} + \frac{r}{1} n(n-1)n^{q-r-1} + \frac{r(r+1)}{1.2} n(n-1)^2 n^{q-r-2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(q-1)}{1.2\ldots\ldots(q-r)} n.(n-1)^{q-r}$$

$$= n[n^{q-r} + [r]_1 (n-1)n^{q-r-1} + [r]_2 (n-1)^2 n^{q-r-2} + [r]_3 (n-1)^3 n^{q-r-3} + \ldots$$

$$\ldots [r]_{q-r} (n-1)^{q-r}]$$

$$= n \sum_0^x [r]_x (n-1)^x n^{q-r-x}.$$

x durchläuft die Werthe 0, 1, 2, 3.... $(q-r)$.

Diese Schlüsse führen so lange auf ein richtiges Resultat, als die eingeschobenen Elemente die rte Classe nicht erreichen. Erreichen sie diese und erheben sie sich darüber, so werden zu viele Gruppen gezählt, und zwar alle diejenigen, welche in den Ausdrücken

$$P'(a_2, a_3 \ldots a_n)^r,\ P''(a_1, a_3 \ldots\ldots a_n)^r, \ldots P^{\nu}(a_1, a_2 \ldots a_{n-1})_r$$

und den zugehörigen höhern Classen enthalten sind und die Eigenschaft haben, der Aufgabe zu genügen. Sie müssen fixirt und von 1) ausgeschieden werden.

Die Gruppen, welche in dem Ausdrucke $P'(a_2, a_3 \ldots a_n)^r$ enthalten sind, haben die Form

$$(a_2)^r,\ (a_3)^r,\ (a_4)^r \ldots (a_n)^r.$$

Ihre Zahl ist $(n-1)$, denn die Zahl der Elemente ist um die Einheit verkürzt. Die Ausscheidungen sind durch die Glieder der nachstehenden Reihe:

$$[r]_r n(n-1)^r n^{q-2r},\ [r]_{r+1} n(n-1)^{r+1} n^{q-2r-1},$$

$$[r]_{r+2} n(n-1)^{r+2} n^{q-2r-2}, \ldots\ldots$$

und in ihnen durch die Ausdrücke

$$(n-1)^r,\ (n-1)^{r+1},\ (n-1)^{r+2}, \ldots$$

bedingt. Man findet nun die auszuscheidenden Gruppenanzahlen leicht, wenn man die ebengenannten Ausdrücke nach der Gleichung 1) behandelt. Diess geschieht, indem man $n-1$ statt n und allmählig r, $r+1$, $r+2$, ... statt q schreibt und die fehlenden Stellen durch die Versetzungen mit Wiederholungen ergänzt. Dadurch erhält man folgende auszuscheidende Gruppenanzahlen:

Digitized by Google

2) $B_1 = [r]_r n\,(n-1)\,n^{q-2r}$,

$B_2 = [r]_{r+1}\,n\,((n-1)(n-1) + \frac{r}{1}(n-1)(n-2))n^{q-2r-1}$,

$B_3 = [r]_{r+2}\,n\,((n-1)(n-1)^2 + \frac{r}{1}(n-1)(n-2)(n-1)$
$+ [r]_2\,(n-1)\,(n-2)^2)\,n^{q-2r-2}$,

$B_4 = [r]_{r+3}\,n\,((n-1)(n-1)^3 + \frac{r}{1}(n-1)(n-2)(n-1)^2$
$+ [r]_2\,(n-1)(n-2)^2(n-1) + [r]_3\,(n-1)(n-2)^3)\,n^{q-2r-3}$,

$B_{r+1} = [r]_{2r}\,n\,((n-1)(n-1)^r + r(n-1)(n-2)(n-1)^{r-1} + \ldots$
$\ldots [r]_r(n-1)(n-2)^r)\,n^{q-3r}$,

Man kann nun die Klammern auflösen und anders ordnen. Dadurch geht 2) über in

3) $B = n(n-1)\,[[r]_r n^{q-2r} + [r]_{r+1}\,(n-1)\,.\,n^{q-2r-1}$
$+ [r]_{r+2}\,(n-1)^2 n^{q-2r-2} + \ldots]$
$+ r\,.\,n\,(n-1)\,(n-2)\,[[r]_{r+1}\,n^{q-2r-1} + [r]_{r+2}\,(n-1)n^{q-2r-2}$
$+ [r]_{r+3}\,(n-1)^2 n^{q-2r-3} + \ldots.]$
$+ [r]_2\,n\,(n-1)\,(n-2)^2\,[[r]_{r+2}\,n^{q-2r-2} + [r]_{r+3}\,(n-1)n^{q-2r-3}$
$+ [r]_{r+4}\,(n-1)^2 n^{q-2r-4}\ldots]$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
$+ [r]_r\,n(n-1)(n-2)^r[[r]_{2r}\,n^{q-3r} + [r]_{2r+1}\,(n-1)\,n^{q-3r-1}$
$+ [r]_{2r+2}\,(n-1)n^{q-3r-2} + \ldots.]$
$+ [r]_{r+1}\,n\,(n-1)\,(n-2)^{r+1}\,[[r]_{2r+1}\,n^{q-3r-1} + [r]_{2r+2}\,(n-1)n^{q-3r-2}$
$+ [r]_{2r+3}\,(n-1)\,n^{q-3r-3} + \ldots]$
$+ [r]_{r+2}\,n\,(n-1)\,(n-2)^{r+2}\,[[r]_{2r+2}\,n^{q-3r-2} + [r]_{2r+3}\,(n-1)n^{q-3r-3}$
$+ [r]_{2r+4}\,(n-1)\,n^{q-3r-4} + \ldots]$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Die Darstellung 3) lässt sich mittelst der Σ auf eine die Uebersicht erleichternde Weise wiedergeben und zwar auf folgende Weise:

4) $B = n\,(n-1)\,\Sigma_0^x\,[r]_{r+x}\,(n-1)^x\,.\,n^{q-2r-x}$
$+ [r]_1\,n\,(n-1)\,(n-2)\,\Sigma_0^x\,[r]_{r+1+x}\,(n-1)^x\,.\,n^{q-2r-1-x}$

Digitized by Google

$$+[r]_2\, n(n-1)(n-2)^2 \sum_0^x [r]_{r+2+x}(n-1)^x n^{q-2r-2-x}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+[r]_r\, n(n-1)(n-2)^r \sum_0^x [r]_{2r+x}(n-1)^x n^{q-3r-x}$$
$$+[r]_{r+1}\, n(n-1)(n-2)^{r+1} \sum_0^x [r]_{2r+1+x}(n-1)^x n^{q-3r-1-x}$$
$$+[r]_{r+2}\, n(n-1)(n-2)^{r+2} \sum_0^x [r]_{2r+2+x}(n-1)^x n^{q-3r-2-x}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

oder:

5) $B = n(n-1) \sum_0^y [r]_y (n-2)^y \left(\sum_0^x [r]_{r+y+x}(n-1)^x n^{q-2r-y-x}\right)$.

In 5) hat man statt y allmählig die Werthe 0, 1, 2, 3 ... $q-2r$ (also bis zu der Höhe, wodurch der Exponent von n in 0 übergeht) zu setzen und dann hat man für jeden einzelnen bestimmten Zahlenwerth für y allmählig die Werthe 0, 1, 2, 3... für x einzuführen und zwar bis zu der Höhe, wodurch der Exponent von n in 0 übergeht.

Die hier gemachten Schlüsse sichern so lange ein richtiges Resultat, bis der Exponent von $(n-2)$ sich auf r und darüber erhebt. Von da an sind wieder Ausscheidungen aus 4) zu machen, und zwar in Beziehung auf $(n-2)$, wie sie vorher auf $(n-1)$ gemacht wurden.

In dem Ausdrucke (Nr. 4.)

$$[r]_r\, n(n-1)(n-2)^r \sum_0^x [r]_{2r+x}(n-1)^x n^{q-3r-x}$$

ist $(n-2)^r$ nach der Gleichung 1) zu behandeln und zu dem Ende $q=r$ und $(n-2)$ statt n zu setzen. Dadurch erhält man als auszuscheidende Gruppenzahl

$$[r]_r\, n(n-1) \sum_0^x [r]_{2r+x}(n-1)^x n^{q-3r-x}.(n-2).$$

In dem Ausdrucke

$$[r]_{r+1}\, n(n-1)(n-2)^{r+1} \sum_0^x [r]_{2r+1+x}(n-1)^x n^{q-3r-1-x}$$

von Nr. 4. ist wegen $(n-2)^{r+1}$ in 1) der Werth $(r+1)$ statt q und $(n-2)$ statt n zu setzen. Man erhält sofort

$$(n-2)(n-2) + \frac{r}{1}(n-2)(n-3).$$

Dieser Werth ist in den vorstehenden Ausdruck einzuführen. Hiedurch entsteht die auszuscheidende Gruppenzahl:

$$[r]_{r+1}\, n(n-1) \sum_0^x [r]_{2r+1+x} n^{q-3r-1-x} [(n-2)(n-2) + r(n-2)(n-3)].$$

Digitized by Google

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man folgende auszuscheidende Gruppenzahl:

$$6)\quad C=[r]_r n(n-1)(n-2)\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+x}(n-1)^x n^{q-3r-x}$$
$$+[r]_{r+1}n(n-1)(n-2)\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+1+x}(n-1)^x n^{q-3r-1-x}$$
$$\times[(n-2)+\tfrac{r}{1}(n-3)]$$
$$+[r]_{r+2}n(n-1)(n-2)\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+2+x}(n-1)^x n^{q-3r-3-x}$$
$$\times[(n-2)^2+r(n-2)(n-3)+[r]_2(n-3)^2]$$
$$+[r]_{r+3}n(n-1)(n-2)\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+3+x}(n-1)^x n^{q-3r-3-x}$$
$$\times[(n-2)^3+r(n-2)^2(n-3)+[r]_2(n-2)(n-3)^2+[r]_3(n-3)^3]$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

Auch diese Zusammenstellung lässt sich, wie in Nr. 2.—5. geschah, anders ordnen. Stellt man sie nach den Vertikalreihen zusammen, so liegt in ihnen folgendes Gesetz:

$$7)\quad C=n^{3-1}\overset{z}{\Sigma_0}[r]_z(n-3)^z$$
$$(\overset{y}{\Sigma_0}[r]_{r+z+y}(n-2)^y(\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+z+y+x}(n-1)^x.n^{q-3r-z-y-x})).$$

In dieser Darstellung durchläuft z allmählig die Werthe von 0, 1, 2, 3, ...$(q-3r)$ (bis zu der Höhe, wodurch der Exponent von n auf 0 sinkt); für jeden bestimmten Werth von z durchläuft dann y die Werthe 0, 1, 2, 3,.... bis zur erforderlichen Höhe (d. h. bis der Exponent von n auf 0 sinkt); und endlich für je zwei bestimmte Werthe von z und y (zusammen genommen) durchläuft x alle Werthe 0, 1, 2, 3,..... bis zur erforderlichen Höhe. Keine der drei veränderlichen Grössen kann für sich den Werth $(q-3r)$ übersteigen. Dasselbe gilt auch von ihrer Gesammtheit.

Das Gesetz für die Gesammtzahl aller auflösenden Gruppen ist hiernach:

$$8)\qquad {}'P[\overset{r}{a_1},\overset{r}{a_2},\overset{r}{a_3},\ldots\overset{r}{a_n}]^q=A-B+C-D\ldots$$

oder

$$9)\quad {}'P[\overset{r}{a_1},\overset{r}{a_2},\overset{r}{a_3},\ldots\overset{r}{a_n}]^q=n\overset{x}{\Sigma_0}[r]_x(n-1)^x n^{q-r-x}$$
$$-n^{2|-1}\overset{y}{\Sigma_0}[r]_y(n-2)^y(\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{r+y+x}(n-1)^x n^{q-2r-y-x})$$
$$+n^{3|-1}\overset{z}{\Sigma_0}[r]_z(n-3)^z$$
$$(\overset{y}{\Sigma_0}[r]_{r+z+y}(n-2)^y(\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+z+y+x}(n-1)^x n^{q-3r-z-y-x}))$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

Digitized by Google

Das Fortgangsgesetz dieser Darstellung liegt klar vor Augen. Das erste Glied in 9) erzeugt $q-r+1)$ Glieder, das zweite $\frac{(q-2r+1)(q-2r+2)}{1\,.\,2}$, das dritte $\frac{(q-3r+1)(q-3r+2)(q-3r+3)}{1\,.\,2\,.\,3}$, das vierte $[q-4r+1]_4$ Glieder u. s. f.

Die Exponenten von x im ersten Gliede, von x, y im zweiten Gliede, von x, y, z im dritten Gliede u. s. f. bilden nämlich die Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen 0, 1, 2, 3... $(q-r)$ zur ersten Classe; aus den Elementen 0, 1, 2, 3,... $(q-2r)$ zur zweiten; aus den Elementen 0, 1, 2, 3,.. ..$(q-3r)$ zur dritten Classe u. s. f. Man kann sich hiedurch ein Schema bilden, welches die Bildung der einzelnen Zahlenausdrücke von 9) sehr erleichtert.

Man kann nun mit den in diesem Paragraphen aufgefundenen Mitteln auch ähnliche Fragen über die Versetzungen mit Wiederholungen beantworten, wie sie im vorhergehenden Paragraphen von den Verbindungen beantwortet wurden.

Hiernach bestimmt sich die **Gruppenanzahl der Versetzungen aus n Elementen zur $q$ten Classe, wenn ein Element höchstens $(r-1)$mal wiederholt erscheint, durch**

$$10)\quad {}^{s}P[a_1^{r-1}, a_2^{r-1}, \ldots a_n^{r-1}]^q = n^q - n\,\Sigma_0^{s}[r]^x\,(n-1)^x\,n^{q-r-s} + n^{2|-1}\,\Sigma_0^{y}[r]_y\,(n-2)^y\,(\Sigma_0^{s}[r]_{r+y+s}\,(n-1)^x\,n^{q-2r-y-x}).$$

Eben so kann man nun die Gruppenanzahl dieser Versetzungen bestimmen, worin irgend ein Element gerade rmal wiederholt erscheint. Es ist

$$11)\quad A_r = {}^{s}P[a_1^{r}, a_2^{r}, \ldots a_n^{r}]^q - {}^{s}P[a_1^{r+1}, a_2^{r+1}, \ldots a_n^{r+1}]^q$$

und

$$12)\quad A_{r,s} = {}^{s}P[a_1^{r}, a_2^{r}, \ldots a_n^{r}]^q - {}^{s}P[a_1^{r+s+1}, a_2^{r+s+1}, \ldots a_n^{r+s+1}]^q.$$

Aus 9) erhält man sofort durch Einführung der betreffenden Werthe die nöthigen Zahlenausdrücke.

Die Gruppenanzahl der Versetzungen aus 6 Elementen zur 6ten Classe soll bestimmt werden, worin irgend ein Element wenigstens dreimal wiederholt erscheint.

Man hat in 9) statt x allmählig 0, 1, 2, 3; $n=6$, $r=3$ im ersten Gliede und 0 statt x, und 0 statt y im zweiten Gliede zu setzen. Dadurch wird

$${}^{s}P[a_1^{3}, a_2^{3}, \ldots a_6^{3}]^6 = 6[6^3 + 3.5.6^2 + \frac{3.4}{1.2}\,.\,5^2.6 + \frac{3.4.5}{1.2.3}\,.\,5^3] - 6.5.\frac{3.4.5}{1.2.3}$$

Digitized by Google

$$= 6[216 + 540 + 900 + 1250] - 300 = 17436 - 300$$
$$= 17136.$$

Behandelt man die Aufgabe nach §. 11. 5), so ist

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 6$$

zu setzen, und man erhält

$$'P[a_1^3, a_2^3 \ldots a_6^3]^6 = 20 \times 6.5.4.3 + 60 \times 6.5.4 + 10 \times 6.5 + 15 \times 6.5.4 + 15 \times 6.5 + 6 \times 6.5 + 6$$
$$= 7200 + 7200 + 300 + 1800 + 450 + 180 + 6$$
$$= 17136.$$

§. 14.

Die hier gefundenen Gleichungen lassen manche Anwendung zu. Eine sehr einfache Anwendung ergibt sich auf das Würfelspiel, denn hier kommen die Versetzungen mit unbeschränkten und beschränkten Wiederholungen in Frage.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln einen Pasch d. h. wenigstens zwei gleiche Zahlen zu werfen?

Die Zahl der günstigen Fälle ist in folgendem Ausdrucke

$$'P[a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots a_6^2]^3$$

begriffen und ergibt sich aus 9) §. 13. wenn dort $n=6$, $r=2$, und für x die Werthe 0, 1 gesetzt werden. Hiernach ist

$$A = 6[6^1 + \frac{2}{1}.5] = 6.16 = 96.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist daher für den fraglichen Fall

1) $$W = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$$

und es ist 4 gegen 5 zu wetten, dass in jedem Wurfe mit drei Würfeln ein Pasch fallen wird.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit sechs Würfeln in einem Wurfe wenigstens zwei gleiche Zahlen zu werfen?

Die Zahl der günstigen Fälle ist in dem Ausdrucke

$$'P[a_1^2, a_2^2, \ldots a_1^2]^6$$

begriffen. Sie wird gefunden, wenn $q=6$, $r=2$, $n=6$ gesetzt wird. Hernach hat man für x im ersten Gliede die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, für y und x die Doppelwerthe 0,0; 0,1; 0,2; 1,0; 1,1; 2,0

Digitized by Google

im zweiten Gliede, und für z, y, x die Werthe 0,0,0 im dritten Gliede zu setzen. Hiernach ist

$$A=6\left[6^4+2.5.6^3+\frac{2.3}{1.2}.5^2.6^2.+\frac{2.3.4}{1.2.3}5^3.6+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}.5^4\right]$$

$$-6.5\left[\frac{2.3}{1.2}.6^2+\frac{2.3.4}{1.2.3}.5.6+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}.5^2\right]$$

$$-6.5.\frac{2}{1}.4.\left[\frac{2.3.4}{1.2.3}.6+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}.5\right]$$

$$-6.5.\frac{2.3}{1.2}.4^2.\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}.6^0$$

$$+6.5.4.\frac{2.3}{1.2}.\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4},$$

oder, wenn die angezeigten Zahlen-Werthe ermittelt werden:

$$A=6[1296+2160+2700+3000+3125]=+73686$$
$$-30[108+120+125] \quad =-10590$$
$$-250[24+25] \quad =-11760$$
$$-1440.5 \quad =-7200$$
$$+120.15 \quad =+1800$$
$$=75486-29550=45936.$$

Hiernach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

2) $$W=\frac{45936}{46656}=\frac{319}{324}.$$

Dass die in 1) und 2) gefundenen Werthe richtig sind, lässt sich auch durch die in §. 11. gegebenen Gleichungen nachweisen.

Ihre Richtigkeit lässt sich aber auch noch ganz einfach dadurch zeigen, dass man bemerkt, dass die Zahl der günstigen Fälle alle diejenigen Gruppen in sich begreift, worin Wiederholungen vorkommen, also diejenigen ausschliesst, worin nur Versetzungen aus 6 Elementen vorkommen. Die günstige Anzahl für Nro. 1. ist daher

$$A=P'[a_1\ a_2,\ldots a_6]^3-P[a_1,\ a_2,\ldots a_6]^3$$
$$=6^3-6^{3-1}=216-120=96.$$

Die günstige Anzahl für 2) aber ist aus dem nämlichen Grunde

$$A=P'[a_1,\ a_2\ldots a_6]^6-P[a_1,\ a_2,\ldots a_6]^6$$
$$=6^6-6^{6-1}=46656-720=45936,$$

wie oben gefunden wurde.

Digitized by Google

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit zehn Würfeln einen Wurf zu thun, worin drei verschiedene Zahlen gerade je einmal (nicht mehr, nicht weniger), zwei andere gerade je zweimal und die letzte gerade dreimal vorkommt?

Die Zahl der günstigen Fälle ergibt sich nach 7) §. 7. aus folgendem Ausdruck:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_6;\ a_1^2, a_2^2, \ldots a_6^2;\ a_1^3, a_2^3, \ldots a_6^3]^{3,2,1}$$

$$= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2.1.2.3} \cdot \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.1.2.1} = 9072000;$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$3) \qquad W = \frac{10.9.8.7.6.5.5.4.3}{6.6.6.6.6.6.6.6.6.6} = \frac{5.7.5.5}{3^3.6^3} = \frac{875}{5832}.$$

§. 15.

Eine weitere Anwendung der hier gegebenen Entwicklungen lässt sich auf das Polynomium machen.

In §. 2. haben wir den Zusammenhang, welcher zwischen den Gruppen der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen und denen der Versetzungen mit und ohne Wiederholungen herrscht, nachgewiesen. Man kann die Gruppen der zweiten Art aus denen der ersten Art und umgekehrt ableiten, wenn man in die einzelnen Gruppen der Verbindungen die Versetzungen einführt, oder umgekehrt ausstösst. Diese Beziehungen lassen sich in Zeichen so darstellen:

$$1) \qquad P(a_1, a_2, \ldots a_n)^q = P[C(a_1, a_2, \ldots a_n)^q],$$

$$2) \qquad P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^q = P[C'(a_1, a_2, \ldots a_n)^q].$$

Durch das P auf der rechten Seite vor der eckigen Klammer soll das Einführen der Versetzungen in die Elemente der aus

$$C(a_1, a_2, \ldots a_n)^q \text{ und } C'(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$$

hervorgehenden Gruppen angedeutet werden.

Aus der Zusammenstellung in 1) und 2) lässt sich noch eine weitere Beziehung, die zwischen den Gruppen der Verbindungen und denen der Versetzungen (mit und ohne Wiederholungen) aus einerlei Elementenzahl und zu derselben Classe herrscht, erkennen. Sie ist folgende:

3) In den Gruppen der Versetzungen ohne Wiederholungen einer bestimmten Classe und Elementenzahl gibt es gerade so viele unter sich verschiedene Grup-

Digitized by Google

pen als in denen der Verbindungen ohne Wiederholungen zur nämlichen Classe und Elementenzahl;

oder die Anzahl der unter sich verschiedenen Gruppen in $P(a_1, a_2 \ldots a_n)^q$ ist gerade so gross als in $C(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$, denn das Mehr der Gruppen in $P(a_1, a_2, .a_n)^q$ hängt von der Versetzung oder verschiedenen Stellung der nämlichen Elemente in einer und derselben Gruppe, nicht aber von verschiedenen Elementen ab.

4) In den Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen einer bestimmten Classe und einer bestimmten Elementenzahl gibt es gerade so viele unter sich verschiedene Gruppen als in denen der Verbindungen mit Wiederholungen zur nämlichen Classe und Elementenzahl;

oder die Anzahl der unter sich verschiedenen Gruppen in $P'(a_1, a_2, .. a_n)^q$ ist gerade so gross als in $C'(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$ aus dem oben angeführten Grunde.

Hiernach ist die Gruppenzahl (A_v) der unter sich verschiedenen Gruppen in $P(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$

$$5) \qquad A_v = (n)_q = \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2\ldots.q},$$

und die Gruppenzahl der unter sich verschiedenen Gruppen in $P'(a_1, a_2 \ldots . a_n)^q$

$$6) \qquad A_v = [n]_q = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+q-1)}{1.2.3\ldots q}.$$

Ein diese Sätze erörterndes und bestätigendes Beispiel wurde schon oben §. 2. angeführt.

Ausserdem besteht ein ganz enger Zusammenhang zwischen den Versetzungen mit Wiederholungen einer bestimmten Classe und bestimmten Elementenzahl und dem Polynomium, wenn die Elemente der Versetzungen mit den Gliedern des Polynomiums und der Classenexponent mit der Potenz des Polynomiums zusammenfällt. Beides sind nämlich verschiedene Darstellungen einer und derselben Sache.

So ist z. B.

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3 = a^3 &+ 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 6abc + 6abd \\ &+ 3ab^2 + 3ac^2 + 6acd + 3ad^2 + b^3 + 3b^2c \\ &+ 3b^2d + 3bc^2 + 6bcd + 3bd^2 + c^3 \\ &+ 3c^2d + 3cd^2 + d^3.\end{aligned}$$

Genau dieselben Gebilde haben wir schon in §. 2. erhalten. Hiernach hat man:

$$(a+b+c+d)^3 = P'(a, b, c, d)^3$$

und in Rücksicht auf 2) dieses Paragraphen.

Digitized by Google

$$(a+b+c+d)^3 = P'(a,\ b,\ c,\ d)^3 = P[C'(a,\ b,\ c,\ d)^3].$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht ins Allgemeine übertragen, und man hat sofort

$$7)\quad (a_1+a_2+a_3+\ldots a_n)^q = P'(a_1,\ a_2,\ldots a_n)^q = P[C'(a_1,\ a_2\ldots a_n)^q].$$

Stellt man nun diesen Satz in der gewöhnlichen Polynomialform dar, so ändert das in Nichts die gemachte Schlussreihe und man hat, wenn die ordnende Grösse x eingeführt wird,

$$8)\quad (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots . a_n x^n)^q = P'(a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots a_n x^n)^q$$
$$= P[C'(a_1 x,\ a_2 x^2,\ a_3 x^3, \ldots a_n x^n)^q].$$

Durch die Darstellung 8) hat sich nur die Ordnung, in welcher die entstehenden Gruppen zusammengestellt werden, nicht aber die Gruppen oder ihre Anzahl geändert. Man kann daher die gewonnenen Sätze benutzen, um die Glieder, welche bei der entwickelten Darstellung des Polynomiums entstehen, zu zählen.

Hiebei unterscheiden sich folgende zwei Fragen:

a) wie gross ist die Zahl aller möglichen Glieder eines Polynomiums?

b) wie gross ist die Zahl aller unter sich verschiedenen Glieder desselben?

Die Zahl aller möglichen Glieder, welche durch die entwickelte Darstellung eines Polynomiums entstehen, fällt mit der Anzahl der Gruppen zusammen, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen gebildet werden aus den Elementen der Grundreihe des Polynomiums zu der so vielten Classe als der Exponent des Polynomiums angibt. Es ist sofort

$$9)\quad A(a_1 x, a_2 x^2, \ldots a_n x^n)^q = P'[a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots a_n x^n]^q = n^q.$$

Die Zahl aller unter sich verschiedenen Glieder in der entwickelten Darstellung eines Polynomiums fällt mit der Zahl der Gruppen zusammen, wenn die Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen der Grundreihe zur so vielten Classe gebildet werden als die Potenz des Polynomiums angibt. Es ist sofort

$$10)\quad A_r(a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots a_n x^n)^q = C^r[a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots a_n x^n]^q$$
$$= [n]^q = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+q-1)}{1.2.3\ldots.q}.$$

Den eben auf so einfache Weise gewonnenen Satz (Nro. 10.) hat Brianchon im Journ. d. l'école polyt. T. XV. Cah. XXV. Pg. 158. (Mémoire sur les puissances des Polynomes) auf eine sehr weitläufige Weise entwickelt, so dass man sich in der That über den Aufwand der dort gebrauchten Mittel wundern muss, um einen so einfachen Satz zu beweisen und zum Gegenstand einer besondern, umfangreichen Abhandlung zu machen. Er hat den Satz unter folgender Form gegeben:

Digitized by Google

11) $A_r(a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots a_n x^n)^q = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+q-1)}{1.2\ldots q} = \dfrac{1^{n+q-1|1}}{1^{n-1|1}[q]^1}$

$$= \frac{(q+1)^{n-1|1}}{1^{n-1|1}} = \frac{(q+1)(q+2)\ldots(n+q-1)}{1.2\ldots.(n-1)} = [q+1]_{n-1}.$$

Wendet man nun die gefundenen Sätze auf den vorliegenden besondern Fall an, so ist

$$A_r(a,\ b,\ c,\ d)^3 = P^r[a,\ b,\ c,\ d]^3 = 4^3 = 64,$$

$$A_r(a,\ b,\ c,\ d)^3 = C^r[a,\ b,\ c,\ d]^3 = \frac{4.5.6}{1.2.3} = 20;$$

wie es sein muss.

Wendet man nun die in §. 6. — 13. gefundenen Sätze auf das Polynomium an, so bietet diess reichlichen Stoff zur Anwendung und es lässt sich nun eine Reihe von Fragen beantworten, wovon die von Brianchon gestellte den Anfang bildet.

Das Polynomium

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n)^q$$

wird entwickelt.

a) Wie gross ist die Zahl aller möglichen Glieder, worin irgend ein Glied der Grundreihe wenigstens in der $r$ten Potenz vorkommt? 9) §. 13.;

b) höchstens in der $(r-1)$ten Potenz vorkommt? 10) §. 13..

c) worin irgend ein Glied gerade in der $r$ten Potenz vorkommt? 11) §. 13.;

d) worin irgend ein Glied wenigstens in der $r$ten und höchstens in der $(r+s)$ten Potenz vorkommt? 12) §. 13..

e) Wie gross ist die Zahl aller unter sich verschiedenen Glieder, worin irgend ein Glied der Grundreihe wenigstens in der $r$ten Potenz erscheint? 6) §. 12.;

f) höchstens in der $r$ten Potenz erscheint? 9) §. 12.;

g) worin irgend ein Glied gerade in der $r$ten Potenz erscheint? 10) §. 12.;

h) worin irgend ein Glied wenigstens in der $r$ten und höchstens in der $(r+s)$ten Potenz erscheint? 11) §. 12.;

u. s. w. In den angeführten Paragraphen sind alle die Fragen allgemein beantwortet.

Hieran knüpft sich eine andere Reihe von Fragen.

Das Polynomium

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_n x^n)^q$$

wird entwickelt.

a) Wie gross ist die Zahl der Glieder in der entwickelten Darstellung, worin die ordnende Grösse x gerade in der $s$ten Potenz erscheint?

Digitized by Google

b) wenigstens in der *s*ten Potenz erscheint?

c) höchstens in der *s*ten Potenz erscheint?

d) wenigstens in der *s*ten und höchstens in der $(s+r)$ten Potenz erscheint?

u. s. w. Hierin kann das Polynomium nur eine oder mehrere beliebig beschränkte oder unterbrochene Grundreihen haben.

Die Beantwortung dieser sehr mannigfaltigen Fragen hängt mit Problemen zusammen, die ich in einer besondern Schrift „die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren beliebig beschränkten Elementenreihen nebst ihrer Anwendung auf Analysis und Wahrscheinlichkeits-Rechnung“ untersucht habe und weswegen ich dorthin verweise.

Wird das Polynomium

$$(a_1\ a_2, \ldots a_{10},)^6$$

gebildet, so ist die Zahl der unter sich verschiedenen Glieder, worin ein Glied der Grundreihe wenigstens in der dritten Potenz erscheint, nach 6) §. 12.

$$'C[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2}, \ldots . \overset{3}{a_{10}}]^6 = \frac{10.11.12.13}{1.2.3.4} + 3.\frac{9.10.11.12}{1.2.3.4} - 1.\frac{9.10}{1.2.}$$

$$= 2200 - 45 = 2155.$$

Die Zahl der unter sich verschiedenen Glieder, worin irgend ein Glied der Grundreihe gerade in der dritten Potenz erscheint, ist nach 10) §. 12.

$$'A_3 = 'C[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_{10}}]^6 - 'C[\overset{4}{a_1},\ \overset{4}{a_2}, .. \overset{4}{a_{10}}]^6 =$$

$$= \frac{10.11.12.13}{1.2.3.4} + 3.\frac{9.10.11.12}{1.2.3.4} - \frac{9.10}{1.2}$$

$$- \frac{10.11.12}{1.2.3} - 2.\frac{9.10.11}{1.2.2}$$

$$= 2200 - 595 = 1605.$$

Die Zahl aller möglichen Glieder, worin ein Glied der Grundreihe wenigstens in der dritten Potenz erscheint, ist nach 9) §. 13.

$$'P[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_{10}}]^6 = 10.(10^3 + 3.10^2.9 + \frac{3.4}{1.2}.10.9^2 + \frac{3.4.5}{1.2.3}.9^3)$$

$$- 10.9.\frac{3.4.5}{1.2.3}$$

$$= 158500 - 900 = 157600.$$

Digitized by Google

Die Zahl aller möglichen Glieder, worin irgend ein Glied der Grundreihe gerade in der dritten Potenz erscheint, ist nach 11) §. 13

$$'P[a_1^3, a_2^3, \ldots a_{10}^3]^6 - 'P[a_1^4, a_2^4, \ldots a_{10}^4]^6$$

$$= 10[10^3 + 3.10^2.9 + \frac{3.4}{1.2}.10.9^2 + \frac{3.4.5}{1.2.3}.9^3) - 10.9.\frac{3.4.5}{1.2.3}$$

$$- 10[10^2 + 4.10.9 + \frac{4.5}{1.2}.9^2]$$

$$= 138500 - 13600 = 144900.$$

Die gleichen Resultate erhält man, wenn man diese Probleme nach §. 8. und §. 11. behandelt.

§. 16.

Noch eine dritte Anwendung der hier gegebenen Entwicklungen soll auf das Zahlensystem gemacht werden.

Die Zahlen unseres Zahlensystems bilden bekanntlich die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen (Zahlzeichen)

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

zu den verschiedenen Classen, jedoch mit der Beschränkung, dass die 0 nicht die erste Stelle einnehmen kann. In den Zahlen einer und derselben Classe können daher die einzelnen Ziffern ein oder mehrere mal wiederholt erscheinen. Alle Zahlen, welche elf Ziffern und mehr haben, müssen daher irgend ein Element mehrere mal wiederholt in sich führen. Bei Zahlen aber, welche zehn Ziffern und weniger haben, müssen nicht nothwendig wiederholte Zahlzeichen vorkommen.

Man kann daher bei den Zahlen einer bestimmten Classe fragen: wieviele Zahlen kommen darin vor, worin irgend eine Ziffer grade einmal, zweimal, dreimal u. s. w. wiederholt, oder in beliebiger Verbindung mit einander wiederholt erscheint

Um nun die eben angeregte Frage für einen bestimmten Fall beantworten zu können, muss eine auf die Stellung der 0 sich beziehende Vorfrage beantwortet werden. Sie ergiebt sich aus dem 7. Abschnitte meiner Combinations Lehre §. 41. Nro. 122. oder 125. S. 96. u. f. leicht. Es handelt sich nämlich um die Zerstreuung der Elemente in Fächer, oder um Einweisung einzelner Elemente (hier eines Elementes) in bestimmte Stellen bei den Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen.

Sollen nämlich je r Elemente aus n Elementen ausgehoben und auf s Stellen zerstreut werden, so wird die entstehende Gruppenzahl

Digitized by Google

so vielmal genommen werden müssen als eine der nachstehende Gleichungen angibt:

1) $Z[s;\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_n]^r = (n)_r \cdot (s)_r =$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots.r} \cdot \frac{s(s-1)\ldots.(s-r+1)}{1.2.3\ldots r}$$

2) $Z.P[s;\ a_1,\ a_2, \ldots a_n]^r = n^{r|-1}(s)_r$

$$= n(n-1)\ldots.(n-r+1) \cdot \frac{s(s-1)\ldots.(s-r+1)}{1.2.3\ldots r}$$

Im ersten Falle kommen keine Versetzungen in Frage. Im zweiten geschieht diess. Der Buchstabe Z bedeutet Zerstreuungen in Fächer oder Einweisung der Elemente in bestimmte Stellen.

Sind die zu zerstreuenden Elemente gleich, so ändert dies an der Schlussreihe nichts. Es tritt nur die Beschränkung ein dass Elementenzahl und Classenexponent einander gleich werden Hiernach ist aus 1)

3) $$Z[s;\ a^n]^n = (n)_n\,(s)_n = (s)_n = \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{1.2\ldots.n}.$$

In dem Zahlensystem fällt nun die 0 unter das Gesetz 3). Sie kann alle Stellen mit Ausnahme der ersten durchlaufen, und erscheint dann entweder einmal, oder zweimal oder dreimal wiederholt u. s. w. Kömmt sie nun bei einer $(s+1)$stelligen Zahl in Frage, so kann sie nur die (s) letzten Stellen in den genannten Dimensionen durchlaufen. Sie erzeugt dann im betreffenden Falle folgende Vervielfachungen:

4) $$Z[s;\ \overset{1}{a_0}]^1 = (s)_1,$$

$$Z[s;\ \overset{2}{a_0}]^2 = (s)_2 = \frac{s(s-1)}{1.2},$$

$$Z[s;\ \overset{3}{a_0}]^3 = (s)_3 = \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3},$$

u. s. w.;

denn sie bringt in jeder einzelnen Gruppe, womit sie in Verbindung tritt, die gleichen Erscheinungen, also auch die gleichen Vervielfachungen hervor.

Nach diesen Vorbemerkungen sollen nun die Eigenschaften aller sechsstelligen Zahlen untersucht werden, welche durch wiederholtes Vorkommen der sie erzeugenden Ziffern bedingt sind. Die sechsstelligen Zahlen zerfallen hiernach in folgende Arten:

a) solche, worin nur eine Ziffer vorkommt oder eine Ziffer erscheint sechsmal wiederholt. Diese Eigenschaft wird angedeutet durch das Symbol (nach §. 8.)

$$e^6;$$

Digitized by Google

b) solche, worin zwei verschiedene Ziffern vorkommen; oder eine Ziffer erscheint einmal, die zweite fünfmal; eine Ziffer zweimal, die zweite viermal; eine Ziffer dreimal, eine zweite auch dreimal. In Zeichen

$$e^1\ e^5,\ e^2\ e^4,\ e^3\ e^3;$$

c) solche, worin drei verschiedene Ziffern vorkommen. Die einzelnen Fälle lassen sich durch folgende Symbole erkennen:

$$e^1\ e^1\ e^4,\ e^1\ e^2\ e^3,\ e^2\ e^2\ e^2;$$

d) solche, worin vier verschiedene Ziffern vorkommen, nach folgenden Symbolen:

$$e^1\ e^1\ e^1\ e^3,\ e^1\ e^1\ e^2\ e^2;$$

e) solche, worin fünf verschiedene Ziffern vorkommen, nach folgendem Symbole:

$$e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^2;$$

f) solche, worin sechs verschiedene Ziffern vorkommen, nach folgendem Symbole.

$$e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1.$$

Alle hier aufgezählten Fälle müssen nun mit Rücksicht auf die Gleichungen 4) und auf die Gleichung 7) §. 7. untersucht werden. Ueberall, wo die Null in Frage kommt, soll sie durch das Zeichen a_0 angedeutet werden.

5) Das Symbol e^6 deutet auf folgende Gruppenzahl:

$$P[a_1^6,\ a_2^6, \ldots a_9^6]^1 = 9.$$

6) Das Symbol $e^1\ e^5$ deutet auf folgende Fälle, und zwar ohne 0:

$$P[a_1^1,\ a_2^1 \ldots . a_9^1;\ a_1^5,\ a_2^5, \ldots a_9^5]^{1,1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.1}.9.8 = 432.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1^5,\ a_2^5, .. a_9^5]^1 Z[5;\ a_0]^1 = 9.\frac{5}{1} = 45.$$

Mit der 0 als Fünffaches:

$$P[a_1,\ a_2, \ldots a_9]' Z[5;\ a_0^5]^5 = 9.\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 9.$$

7) Das Symbol $e^2\ e^4$ erzeugt folgende Gruppenzahl, und zwar ohne 0:

$$P[a_1^2,\ a_2^2, \ldots a_9^2;\ a_1^4,\ a_2^4, \ldots a_9^4]^{1,1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.1.2.3.4} \cdot 9.8 = 1080.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1^4,\ a_2^4, \ldots a_9^4]^1 . Z[5;\ a_0^2]^2 = 9 . \frac{5.4}{1.2} = 90.$$

Mit der 0 als Vierfaches:

$$P[a_1^2,\ a_2^2, \ldots . a_9^2]^1\ Z[5;\ a_0]^4 = 9 . \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 45.$$

8) Das Symbol $e^3\ e^3$ erzeugt folgende Gruppenzahl, ohne 0:

$$P[a_1^3,\ a_2^3, .. a_9^3]^2 = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.1.2.3} \cdot \frac{9.8}{1.2} = 720.$$

Mit der 0 als Dreifaches:

$$P[a_1^3,\ a_2^3 \ldots a_9^3]^1\ Z[5;\ a_0^3]^3 = 9 . \frac{5.4.3}{1.2.3} = 90.$$

9) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^4$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1,\ a_2, \ldots a_9;\ a_1^4,\ a_2^4, \ldots a_9^4]^{2,1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.1.2.3.4} \cdot \frac{9.8}{1.2} \cdot 7 = 7560.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1\ a_2, .. a_9;\ a_1^4,\ a_2^4, \ldots a_9^4]^{1,1} Z[5;\ a_0]^1 = \frac{5.4.3.2.1}{1.1.2.3.4} . 9.8 . \frac{5}{1} = 1800.$$

Mit der 0 als Vierfaches:

$$P[a_1,\ a_2, \ldots a_9]^2\ Z[5,\ a_0^4]^4 = \frac{2.1}{1.1} \cdot \frac{9.8}{1.2} \cdot \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 360.$$

10) Das Symbol $e^1\ e^2\ e^3$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1,\ a_2, \ldots a_9;\ a_1^2,\ a_2^2, \ldots a_9^2;\ a_1^3,\ a_2^3, \ldots a_9^3]^{1,1,1}$$
$$= \frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.2.1.2.3} . 9.8.7 = 30240.$$

Digitized by Google

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1^2, a_2^2, \ldots a_9^2; a_1^3, a_2^3, \ldots a_9^3]^{1,1}\, Z[5; a_0]^1 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.1.2.3}.9.8.\frac{5}{1} = 3600.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9; a_1^3, a_2^3, \ldots a_9^3]^{1,1}\, Z[5; a_0^2]^2 = \frac{4.3.2.1}{1.1.2.3}.9.8.\frac{5.4}{1.2} = 2880.$$

Mit der Null als Dreifaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9; a_1^2, a_2^2, \ldots a_9^2]^{1,1}\, Z[5; a_0^3]^3 = \frac{3.2.1}{1.1.2}.9.8.\frac{5.4.3}{1.2.3} = 2160.$$

11) Das Symbol $e^2\ e^2\ e^2$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1^2, a_2^2, \ldots . a_9^2]^3 = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.1.2.1.2} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} = 7560.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1^2, a_2^2, \ldots a_9^2]^2\, Z[5; a_0^2]^2 = \frac{4.3.2.1}{1.2.1.2} \cdot \frac{9.8}{1.2} \cdot \frac{5.4}{1.2} = 2160.$$

12) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^1\ e^3$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9; a_1^3, a_2^3, \ldots a_9^3]^{3,1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.3} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3}.6 = 60480.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots . a_9; a_1^3, a_2^3, \ldots . a_9^3]^{2,1}\, Z[5; a_0]^1$$
$$= \frac{5.4.3.2.1}{1.1.1.2.3} \cdot \frac{9.8}{1.2}.7.\frac{5}{1} = 25200.$$

Mit der 0 als Dreifaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9]^3\, Z[5; a_0^3]^3 = \frac{3.2.1}{1.1.1} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3} = 5040.$$

13) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^2\ e^2$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

Digitized by Google

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9;\ \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9}]^{2,2} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.1.2.1.2} \cdot \frac{9.8}{1.2} \cdot \frac{7.6}{1.2}$$
$$= 136080.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9;\ \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9}]^{1,2} Z[5;\ a_0]^1 = \frac{5.4.3.2.1}{1.1.2.1.2} \cdot 9 \cdot \frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{5}{1}$$
$$= 37800.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9;\ \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9}]^{2,1} Z[5;\ \overset{2}{a_0}]^2 = \frac{4.3.2.1}{1.1.1.2} \cdot \frac{9.8}{1.2} \cdot 7 \cdot \frac{5.4}{1.2}$$
$$= 30240.$$

14) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^2$ bedingt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9;\ \overset{2}{a_1}\ \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9}]^{4,1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.1.2} \cdot \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \cdot 5$$
$$= 226800.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9;\ \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9}]^{3,1} Z[5;\ a_0]^1 = \frac{5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot 6 \cdot \frac{5}{1}$$
$$= 151200.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1, a_2 \ldots a_9]^4 Z[a_5;\ \overset{2}{a_0}]^2 = \frac{4.3.2.1}{1.1.1.1} \cdot \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.4}{1.2} = 30240.$$

15) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1$ bedingt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9]^6 = 6.5.4.3.2.1 \cdot \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6} = 60480.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9]^5 Z[5; a_0]^1 = 5.4.3.2.1 \cdot \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{5}{1} = 75600.$$

Digitized by Google

Stellt man nun nach dieser Aufzählung der einzelnen Fälle die gewonnenen Resultate zusammen, so ist unter den sechsstelligen Zahlen die Anzahl derjenigen:

a) worin nur eine Ziffer vorkommt nach 5)	9
b) worin zwei verschiedene Ziffern vorkommen, 6), 7), 8)	2511
c) worin drei verschiedene Ziffern vorkommen, 9), 10), 11)	58320
d) worin vier verschiedene Ziffern vorkommen, 12), 13) .	294840
e) worin fünf verschiedene Ziffern vorkommen, 14) . .	408240
f) worin sechs verschiedene Ziffern vorkommen, 15) . .	136080
Die Summe aller dieser Zahlen beträgt	900000

wie diess sein muss, denn die Zahl aller sechsstelligen Zahlen ist

$$P'[a_0, a_1, \ldots a_9]^6 - P'[a_0, a_1, \ldots . a_9]^5 = 10^6 - 10^5 = 900000.$$

Die hier untersuchten Fälle beantworten alle auf die sechsstelligen Zahlen bezüglichen Fragen. So ist die Anzahl derjenigen Zahlen, worin gerade drei verschiedene Zahlen vorkommen, die eine gerade einmal, die andere gerade zweimal, die dritte gerade dreimal wiederholt nach Nro. 10) ($e^1\ e^2\ e^3$):

$$30240 + 3600 + 2880 + 2160 = 38880.$$

Am grössten ist die Zahl derjenigen, worin fünf verschiedene Ziffern vorkommen, nämlich vier unter sich verschiedene Zahlen je einmal, eine fünfte zweimal nach 14) ($e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^2$):

$$226800 + 151200 + 30240 = 408240.$$

Auf die hier gezeigte Weise sind alle das Zahlensystem betreffenden und hier einschlagenden Fragen zu behandeln.

Soll die Anzahl aller zehnstelligen Zahlen bestimmt werden, worin drei verschiedene Ziffern je einmal, zwei weitere unter sich und den vorigen verschiedene Ziffern je zweimal und eine sechste dreimal wiederholt erscheint, so hat man das Symbol

$$e^1\ e^1\ e^1\ e^2\ e^2\ e^3$$

nach 7) §. 6. und Nro. 3) dieses Paragraphen zu behandeln. Es entsteht sofort ohne 0:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9;\ \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9};\ \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_9}]^{3,2,1}$$

$$= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2.1.2.3} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot \frac{6.5}{1.2} \cdot 4$$

$$= 762048000.$$

Mit der Null als Einfaches:

Digitized by Google

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9;\ a_1^2, a_2^2, \ldots a_9^2;\ a_1^3, a_2^3, \ldots a_9^3]^{2,2,1} Z[9;\ a_0]^1 =$$
$$= \frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.2.1.2.1.2.3} \cdot \frac{9.8}{1.2} \cdot \frac{7.6}{1.2} \cdot 5 \cdot \frac{9}{1}$$
$$= 514382400.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1, a_2 \ldots a_9;\ a_1^2, a_2^2, \ldots a_9^2;\ a_1^3, a_2^3, \ldots a_9^3]^{3,1,1} Z[9;\ a_0^2]^2$$
$$= \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2.3} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot 6.5 \cdot \frac{9.8}{1.2}$$
$$= 304819200.$$

Mit der 0 als Dreifaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9;\ a_1^2, a_2^2, \ldots a_9^2;\ a_1^3, a_2^3, \ldots a_9^3]^{3,2} Z[9;\ a_0^3]^3$$
$$= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3}$$
$$= 133358400.$$

Hiernach ist die gesuchte Anzahl:

$$A = 762048000 + 514382400 + 304819200 + 133358400$$
$$= 1714608000.$$

Das allgemeine Gesetz, worauf die in diesem Paragraphen gegebenen Entwicklungen beruhen, ist, wie man sieht, eine Verbindung des Satzes 7) §. 7. mit 3) dieses Paragraphen. Bezeichnet man der Kürze wegen die zu 7) §. 7. gehörige Gruppenzahl durch A, so ist sofort

16) $$P[a_1, a_2, \ldots a_n;\ a_1^2, a_2^2, \ldots a_n^2, \ldots;\ a_1^k, a_2^k, \ldots a_n^k]^{q_1, q_2, \ldots q_k} \times Z[s;\ a_0^m]^m$$
$$= A \cdot (s)_m = A \cdot \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-m+1)}{1.2.3\ldots m},$$

und dieser Satz sagt aus: Die Gruppen der Versetzungen sollen unter den zu 7) §. 7. angegebenen Bedingungen gebildet werden, und in jede Gruppe soll ein neues Element (a_0) als $m$faches eintreten und bestimmte Stellen (beliebig zu Anfang, in der Mitte, am Ende) durchlaufen.

Hier gibt die eben schon angegebene Bedingungsgleichung

17) $$x = 1.q_1 + 2.q_2 + 3.q_3 + \ldots + k.q_k$$

die Beschränkung für die Vertheilungsexponenten und

Digitized by Google

18) $$q = x + m$$

die Bestimmung für die Dimensionen der Elemente, die in jeder einzelnen Gruppe vorkommen sollen.

§. 17.

Schliesslich ist zu bemerken, dass der Ort, wo die hier in §. 6. — §. 16. entwickelten Sätze in der Combinationslehre ihre Stelle finden, klar vorliegt. Sie gehören zu den Combinationen (Versetzungen und Verbindungen) mit und ohne Wiederholungen. Die in §. 12. und §. 13. aufgeführten Gebilde lassen sich auch noch einer andern Ansicht unterordnen und schliessen sich deswegen auch einer andern Classe von Combinationen an, die ich in einer Abhandlung „die Reihenfolge der Elemente beiden Versetzungen mit und ohne Wiederholungen aus einer oder mehreren Elementenreihen und ihre Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung“ behandelt habe, denn sie geben die Zahl der Gruppen an, worin die erzeugenden Elemente ein oder mehreremal wiederholt oder an einander gereiht erscheinen. Von dieser Ansicht aus sind sie betrachtet und untersucht. Weiss hat in der oben angeführten Abhandlung (Nro. I. und II.) die in §. 9. aufgeführten Probleme (wozu auch die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen gehören), die sich nach unserer Bezeichnung so darstellen:

$$^{*}C[a_1^{k}, a_2^{k}, \ldots a_{n_k}^{k}, \ldots a_{n_{k-1}}^{k-1}, \ldots a_{n_3}^{3}, \ldots a_{n_2}^{2}, \ldots a_{n_1}]^{q}$$

und

$$^{*}P[a_1^{k}, a_2^{k}, \ldots a_{n_k}^{k}, \ldots a_{n_{k-1}}^{k-1}, \ldots a_{n_3}^{3}, \ldots a_{n_2}^{2}, \ldots a_{n_1}]^{q},$$

untersucht, wie sich einfach aus der Vergleichung der hier aufgestellten Gleichungen mit den dort entwickelten Formeln und gewählten Beispielen ergibt; hat aber die in §. 8. und §. 11. aufgestellten Probleme nicht berücksichtigt, die ich durch

$$'C[a_1\ a_2, \ldots a_{n_1}, \ldots a_{n_2}^{2}, \ldots a_{n_{k-1}}^{k-1}, \ldots a_{n_k}^{k}]^{q}$$

$$'P[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \ldots a_{n_2}^{2}, \ldots \ldots a_{n_k}^{k}]^{q}$$

bezeichnet habe. Beide Arten von Problemen gehören, wie hier gezeigt wurde (§. 6. und §. 7.), zusammen und ergänzen sich gegenseitig. Der Uebergang von den Problemen der einen Art auf die anderen ist deswegen nicht schwer, wie aus den hierhergehörigen Paragraphen hervorgeht.

Die in §. 8. — §. 11. entwickelten Gesetze führen auf keine geschlossenen Formeln. Dieser Vorzug kommt nur den in §. 12. und

§. 13. entwickelten Gleichungen zu. Weiss hat in Nro. IV.—VIII. seiner Abhandlung noch weitere Probleme aus der Combinations-Lehre behandelt, und die von ihm näher untersuchten Gebilde Permutationen, Combinationen und Variationen mit beschränkter Stellenbesetzung genannt.

Auch auf diesem Gebiete lohnt die Wissenschaft dankbar mit reicher Ausbeute, wie sich dort zeigt. Der von ihm dort behandelte Gegenstand ordnet sich nach *m* meinem Dafürhalten der von mir im 5ten Abschnitte meiner Combinationslehre aufgeführten Abtheilung unter, worin diejenigen Combinationen untersucht sind, welche durch Verbindung der Gruppen verschiedener Elementen-Reihen erzeugt werden. Ich verweise deswegen zur Bestätigung des Gesagten auf die §§. 33., 34., 35., 36. und 37. der Combinationslehre, wo die Grundzüge des angeregten Gegenstandes nach dem Zwecke dieser Schrift sich entwickelt finden.

Auch hier kehrt der Wunsch wieder, sich über Benennung und Bezeichnung in der Combinationslehre zu verständigen. Wird nun aber aus irgend welchen Gründen dennoch von dem einen oder dem andern eine ihm besonders zusagende Benennungs- und Bezeichnungsweise gewählt, so liegt es in allseitigem Interesse, dass der Ort, wo der behandelte Gegenstand im System sich einreiht, ferner Namen und Bezeichnung, unter welchen der nämliche Gegenstand von anderen aufgeführt wurde, mit angegeben werde. Es lassen sich gar manche Probleme unter verschiedenen Gesichtspunkten, wie aus dem hier Gesagten hervorgeht, behandeln und beleuchten. Jedenfalls hätte eine solche Zusammenstellung den Vortheil, dass sie den Ueberblick und die Zurechtfindung erleichterte, und so Gelegenheit böte, den Vorzug der einen Benennungs- und Bezeichnungsweise vor der andern festzustellen.

Digitized by Google

XII.

Methode, die geradlinigen Asymptoten einer Curve aus ihrer Polargleichung zu bestimmen.

Von

Herrn M. A. Nell,

Baupraktikanten zu Mainz.

Setzt man in der Gleichung

$$r = f(\varphi)$$

Taf. VIII. Fig. 1. den Leitstrahl $r = \infty$, so wird er der Asymptote parallel. Wird dafür der Winkel $\varphi = \delta$, so haben wir

$$\infty = f(\delta).$$

Ist daraus der Winkel δ bestimmt, so erhält man den Abstand $AE = g$ der Asymptote vom Pole auf folgende Art: Für irgend eine Stellung des Leitstrahls AC ist

$$\angle DAC = \delta - \varphi,$$

daher

$$DF = AE = DC + CF = r\sin(\delta - \varphi) + u = g,$$

wenn man das Stück CF durch u bezeichnet. Da dieser Ausdruck für jeden Werth von φ gilt, so setzen wir jetzt $\varphi = \delta$, also wird $r = \infty$ und $u = 0$,

$$g = \infty . 0 = \frac{0}{0}.$$

Um den Werth dieses unbestimmten Ausdruckes zu bestimmen, haben wir

$$g=\frac{d.\sin(\delta-\varphi)}{d.\frac{1}{r}}=\frac{-\cos(\delta-\varphi)}{-\frac{dr}{d\varphi}.\frac{1}{r^2}}=\frac{r^2\cos(\delta-\varphi)}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

Setzen wir nun $\varphi=\delta$, so wird

$$g=\frac{r^2}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

Wir erhalten daher die Richtung der Asymptote, wenn wir den Leitstrahl unendlich gross werden lassen und den zugehörigen Winkel suchen.

Den kürzesten Abstand der Asymptote vom Pole erhalten wir, wenn wir das Quadrat des Leitstrahls durch den ersten Differentialcoefficienten dividiren, und darin $\angle\varphi=\delta$ setzen. Trägt man diesen Abstand senkrecht auf die zuerst gefundene Richtung, so geht die Asymptote durch diesen Punkt.

Diese Regel wollen wir auf mehrere Linien anwenden.

1. Die Polargleichung einer Curve ist

$$r=\frac{a.\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Man soll ihre Asymptote bestimmen.

$$r=\infty,\quad \varphi=\delta,$$

$$\infty=\frac{a\sin^2\delta}{\cos\delta}.$$

Da der Zähler nicht unendlich gross werden kann, so muss der Nenner gleich Null werden, daher Taf. VIII. Fig. 2.:

$$\cos\delta=0,\quad \delta=90^0,$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=a.\frac{2\sin\varphi\cos^2\varphi+\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$g=\frac{\frac{a^2\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi}}{a\frac{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}.\sin\varphi}=\frac{a\sin^3\delta}{1+\cos^2\delta},$$

$\delta=90^0$ gibt $g=a$.

Digitized by Google

Den Abstand a muss man auf der Abscissenlinie AB nehmen, weil $\delta = 90^0$; macht man BF senkrecht zu AB, so erhält man die Asymptote BF.

(Diese Curve ist die Cissoide.)

Anmerkung. Die Gleichung $\cos\delta = 0$ gibt ausser $\delta = 90^0$ auch noch $\delta = 270^0$, welchem Werthe die Richtung AD' entspricht. Für $\delta = 270^0$ wird

$$g = \frac{a\sin^3 270^0}{1+\cos^2 270^0} = -a.$$

Das negative Zeichen sagt, dass man a von A nach B auftragen müsse. Denn nach Taf. VIII. Fig. 1. wird die Grösse g immer senkrecht zu AD und zwar in einer Richtung aufgetragen, welche derjenigen entgegengesetzt ist, nach der sich der veränderliche Winkel φ bewegt. Der zweite Werth von δ zeigt daher, dass BF' Asymptote für den unteren Theil der Curve ist.

2.
$$r = \frac{a}{\varphi},$$

$$r = \infty, \quad \varphi = \delta,$$

$$\delta = \frac{a}{\infty} = 0,$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2},$$

$$g = \frac{\frac{a^2}{\varphi^2}}{-\frac{a}{\varphi^2}} = -a.$$

Taf. VIII. Fig. 3. Die Asymptote ist der Linie AB parallel. Das negative Zeichen im Ausdrucke für g zeigt an, dass man die Grösse a nicht von A nach F, sondern nach der entgegengesetzten Richtung AD auftragen müsse (vergleiche Taf. VIII. Fig. 1).

(Hyperbolische Spirale.)

3.
$$r = a + \frac{b}{\cos\varphi},$$

$$\infty = a + \frac{b}{\cos\delta},$$

$$\cos\delta = 0, \quad \delta = 90^0,$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{b\sin\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$g = \frac{\frac{(a\cos\varphi + b)^2}{\cos^2\varphi}}{\frac{b\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} = \frac{(b + a\cos\varphi)^2}{b\sin\varphi},$$

$$g = b, \quad \varphi = \delta = 90^0.$$

Taf. VIII. Fig. 4. Die Asymptote steht senkrecht auf AB; ihr Abstand vom Pole ist $= b$.

(Conchoide.)

4. $$r = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\infty = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\delta}{\sin\delta}.$$

Der Nenner wird 0, wenn $\delta = 0$; allein dann wird auch der Zähler $= 0$.

Nimmt man dagegen $\delta = \pi$, so wird der Ausdruck ∞.

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

$$g = \frac{\frac{4a^2}{\pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{\sin^2\varphi}}{\frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} = \frac{\frac{2a}{\pi} \cdot \varphi^2}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi},$$

$$g = \frac{\frac{2a}{\pi} \cdot \delta^2}{\sin\delta - \delta\cos\delta} = \frac{\frac{2a\pi^2}{\pi}}{\sin\pi - \pi\cos\pi} = \frac{2a\pi}{0 + \pi},$$

$$g = 2a.$$

Da $\delta = \pi$, so läuft die Asymptote der Linie AD parallel. Um ihren Abstand Taf. VIII. Fig. 5. von A zu erhalten, bemerken wir, dass in der Gleichung

$$r = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

für $\varphi = 90^0$ $r = a$ wird; daher ist $AF = a$. Machen wir $FE = AF$ und ziehen EG parallel AD, so ist EG die Asymptote.

Digitized by Google

Nimmt man den Winkel φ negativ,

$$r=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{-\varphi}{-\sin\varphi}=\frac{2a\varphi}{\pi\sin\varphi},$$

so folgt, dass die Curve in Bezug auf die Axe BD ganz symmetrisch ist; sie hat daher noch eine zweite Asymptote $E'G'$, wo $AE'=AE$.

(Quadratrix.)

5. $$r=\frac{\frac{1}{2}p}{1+\sqrt{1+q}\,.\cos\varphi},$$

$$\infty=\frac{\frac{1}{2}p}{1+\sqrt{1+q}\,.\cos\delta},$$

$$\cos\delta=-\frac{1}{\sqrt{1+q}},$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{\frac{1}{2}p\sqrt{1+q}.\sin\varphi}{(1+\sqrt{1+q}\,.\cos\varphi)^2},$$

$$g=\frac{\frac{1}{4}p^2}{\frac{1}{2}p\sqrt{1+q}\,.\sin\varphi}=\frac{p}{2\sqrt{1+q}.\sin\delta}.$$

Nun ist

$$\sin\delta=\sqrt{1-\cos^2\delta}=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{1+q}},$$

$$g=\frac{p}{2\sqrt{q}},\quad \cos\delta=-\frac{1}{\sqrt{1+q}}.$$

Da hier $\cos\delta$ jedenfalls negativ ist, so liegt δ im zweiten oder im dritten Quadranten; wir erhalten also zwei Asymptoten.

Ist nun q negativ, so wird sowohl g, als auch $\cos\delta$ imaginär.

Ist $q=0$, so wird $\delta=180^0$, $g=\infty$.

Nur wenn q positiv ist und einen endlichen Werth besitzt, hat die Curve Asymptoten.

Nun drückt aber obige Polargleichung alle Kegelschnittslinien aus; p und q haben dieselbe Bedeutung, wie in der Gleichung

$$y^2=px+qx^2.$$

Digitized by Google

Ist q negativ, so ist die Linie eine Ellipse.
Ist $q=0$ „ „ „ Parabel.
Ist q positiv „ „ „ Hyperbel.

Also nur die letztere Linie hat Asymptoten.

Taf. VIII. Fig. 6. Sind a, b die Halbaxen, c die Excentricität, so ist

$$p=\frac{2b^2}{a},\quad q=\frac{b^2}{a^2};$$

daher

$$\cos\delta=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{a}{c},$$

$$g=\frac{\frac{2b^2}{a}}{2\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}}=b.$$

Mittelst dieser Werthe von $\cos\delta$ und g sind die Asymptoten leicht zu construiren.

Bei der Parabel fallen die Asymptoten in's Unendliche; bei ihr wird auch der Winkel der Tangente mit der Axe immer kleiner, je weiter sich die Punkte vom Scheitel entfernen.

Anmerkung Die Methode zeigt es daher auch deutlich an, wenn die Curve keine Asymptoten besitzt.

6.
$$r=\frac{h}{1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

$$\infty=\frac{h}{1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}},$$

$$1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=-\frac{1}{\cot\frac{\varepsilon}{2}}=-\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\operatorname{tg}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\frac{\delta}{2}=-\frac{\varepsilon}{2}\text{ oder }\delta=-\varepsilon,$$

Digitized by Google

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-h\cot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sec^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\left(1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^2},$$

$$g = \frac{\dfrac{h^2}{\left(1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)}}{\dfrac{-\frac{h}{2}\cot\frac{\varepsilon}{2}\sec^2\frac{\varphi}{2}}{\left(1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^2}} = -2h\,\mathrm{tg}\,\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$g = -2h\,\mathrm{tg}\,\frac{\varepsilon}{2}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2} = -2h\,\mathrm{tg}\,\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2},$$

$$g = -2h\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2} = -h\sin\varepsilon.$$

Taf. IX. Fig. 7. Der Pol der Curve ist A; der veränderliche Winkel φ wird von AB aus gezählt.

$$AB \text{ ist } = h, \quad \angle ABG = \varepsilon.$$

Ist der Winkel φ positiv, so fällt er auf die Seite von AB nach H. Da hier Winkel $\delta = -\varepsilon$ gefunden wurde, so muss man Winkel $BAD = \varepsilon$ machen, um die Richtung der Asymptote zu erhalten. Das Zeichen — im Ausdrucke von g zeigt, dass man die Grösse $h\sin\varepsilon = AG$ von A nach G tragen muss. ($\angle GAD = 90^0$).

Die Gleichung der Curve

$$r = \frac{h}{1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}$$

gibt für jeden Werth von φ nur einen Werth r. Den Ast EB erhält man, wenn man φ zwischen $-\varepsilon$ und 0 nimmt.

BCA von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 180^0$.

ACF von $\varphi = 180^0$ bis $\varphi = 360^0 - \varepsilon$.

Denn nehmen wir einen Winkel $BAH'' = \varphi'$ grösser als 180^0, so ist $\varphi' = 180^0 + \varphi$,

$$r = \frac{h}{1-\cot\frac{\varepsilon}{2}\cot\frac{\varphi}{2}} = \frac{-h}{\cot\frac{\varepsilon}{2}\cot\frac{\varphi}{2}-1}.$$

Da jetzt r negativ geworden, so muss der Leitstrahl nicht nach

Digitized by Google

der Richtung AH'', sondern nach der entgegengesetzten Richtung AH' aufgetragen werden.

Diese Linie ist die Focale (Brennpunktslinie). Sie ist der geometrische Ort der Brennpunkte aller Kegelschnittslinien, welche entstehen, wenn man durch einen festen Punkt auf der Oberfläche eines senkrechten Kreiskegels alle möglichen Ebenen legt, welche senkrecht auf der durch den genannten Punkt und die Axe des Kegels gehenden Ebene stehen.

Mit dieser Linie beschäftigte sich zuerst Dr. E. Külp, Professor an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt; man sehe: Francoeur's Analytische Geometrie in der Ebene, übersetzt und mit Zusätzen versehen von Dr. E. Külp; Seite 221. u. f. Bern, Chur und Leipzig, Verlag von J. F. J. Dalp. 1839.

Die Focale lässt sich sehr einfach auf folgende Art construiren.

Taf. IX. Fig. 7. Die Linie JK, welche durch die Mitte von AB geht und zur Seite des Kegels parallel ist, enthält die Mittelpunkte aller Kegelschnittslinien. Legt man nun durch den Pol A irgend eine Gerade AH, welche die JK in L trifft, und beschreibt aus L mit dem Halbmesser LC den Halbkreis HCH', so sind H und H' Punkte der Curve.

7. $$r=\frac{2ab\sin\varphi}{(a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi}.$$

Damit $r=\infty$ werde, muss der Nenner $=0$ werden, indem der Zähler nicht ∞ werden kann.

$$(a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\delta=0,$$

$$\mathrm{tg}\delta=-\frac{a-b}{a+b}\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=2ab\,\frac{((a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi)\cos\varphi-(a+b)\cos\alpha\sin\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}}{((a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi)^2},$$

$$g=\frac{2ab\sin^2\delta\cos^2\delta}{-(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\delta\cos^3\delta-(a+b)\cos\alpha\sin^3\delta},$$

$$g=\frac{-2ab\sin^2\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha\sin\delta(\cos^2\delta+\sin^2\delta)},$$

$$g=-\frac{2ab\sin\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha}.$$

Um den Winkel δ aus diesem Ausdrucke zu entfernen, ist:

Digitized by Google

$$\sin\delta = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}}, \quad \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}};$$

$$g = \frac{-2ab\dfrac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}}\cdot\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\delta}}{(a+b)\cos\alpha} = \frac{2ab\dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\alpha}{(a+b)\cos\alpha(1+\operatorname{tg}^2\delta)},$$

$$1+\operatorname{tg}^2\delta = 1+\frac{(a-b)^2\sin^2\alpha}{(a+b)^2\cos^2\alpha} = \frac{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}{(a+b)^2\cos^2\alpha},$$

$$g = \frac{2ab(a-b)\sin\alpha}{(a+b)^2\cos^2\alpha\cdot\dfrac{(a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^3\cos^3\alpha}},$$

$$g = \frac{ab(a^2-b^2)\sin 2\alpha}{(a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Asymptote können wir nun auch construiren.

In Taf. IX. Fig. 8. ist

$$AC=b, \quad BC=a;$$

$$\angle ACG = \angle GCB = \alpha;$$

$$\angle GCD = \varphi, \quad CD = r.$$

Halbirt man die Gerade AB in H, so ist $\angle GCH=\delta$; CH gibt daher die Richtung der Asymptote an.

Halbirt man ferner die Linien AC, BC durch die Senkrechten JK und LM, welche die Linie CH in K und M schneiden, und zieht die Geraden AK, BM, so ist der Abstand NO des Durchschnittspunktes N von der Linie CH gleich der Grösse g. Errichtet man daher auf CH die Senkrechte CS und macht sie gleich NO, so geht die Asymptote durch S.

Beweis. Das negative Zeichen von $\operatorname{tg}\delta$ zeigt, dass der Winkel δ von CG aus nach der Seite gegen B hin aufzutragen ist.

Sehen wir nun von diesem Zeichen ab, und berücksichtigen nur den absoluten Werth

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$(a+b)\cos\alpha\sin\delta = (a-b)\sin\alpha\cos\delta,$$

$$a\cos\alpha\sin\delta + b\cos\alpha\sin\delta = a\sin\alpha\cos\delta - b\sin\alpha\cos\delta,$$

$$a\sin(\alpha-\delta) = b\sin(\alpha+\delta).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Taf. IX. Fig. 8. und denkt sich die Linie CH so gezogen, dass

Digitized by Google

$$\angle GCH = \delta,$$

so ist

$$\angle BCQ = \alpha - \delta, \quad \angle ACP = \alpha + \delta;$$

daher

$$BC.\sin BCQ = AC.\sin ACP,$$

d. i.

$$BQ = AP.$$

Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke BQH und APH id tisch, folglich

$$AH = BH.$$

Der Winkel GCH ist daher $= \delta$, wenn CH durch die Mitte AB geht.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass $NO = g$.

Aus den ähnlichen Dreiecke APK, NOK folgt:

$$NO : AP = KO : KP = CO - CK : KP,$$

$$\frac{NO}{AP} \cdot KP = CO - CK.$$

Ganz ebenso erhält man aus den ähnlichen Dreiecken NC MBQ:

$$\frac{NO}{BQ} \cdot MQ = CM - CO.$$

Addirt man beide Gleichungen und berücksichtigt, dass $BQ = A$

$$\frac{NO}{AP}(MQ + KP) = CM - CK.$$

Nun ist

$$\angle ACK = \alpha + \delta, \quad \angle BCM = \alpha - \delta;$$

$$\angle KAP = 90^0 - 2(\alpha + \delta), \quad \angle MBQ = 90^0 - 2(\alpha - \delta);$$

$$MQ = BQ.\operatorname{tg}(90^0 - 2(\alpha - \delta)) = AP.\cot 2(\alpha - \delta);$$

$$KP = AP.\operatorname{tg}(90^0 - 2(\alpha + \delta)) = AP.\cot 2(\alpha + \delta);$$

$$CM = \frac{CL}{\cos BCM} = \frac{a}{2\cos(\alpha - \delta)},$$

$$CK = \frac{CJ}{\cos ACK} = \frac{b}{2\cos(\alpha + \delta)}.$$

Digitized by Google

Führt man diese vier Werthe ein, so wird

$$\frac{NO}{AP}(AP\cot 2(\alpha-\delta)+AP\cot 2(\alpha+\delta))$$

$$=\frac{a}{2\cos(\alpha-\delta)}-\frac{b}{2\cos(\alpha+\delta)},$$

$$NO=\frac{\frac{a}{2\cos(\alpha-\delta)}-\frac{b}{2\cos(\alpha+\delta)}}{\cot 2(\alpha+\delta)+\cot 2(\alpha-\delta)}.$$

Es ist aber allgemein

$$\cot x+\cot y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y},$$

$$NO=\frac{a\cos(\alpha+\delta)-b\cos(\alpha-\delta)}{2\cos(\alpha-\delta)\cos(\alpha+\delta)\cdot\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2(\alpha-\delta).\sin 2(\alpha+\delta)}}.$$

Löst man im Zähler die Klammer auf, so erhält man

$$(a-b)\cos\alpha\cos\delta-(a+b)\sin\alpha\sin\delta=\frac{(a+b)\sin\delta\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

(Siehe Seite 323. unten.)

$$NO=\frac{(a+b)\sin\delta\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos(\alpha-\delta)\cos(\alpha+\delta)\frac{2\sin 2\alpha\,.\cos 2\alpha}{2\sin(\alpha-\delta)\cos(\alpha-\delta).2\sin(\alpha+\delta)\cos(\alpha+\delta)}},$$

$$NO=\frac{(a+b)\sin\delta\sin(\alpha-\delta)\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha\,.\,2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Da aber

$$\sin(\alpha-\delta)=\sin\alpha\cos\delta-\cos\alpha\sin\delta=\sin\alpha\cos\delta\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right):$$

$$\sin(\alpha-\delta)=\frac{2b\sin\alpha\cos\delta}{a+b}.$$

Eben so

$$\sin(\alpha+\delta)=\frac{2a\sin\alpha\cos\delta}{a+b},$$

$$NO=\frac{(a+b)\sin\delta\cdot\frac{2a\sin\alpha\cos\delta}{a+b}\cdot\frac{2b\sin\alpha\cos\delta}{a+b}}{2\sin^2\alpha\cos\alpha},$$

Digitized by Google

$$NO = \frac{2ab\sin\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha}.$$

Dieser Ausdruck stimmt, abgesehen vom Zeichen, genau mit dem zuerst erhaltenen Werthe von g überein.

Bei diesem Beispiele zeigt sich der Vortheil unserer Methode sehr auffallend. Hätte man die Asymptote nach einer der alten Methoden bestimmen wollen, so hätte man zuerst die Polargleichung auf rechtwinklige Coordinaten transformiren müssen, wodurch man eine Gleichung vom dritten Grade erhalten haben würde. Denn setzt man

$$x = r\cos\varphi, \text{ so ist } r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$y = r\sin\varphi, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Diese Werthe in die Polargleichung eingeführt und geordnet, gibt

$$y^3 + \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\alpha.xy^2 + \left(x^2 - \frac{2abx}{(a+b)\cos\alpha}\right)y + \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\alpha.x^3 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber sehr mühsam zu behandeln.

Unsere Methode bietet noch den Vortheil, dass man nur den Leitstrahl ∞ werden zu lassen braucht, während man bei der älteren Methode beide Coordinaten nach einander $=\infty$ setzen muss, um alle geraden Asymptoten zu erhalten.

Auch finden wir den kürzesten Abstand der Asymptote vom Pole, welcher daher immer einen endlichen Werth haben muss.

Ueberdiess sind die Polargleichungen der meisten krummen Linien viel einfacher, als die auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Gleichungen. Bei den sieben Beispielen kommt der Radiusvector nur auf der ersten Potenz vor, während die andern Gleichungen vom zweiten, dritten und selbst vierten Grade (Conchoide) sind.

Die in dem Vorigen entwickelte Methode fand ich, als ich mich mit der Aufgabe beschäftigte, den Glanzpunkt der Kugel zu bestimmen.

Diese Aufgabe lässt sich, da die Reflexion in der Ebene vor sich geht, die durch den Mittelpunkt C der Kugel, durch das Licht B und das Auge A gelegt werden kann, auch so ausdrücken:

Es ist (Taf. IX. Fig. 9.) ein Kreis um C und ausserhalb zwei Punkte A und B gegeben; man soll auf dem Umfange des Kreises

Digitized by Google

denjenigen Punkt D finden, so dass die Winkel ADE, BDF, welche die von A und B nach D gezogenen Linien mit der Tangente EF bilden, einander gleich sind.

Um diese Aufgabe analytisch zu lösen, nehmen wir

$$BC=a,$$

$$AC=b, \qquad CD=r,$$

$$\angle ACB=2\alpha, \qquad \angle GCD=\varphi,$$

$$\angle ACG=\angle BCG=\alpha.$$

In dem $\Delta\ ACD$ ist

$$\mathrm{tg}ADC=\frac{b\sin(\alpha-\varphi)}{r-b\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Ebenso findet man im ΔCDB

$$\mathrm{tg}BDC=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{r-a\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Da nun $\angle ADC=\angle BDC$, so ist

$$\frac{b\sin(\alpha-\varphi)}{r-b\cos(\alpha-\varphi)}=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{r-a\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Aus dieser Gleichung ist nun der Winkel φ zu bestimmen. Wir lösen deshalb die Klammern auf, und finden nach einer leichten Reduction:

$$\frac{2ab}{r\cos\alpha}\sin\varphi-(a+b)\,\mathrm{tg}\varphi=(a-b)\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Da in diesem Ausdrucke $\sin\varphi$ und $\mathrm{tg}\varphi$ getrennt vorkommen, so lässt sich der Winkel φ nicht direct berechnen; dagegen kommt die Grösse r nur auf der ersten Potenz vor; nimmt man daher für φ bestimmte Werthe an, so lassen sich die zugehörigen Werthe von r leicht berechnen. Es stellt daher obiger Ausdruck die Polargleichung einer Curve dar, worin φ der veränderliche Winkel, r der Leitstrahl

$$r=\frac{2ab\sin\varphi}{(a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi}.$$

Taf. IX. Fig. 8. Der Durchschnitt dieser Curve mit dem Kreise vom Radius r gibt den gesuchten Glanzpunkt. Diese Linie ist also der geometrische Ort der Glanzpunkte aller aus demselben Punkte C als Mittelpunkt beschriebenen Kugeln.

Wie man bemerkt, schneidet die Linie den Kreis in vier Punkten D, D', D'', D'''. Der Punkt D' ist der Glanzpunkt für

den Hohlspiegel. D'' und D''' haben nur eine geometrische Bedeutung.

Taf. IX. Fig. 8. Die Curve lässt sich leicht auf folgende Art construiren. Man beschreibe einen Kreis um C mit dem Halbmesser $CA=b$, ziehe von A aus irgend eine Sehne AE, halbire sie durch die Senkrechte CF, so ist der Durchschnitt D der Linie BED mit CF ein Punkt der Curve; denn es ist offenbar $\angle CDA=\angle CDE$. Beschreibt man über CA als Durchmesser einen Kreis, so liegen auf ihm die Mittelpunkte aller aus A gezogenen Sehnen; man kann sich also dadurch die Arbeit erleichtern.

Man kann die Curve auch dadurch construiren, dass man um C irgend einen Kreis beschreibt, von den beiden Punkten A und B aus Tangenten an den Kreis legt, so geben die vier Durchschnittspunkte dieser vier Tangenten auch vier Curvenpunkte.

Als ich nun die Asymptote dieser Linie bestimmen wollte, fiel es mir auf, dass man noch keine Regel hatte, dieselbe aus der Polargleichung abzuleiten.

Die weitläufigen Entwickelungen, welche zur Bestimmung der Asymptote dieser Curve nach den früher bekannten Regeln erforderlich sind, veranlassten mich, darüber nachzudenken, ob es nicht möglich sei, die Asymptote direct aus der so einfachen Polargleichung herzuleiten. So kam ich auf die oben entwickelte Methode. Im siebenten Beispiele findet man sie auf die Glanzcurve angewandt.

Schliesslich wollen wir noch auf etwas aufmerksam machen. Vergleicht man nämlich die Figuren Taf. IX. Fig. 7. u. 8. miteinander, so findet man, dass sie in der Gestalt ziemlich übereinstimmen, namentlich, wenn man Taf. IX. Fig. 8. herumdreht, so dass B oben hin kommt. Beide Linien haben eine Schleife, einen Doppelpunkt, eine Asymptote, ferner eine gerade Linie, welche durch den Doppelpunkt geht und zur Asymptote parallel ist. Alles diess führt auf den Gedanken, dass beide Linien nahe verwandt, vielleicht ganz identisch sind.

Soll das Letztere stattfinden, so müssen ihre Gleichungen, auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, genau mit einander übereinstimmen. Wir wollen diess näher untersuchen. Zuerst transformiren wir die Gleichung der Focale auf rechtwinklige Coordinaten (Taf. IX. Fig. 10.), nehmen M als Anfangspunkt, MC als Abscissenaxe, MA als Ordinatenaxe; bezeichnen MA durch c, MC durch m, und $LC=LH=\varrho$, so haben wir zufolge der Construction dieser Linie (Siehe Seite 322.):

$$m-\varrho : c = x : c-y,$$

$$\varrho : y = LA : c,$$

$$\overline{LA}^2 = c^2 + (m-\varrho)^2;$$

$$c\varrho = y.LA = y\sqrt{c^2+(m-\varrho)^2};$$

Digitized by Google

$$c^2\varrho^2 = y^2(c^2 + (m-\varrho)^2);$$

$$m-\varrho = \frac{cx}{c-y}, \quad \varrho = m - \frac{cx}{c-y};$$

$$c^2\left(m - \frac{cx}{c-y}\right)^2 = y^2\left(c^2 + \frac{c^2x^2}{(c-y)^2}\right);$$

$$(m(c-y) - cx)^2 = y^2((c-y)^2 + x^2);$$

$$m^2(c-y)^2 - 2cm(c-y)x + c^2x^2 = y^2(c-y)^2 + y^2x^2;$$

$$m^2(c-y)^2 - 2cmx(c-y) + x^2(c+y)(c-y) - y^2(c-y)^2 = 0;$$

$$m^2(c-y) - 2cmx + x^2(c+y) - y^2(c-y) = 0;$$

$$m^2c - m^2y - 2cmx + cx^2 + x^2y - cy^2 + y^3 = 0;$$

$$y^3 - cy^2 + x^2y - m^2y + cx^2 - 2cmx + cm^2 = 0.$$

Wir wollen nun auch die Gleichung der Glanzcurve für das nämliche Coordinatensystem suchen.

Die Linie *CH* in Taf. IX. Fig. 8. entspricht offenbar der Linie *CJ* in Taf. IX. Fig. 7.; denn beide gehen durch den Doppelpunkt *C* und sind der Asymptote parallel. Die Linie *CH* dient uns daher als Abscissenaxe. In Taf. IX. Fig. 7. haben wir *AM* zur Ordinatenaxe angenommen; da wir aber in Taf. IX. Fig. 8. den dem Punkte *A* in Fig. 7. entsprechenden Punkt noch nicht kennen, so nehmen wir ihn zuerst willkührlich in *A'* an, bezeichnen den Abstand *CM'* von der Linie *A'M'* durch *l*, und wollen dieses *l* so bestimmen, dass beide Gleichungen möglichst nahe übereinstimmen.

Aus Taf. IX. Fig. 11. finden wir nun leicht

$$r\cos(\varphi+\delta) = l-x,$$

$$r\sin(\varphi+\delta) = y.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind r und φ zu bestimmen und in die Polargleichung der Glanzcurve einzuführen. Man findet

$$r^2 = y^2 + (l-x)^2,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi+\delta) = \frac{y}{l-x} = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-(l-x)\operatorname{tg}\delta}{l-x+y\operatorname{tg}\delta}.$$

Digitized by Google

$$\sin\varphi = \frac{y-(l-x)\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\cos\delta = \frac{y-(l-x)\operatorname{tg}\delta}{r}\cdot\cos\delta.$$

Setzt man nun zuerst diese Werthe von $\operatorname{tg}\varphi$ und $\sin\varphi$ in die Gleichung

$$r = \frac{2ab\sin\varphi}{(a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\operatorname{tg}\varphi};$$

so erhält man

$$r = \frac{\dfrac{2ab\cos\delta(y-(l-x)\operatorname{tg}\delta)}{r}}{(a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\dfrac{y-(l-x)\operatorname{tg}\delta}{l-x+y\operatorname{tg}\delta}},$$

$$r^2 = \frac{2ab\cos\delta(y-(l-x)\operatorname{tg}\delta)(l-x+y\operatorname{tg}\delta)}{(a-b)\sin\alpha(l-x+y\operatorname{tg}\delta)+(a+b)\cos\alpha(y-(l-x)\operatorname{tg}\delta)},$$

$$(y^2+(l-x)^2)\{(a-b)\sin\alpha(l-x+y\operatorname{tg}\delta)+(a+b)\cos\alpha(y-(l-x)\operatorname{tg}\delta\} = 2ab\cos\delta(y-(l-x)\operatorname{tg}\delta)(l-x+y\operatorname{tg}\delta).$$

Betrachten wir zuerst den Ausdruck in der grossen Klammer $\{\ldots.\}$ und bemerken, dass

$$(a-b)\sin\alpha = (a+b)\cos\alpha\operatorname{tg}\delta,$$

so haben wir

$$(a+b)\cos\alpha\{(l-x)\operatorname{tg}\delta+y\operatorname{tg}^2\delta+y-(l-x)\operatorname{tg}\delta\} = (a+b)\cos\alpha.y(1+\operatorname{tg}^2\delta)$$

und weil

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}},$$

so ist

$$1+\operatorname{tg}^2\delta = \frac{1}{\cos^2\delta},$$

$$\frac{(a+b)\cos\alpha}{\cos^2\delta}y(y^2+(l-x)^2) = 2ab\cos\delta(y(l-x)-(l-x)^2\operatorname{tg}\delta+y^2\operatorname{tg}\delta-y(l-x)\operatorname{tg}^2\delta),$$

$$\frac{(a+b)\cos\alpha}{2ab\cos^3\delta}(y^3+y(l-x)^2) = y(l-x)(1-\operatorname{tg}^2\delta)+(y^2-(l-x)^2)\operatorname{tg}\delta.$$

Bezeichnen wir der Kürze halber den ersten Coefficienten

$$\frac{(a+b)\cos\alpha}{2ab\cos^3\delta}$$

Digitized by Google

durch f, so ist

$$fy^3 + fy(l-x)^2 = y(l-x)(1-\mathrm{tg}^2\delta) + y^2\mathrm{tg}\delta - (l-x)^2\mathrm{tg}\delta,$$

$$fy^3 + fyl^2 - 2flyx + fyx^2$$
$$= ly(1-\mathrm{tg}^2\delta) - xy(1-\mathrm{tg}^2\delta) + y^2\mathrm{tg}\delta - l^2\mathrm{tg}\delta + 2lx\mathrm{tg}\delta - x^2\mathrm{tg}\delta,$$

$$y^3 - \frac{\mathrm{tg}\delta}{f}y^2 + x^2y + \left(\frac{1-\mathrm{tg}^2\delta}{f} - 2l\right)xy + \left(l^2 - \frac{l(1-\mathrm{tg}^2\delta)}{f}\right)y$$
$$+ \frac{\mathrm{tg}\delta}{f}x^2 - \frac{2l\mathrm{tg}\delta}{f}x + \frac{l^2\mathrm{tg}\delta}{f} = 0.$$

Vergleichen wir nun diese Gleichung Glied für Glied mit der Gleichung der Focale (Seite 329.), so findet sich:

$$\frac{\mathrm{tg}\delta}{f} = c, \quad \frac{1-\mathrm{tg}^2\delta}{f} - 2l = 0;$$

$$\frac{l(1-\mathrm{tg}^2\delta)}{f} - l^2 = m^2; \quad \frac{2l\mathrm{tg}\delta}{f} = 2cm;$$

$$\frac{l^2\mathrm{tg}\delta}{f} = cm^2.$$

Aus

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\delta}{f} - 2l = 0$$

finden wir

$$l = \frac{1-\mathrm{tg}^2\delta}{2f}.$$

Diesen Werth von l in die folgende Gleichung gesetzt, gibt

$$m^2 = \frac{(1-\mathrm{tg}^2\delta)^2}{2f^2} - \frac{(1-\mathrm{tg}^2\delta)^2}{4f^2} = \frac{(1-\mathrm{tg}^2\delta)^2}{4f^2},$$

$$m = \frac{1-\mathrm{tg}^2\delta}{2f},$$

also $m = l$.

Setzt man in den beiden letzten Ausdrücken

$$m = l \text{ und } \frac{\mathrm{tg}\delta}{f} = c,$$

so werden sie identisch.

Da also beide Gleichungen auf's Genauesto übereinstimmen, so geht daraus hervor, dass die Focale und die Glanzcurve eine und die nämliche Linie sind.

Digitized by Google

Es ist nun

$$f=\frac{(a+b)\cos\alpha}{2ab\cos^3\delta},$$

also

$$c=\frac{\operatorname{tg}\delta}{f}=\frac{2ab\sin\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha},$$

$$m=l=\frac{ab\cos^3\delta(1-\operatorname{tg}^2\delta)}{(a+b)\cos\alpha}.$$

Aus diesen Werthen von c und m können wir auch den Winkel δ wegbringen:

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\alpha,\quad \cos\delta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}},\quad \sin\delta=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}},$$

$$c=\frac{ab(a^2-b^2)\sin2\alpha}{(a^2+b^2+2ab\cos2\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

$$m=\frac{ab\,(2ab+(a^2+b^2)\cos2\alpha)}{(a^2+b^2+2ab\cos2\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Vergleicht man den Werth von c mit dem früher gefundenen Werthe von NO in Taf. IX. Fig. 8. (Siehe Seite 326.), so findet man, dass sie einander gleich sind, dass also N der Punkt ist, der dem Punkte A in Taf. IX. Fig. 7. entspricht. Auch folgt nun $CO=m$.

Seite 322. haben wir eine Construction der Focale angegeben; diese können wir jetzt auch auf die Glanzcurve anwenden. Zieht man nämlich Taf. IX. Fig. 8. durch den Punkt N irgend eine Gerade BNB', welche die Linie CH in M schneidet und macht man

$$MB=MB'=MC,$$

so sind B und B' Curvenpunkte. Hieraus lässt sich aber leicht umgekehrt vermittelst zweier gegebener Punkte A und B der Punkt N finden. Denn halbirt man die Linien AC, BC durch die Senkrechten JK, LM, welche CH in K und M schneiden, so gibt jetzt der Durchschnitt der Linien AK und BM den gesuchten Punkt N, weil offenbar

$$AK=KC \text{ und } MB=MC.$$

Es folgt daraus $NO=c=g$ = dem Abstand der Asymptote vom Pole.

Dieser Beweis ist viel anschaulicher als der oben gegebene.

Digitized by Google

Für c und m erhalten wir die Ausdrücke:

$$c=\frac{2ab\sin\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha},$$

$$m=\frac{ab\cos^3\delta(1-\mathrm{tg}^2\delta)}{(a+b)\cos\alpha};$$

wo

$$\mathrm{tg}\delta=\frac{a-b}{a+b}\mathrm{tg}\alpha.$$

Die beiden Grössen c und m charakterisiren die Focale vollständig; man kann sie leicht aus den gegebenen Grössen a, b und α der Glanzcurve berechnen. Wollte man aber umgekehrt aus den gegebenen Grössen c, m der Focale die entsprechenden a, b und α der Glanzcurve berechnen, so hat man dafür nur zwei Gleichungen; man kann daher eine der drei Grössen a, b, α willkührlich annehmen und dann die zwei andern berechnen.

Dividiren wir den Ausdruck von c durch den von m, so wird Taf. IX. Fig. 8.

$$\frac{c}{m}=\frac{2\sin\delta}{(1-\mathrm{tg}^2\delta)\cos\delta}=\frac{2\mathrm{tg}\delta}{1-\mathrm{tg}^2\delta},$$

daher

$$\mathrm{tg}.2\delta=\frac{c}{m}=\frac{NO}{CO}.$$

Also ist

$$\angle NCO=2\delta,\quad \angle NCG=\angle GCH.$$

Ist daher c und m gegeben, so ist Winkel δ nicht mehr willkührlich.

Setzen wir $\frac{b}{a}=n$, so wird

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1-n}{1+n}\mathrm{tg}\delta.$$

Nehmen wir für n irgend einen Werth an, so lässt sich Winkel α berechnen. Man hätte aber auch Winkel α willkührlich annehmen und das zugehörige n berechnen können:

$$n=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\delta}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\delta}\quad\text{oder}\quad n=\frac{\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\alpha+\delta)}.$$

Hat man nun n und Winkel α bestimmt, so kann man jetzt a und b berechnen:

Digitized by Google

$$b = \frac{c(1+n)\cos\alpha}{\cos\delta.\sin 2\delta},$$

oder auch

$$b = \frac{c\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\delta)\sin 2\delta},$$

und endlich $a = \frac{b}{n}$.

Wir können aber auch Alles durch eine einfache Construction erhalten. Tragen wir nämlich Taf. IX. Fig. 8. nur den willkührlich angenommenen Werth von α zu beiden Seiten der Linie CG, also

$$\angle \mathfrak{A}CG = \angle \mathfrak{B}CG,$$

so ist $C\mathfrak{A}$ das neue b und $C\mathfrak{B}$ das neue a. Ziehen wir die Linien $\mathfrak{A}D$ und $\mathfrak{B}D$, so ist auch

$$\angle \mathfrak{A}DC = \angle \mathfrak{B}DC.$$

Wir könnten daher auch in $\mathfrak{B}$ das Licht anbringen, so ist wiederum D der Glanzpunkt für das in $\mathfrak{A}$ befindliche Auge.

Die Glanzcurve enthält daher nicht nur die Glanzpunkte für alle concentrischen Kugeln, sondern sie erlaubt auch, dass, wenn sie für eine bestimmte Stellung des Lichtes und Auges gegen den Mittelpunkt der Kugel construirt ist, einen jener Punkte willkührlich auf ihr anzunehmen; dann ist aber die Lage des andern bestimmt.

Digitized by Google

XIII.

Fragen aus der Mechanik.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim.

I. Ueber die Kurve, die ein Hund beschreibt, der seinem Herrn folgt.

Es sei der Weg, überhaupt die Bewegung des Herrn völlig bekannt; zugleich möge vorausgesetzt werden, dass beide Bewegungen in derselben Ebene vor sich gehen. Es seien am Ende der Zeit t: x, y die Koordinaten des Ortes des Herrn, u, v des Hundes, so ist y als Funktion von x bekannt, während beide bekannte Funktionen von t sind. v ist eine Funktion von u und diess letztere wieder von x, also auch von t. Sei nun

$$y=\varphi(x), \qquad (1)$$

worin $\varphi(x)$ bekannt ist. Sei ferner die Geschwindigkeit $\frac{\partial s}{\partial t}$ des Herrn in jedem Augenblicke mt mal so gross als die Geschwindigkeit $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ des Hundes, so ist

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\frac{\partial x}{\partial t} = m\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (2)$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\frac{\partial x}{\partial u} = m\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}. \qquad (3)$$

Digitized by Google

Die Geschwindigkeit des Hundes am Ende der Zeit t ist nach der Linie gerichtet, die von (x,y) nach (u,v) geht. Diese Linie macht mit der Axe der x einen Winkel, dessen Cosinus gleich

$$\frac{x-u}{\sqrt{(y-v)^2+(x-u)^2}},$$

dessen Sinus

$$\frac{y-v}{\sqrt{(y-v)^2+(x-u)^2}},$$

so dass

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial t}\cdot\frac{y-v}{\sqrt{(y-v)^2+(x-u)^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial t}\cdot\frac{x-u}{\sqrt{(y-v)^2+(x-u)^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial u}=\frac{y-v}{x-u},$$

oder

$$(x-u)\frac{\partial v}{\partial u}=y-v. \qquad (4)$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass die Linie von (x,y) nach (u,v) Tangente ist im Punkte (u,v) an die Kurve des Hundes.

Man zieht aus (4):

$$(x-u)\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}+\frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}-1\right)=\varphi'(x)\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial v}{\partial u},$$

d. h.

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{(x-u)\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}}{\varphi'(x)-\frac{\partial v}{\partial u}} \qquad (5)$$

Durch Verbindung der Gleichungen (3) und (5) erhält man:

$$(x-u)\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=m\left[\varphi'(x)-\frac{\partial v}{\partial u}\right]\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2},$$

oder

$$(x-u)\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}=m\left[\varphi'(x)-\frac{\partial v}{\partial u}\right]\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}. \qquad (6)$$

Digitized by Google

Die Gleichung (4) ist auch

$$\varphi(x) - v = (x-u)\frac{\partial v}{\partial u}. \qquad (7)$$

Man eliminire nun zwischen (6) und (7) die Grösse x, so erhält man eine Differenzialgleichung in v und u, aus der die eine dieser Grössen durch die andere ausgedrückt werden kann. Diese Gleichung ist die Differenzialgleichung der Kurve des Hundes. Vermittelst (2) kann man sodann u, v als Funktionen von t bestimmen und vermittelst (7) die zu einander gehörigen x und u erkennen.

Wir wollen den besonderen Fall betrachten, in dem der Herr eine gerade Linie beschreibt. Nehmen wir sie als Axe der x an, so ist in (1) $\varphi(x)=0$, also sind die Gleichungen (6) und (7):

$$-v = (x-u)\frac{\partial v}{\partial u}, \qquad (7')$$

$$(x-u)\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = -m\frac{\partial v}{\partial u}\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}. \qquad (6')$$

Hieraus folgt:

$$v\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = m\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}. \qquad (8)$$

Um (8) zu integriren setze ich

$$\frac{\partial v}{\partial u} = p,$$

also

$$\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} = p\frac{\partial p}{\partial v},$$

so ist aus (8):

$$vp\frac{\partial p}{\partial v} = mp^2\sqrt{1+p^2},$$

$$v\frac{\partial p}{\partial v} = mp\sqrt{1+p^2};$$

woraus

$$\int\frac{\partial p}{p\sqrt{1+p^2}} = m\int\frac{\partial v}{v},$$

$$l\left(\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}\right) = l.(Cv^m),$$

Digitized by Google

worin C eine willkührliche Konstante. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}=Cv^m,$$

$$p=\frac{2Cv^m}{1-C^2v^{2m}};$$

ferner

$$u=\int\frac{\partial v}{p}=\int\frac{1-C^2v^{2m}}{2Cv^m}\,\partial v=\frac{v^{1-m}}{2(1-m)C}-\frac{Cv^{m+1}}{2(m+1)}+C',$$

wo C' eine neue willkührliche Konstante.

Die Gleichung der Kurve des Hundes ist also

$$u=C'+\frac{v^{1-m}}{2C(1-m)}-\frac{Cv^{m+1}}{2(m+1)}, \qquad (9)$$

vorausgesetzt, dass nicht $m=1$. In diesem letztern Falle fände man:

$$u=C'+\frac{l(v)}{2C}-\frac{Cv^2}{4}. \qquad (10)$$

In diesem letztern Falle würde die Kurve des Hundes der Axe der x (oder u) sich nähern, ohne sie zu erreichen. Im Allgemeinen ist also nothwendig $m<1$.

Um einen besondern Fall festzustellen, wollen wir annehmen, dass im Anfange der Zeit t:

$$x=0,\ u=0,\ v=a$$

sei, so folgt aus (7′) im Anfang $\frac{\partial u}{\partial v}=0$, d. h.

$$0=1-C^2a^{2m},$$

und aus (9):

$$0=C'+\frac{a^{1-m}}{2C(1-m)}-\frac{Ca^{m+1}}{2(m+1)}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$C=\pm\frac{1}{a^m},$$

und aus der zweiten:

Digitized by Google

$$0 = C' \mp \frac{a}{2(1-m)} \pm \frac{a}{2(1+m)} = C' \mp \frac{m}{m^2-1},$$

$$C' = \mp \frac{am}{1-m^2}.$$

Demnach ist in diesem Falle die Gleichung der Kurve des Hundes:

$$u = \mp \frac{am}{1-m^2} \mp \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)} \mp \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)}, \qquad (9')$$

wo die obern und untern Zeichen zusammen gehören.

Nimmt man an, dass die Bewegung nach der Richtung der positiven x geschah, so müssen die untern Zeichen gewählt werden, und man hat:

$$u = \frac{am}{1-m^2} + \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)} - \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)}. \qquad (9'')$$

Die Zusammenkunft geschieht in dem Punkte, dessen Abscisse $\frac{am}{1-m^2}$ ist, auf der Axe der x. Gesetzt die Bewegung des Herrn sei gleichförmig gewesen, dessen Geschwindigkeit $= \alpha$, so ist

$$x = \alpha t.$$

Die Bewegung des Hundes ist ebenfalls gleichförmig; seine Geschwindigkeit $\frac{\alpha}{m}$. Um u, v als Funktionen von t zu erhalten, hat man

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1 - C^2 v^{2m}}{2Cv^m} = \frac{1 - \frac{v^{2m}}{a^{2m}}}{-2\frac{v^m}{a^m}} = \frac{a^{2m} - v^{2m}}{-2a^m v^m},$$

also aus (7'):

$$\frac{v(a^{2m} - v^{2m})}{2a^m v^m} = \left(\alpha t - \frac{am}{1-m^2} - \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)} + \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)}\right),$$

woraus v als Funktion von t zu bestimmen ist. Aus (9'') ergiebt sich sodann auch u als Funktion von t.

Für $x = \frac{am}{1-m^2} = \alpha t$ ist $t = \frac{am}{\alpha(1-m^2)}$, also

$$\frac{v(a^{2m} - v^{2m})}{2a^m v^m} = \left[\frac{am}{1-m^2} - \frac{am}{1-m^2} - \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)} + \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)}\right]$$

$$= \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)} - \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)},$$

woraus $v=0$, so dass also wirklich das Zusammentreffen Statt hat und zwar am Ende der Zeit $\frac{am}{a(1-m^2)}$. Der Weg des Hundes ist

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2}\partial v=\int\sqrt{1+\left(\frac{1-C^2v^{2m}}{2Cv^m}\right)^2}\,\partial v=\int\frac{1+C^2v^{2m}}{2Cv^m}\partial v$$
$$=\frac{v^{1-m}}{2C(1-m)}+\frac{Cv^{m+1}}{2(m+1)}+C_1=-\frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)}-\frac{v^{m+1}}{2(m+1)a^m}+C_1,$$

und folglich von $v=a$ bis $v=0$:

$$\frac{a}{2(1-m)}+\frac{a}{2(1+m)}=\frac{a}{1-m^2},$$

wie natürlich, da seine Geschwindigkeit $\frac{a}{m}$. Uebrigens ist das Letztere richtig, welches auch die Art der Bewegung des Herrn gewesen.

Da im Anfange der Bewegung (die Gleichung (9″) vorausgesetzt) $\frac{\partial v}{\partial u}=\frac{1}{0}$, so ist die Axe der y Tangente der Kurve. Im Punkte $u=\frac{am}{1-m^2}$ ist $\frac{\partial v}{\partial u}=0$, also dort die Axe der x Tangente an die Kurve.

Die allgemeine Form der Gleichung der Kurve ist eigentlich

$$u^2=\left(\frac{am}{1-m^2}+\frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)}-\frac{v^{1-m}a^m}{2(1-m)}\right)^2,$$

und es sind also zwei Zweige, die beiderseitig mit

$$u=\frac{am}{1-m^2}\quad\text{oder}\quad-\frac{am}{1-m^2}$$

enden. Die Kurve (9″) geht nur von $v=a$ bis $v=0$.

II. Ueber den vortheilhaftesten Abhang eines Kanals, an dessen Ende das Wasser einen industriell zu benutzenden Fall bilden soll.

Wenn Wasser in einem offenen Kanale fliesst, der einen gleichförmigen Fall hat und dessen Durchschnitt überall derselbe

Digitized by Google

ist, so findet man die gleichförmige Geschwindigkeit v, die es annimmt, durch die Gleichung:

$$\frac{Ai}{C} = \alpha v + \beta v^2$$

worin A die Fläche des Schnitts, C sein benetzter Umfang, i der Fall auf jeden Meter, α, β zwei Konstanten, die bestimmt wurden zu

$$\alpha = 0{,}00004445, \quad \beta = 0{,}0003093.$$

(Man sehe: Navier, Resumé des leçons sur l'application de la Mécanique. 2me Partie. § 122.)

Gesetzt nun, es befinde sich in einem Flusse eine Insel und der Fluss habe Wasser genug, dass man die Kraft desselben industriell anwenden könne. Man wolle zu diesem Ende durch die ganze Länge der Insel einen Kanal graben, an dessen Ende das Wasser einen kleinen Fall bilden soll, dessen Kraft nun angewendet werde. Es ist nun ganz klar, dass man den grössten Fall erhalten würde, wenn man den Kanal horizontal anlegte, allein in diesem Falle würde kein Wasser durch denselben fliessen. Dagegen würde die grösste Masse Wassers durch denselben fliessen, wenn man ihm dieselbe Neigung gäbe, die der Fluss hat; in diesem Falle hätte man aber keinen Fall. Zwischen diesen beiden Aeussersten nun liegt der Fall, da man bei grösstmöglichem Falle die grösstmögliche Masse Wassers erhält.

Stelle Taf. X. Fig. 3. $AB = CD$ die (horizontal gemessene) Länge L der Insel (des Kanals) CE dar; sei i dessen Fall auf den Meter, so ist $DE = Li$; endlich sei $AC = H$ der Unterschied der Niveaux des Wassers an den Enden der Insel, so ist $BE = H - Li$. Bedeuten A und C was oben, so ist die Geschwindigkeit des Wassers im Kanal gegeben durch

$$\frac{Ai}{C} = \alpha v + \beta v^2, \quad i = \frac{C(\alpha v + \beta v^2)}{A}.$$

Die Menge Wassers, die in einer Sekunde durch den Schnitt des Kanals fliesst, ist Av; also, wenn ϱ das Gewicht der Kubikeinheit des Wassers ist, deren Gewicht $A\varrho v$. Diese Masse fällt durch die Höhe $H - Li$, kann also, unten angekommen, die Arbeit

$$A\varrho v(H - Li)$$

verrichten, wenn man darauf nicht achtet, dass sie schon eine anfängliche Geschwindigkeit besitzt. Achtet man darauf, so muss man obiger Grösse noch

$$A\varrho v \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{A\varrho v^3}{2g}$$

zufügen. Alsdann ist die Arbeit, die in der Sekunde durch das fallende Wasser verrichtet werden kann:

$$A\varrho r(H-Li)+\frac{A\varrho v^3}{2g}=AH\varrho v-\frac{AL\varrho C(\alpha v+\beta v^2)v}{A}+\frac{A\varrho v^3}{2g}$$
$$=AH\varrho v-L\varrho C\alpha v^2-L\varrho C\beta v^3+\frac{A\varrho v^3}{2g},$$

welche Grösse nun ein Maximum sein soll. Man findet:

$$AH-2LC\alpha v-3LC\beta v^2+\frac{3Av^2}{2g}=0,$$
$$v=\frac{2LCg\alpha+\sqrt{4L^2C^2g^2\alpha^2-2AHg(3A-6LC\beta g)}}{3A-6LC\beta g}.$$

Hätte man $\frac{Av^3\varrho}{2g}$ vernachlässigt, so hätte sich ergeben:

$$v=-\frac{\alpha}{3\beta}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{9\beta^2}+\frac{AH}{3LC\beta}}.$$

Kennt man v, so findet sich:

$$i=\frac{C}{A}(\alpha v+\beta v^2),$$

wodurch nun der vorteilhafteste Abfall gefunden ist.

III. Ueber das Princip des Telluriums.

Eine Kugel drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω u
eine, ausser ihr liegende Axe AB (Taf. X. Fig. 4.), und mit d
Winkelgeschwindigkeit ε zugleich um eine durch ihren Mittelpun
gehende, mit AB parallele Axe CD, und es sei die Richtung v
ε der von ω entgegengesetzt; man verlangt die Lage einer bel
bigen (festen) durch den Mittelpunkt gehenden Linie EF a
Ende der Zeit t.

Man nehme AB als feste Axe der z an und lege durch
zwei Axen der x und y, die anfängliche Richtung von AC ge
die Richtung der positiven Axe der x an, und die positive A
der y sei so gewählt, dass die Richtung der Geschwindigkeit
von der positiven Axe der x unmittelbar zur positiven Axe d
y gehe. Durch den Mittelpunkt der Kugel lege man eben so e
in ihr festes Koordinatensystem, von dem OD die positive A
der z_1 und, in der anfänglichen Lage, die Axen der x_1 und
den vorigen (der x und y) parallel seien. EF sei so, dass s

Digitized by Google

im Anfange mit den festen Axen in A die Winkel α, β, γ mache, welche Winkel sie also in diesem Augenblick auch mit den durch O gehenden Axen macht.

Offenbar werden wir unsere Aufgabe auch dadurch lösen können, dass wir zuerst, während einer Zeit t, der Kugel bloss die Bewegung um AB, und dann während einer eben solchen Zeit bloss die um CD ertheilen. Lassen wir also zuerst die Kugel sich bloss um AB drehen und suchen wir am Ende der Zeit t die Lage der Axen in O in Bezug auf die in A. Die beiden Axen der z sind noch immer parallel. Die Axe der x_1 (durch O) macht mit der Axe der x (durch A) den Winkel ωt, mit der der y den Winkel $\frac{\pi}{2} - \omega t$, mit der der z den Winkel $\frac{\pi}{2}$; die Axe der y_1 macht mit der der x den Winkel $\frac{\pi}{2} + \omega t$, mit der der y den Winkel ωt und mit der der z den Winkel $\frac{\pi}{2}$. Bei dieser Drehung sind also die durch O gehenden Axen beweglich gewesen, als feste Linien in der Kugel.

Lassen wir nun die Kugel sich um CD während einer Zeit t drehen und während dieser Zeit die Axen der x_1, y_1, z_1 fest (als feste Linien im Raume, unbeirrt durch die Bewegung der Kugel), so wollen wir die Lage von EF in Bezug auf die durch O gehenden Axen am Ende der neuen Zeit t suchen, an deren Anfang natürlich EF mit diesen Axen die Winkel α, β, γ machte. EF macht mit CD ständig den Winkel γ; legt man also durch EF und CD (die Axe der z_1) eine Ebene und achtet auf die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Ebene der $x_1 y_1$, so macht diese Durchschnittslinie am Ende der Zeit t mit der Axe der x_1 den Winkel $\alpha_1 - \varepsilon t$, mit der Axe der y_1 den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \varepsilon t$, mit der der z_1 den Winkel $\frac{\pi}{2}$, wenn α_1 der anfängliche Winkel mit der Axe der x_1 ist. α_1 ist zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1 \sin\gamma, \quad \cos\beta = \sin\alpha_1 \sin\gamma;$$

d. h.

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}. \qquad (J)$$

Für unsern Zweck wäre es vollkommen genug, $\alpha_1 = 0$ zu setzen, in welchem Falle $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$ wäre. Doch wollen wir die Allgemeinheit beibehalten.

Sind nun α', β', γ' die Winkel, welche die EF mit den durch O gehenden Axen am Ende der Zeit t macht, so hat man

Digitized by Google

$$\cos\alpha' = \cos(\alpha_1 - \varepsilon t).\sin\gamma,\quad \cos\beta' = \sin(\alpha_1 - \varepsilon t).\sin\gamma,\quad \gamma' = \gamma. \qquad (2)$$

Man wird nun, wenn man beide erhaltenen Resultate zusammen nimmt, leicht einsehen, dass die mehr genannte Durchschnittslinie mit den Axen der x, y, z folgende Winkel macht am Ende der Zeit t (während welcher beide Bewegungen zugleich geschahen):

mit der Axe der x den Winkel: $\omega t + \alpha_1 - \varepsilon t = \alpha_1 + (\omega - \varepsilon)t$,

mit der Axe der y den Winkel: $\frac{\pi}{2} - \omega t - (\alpha_1 - \varepsilon t) = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - (\omega - \varepsilon)t$,

mit der Axe der z den Winkel: $\frac{\pi}{2}$.

Sind also jetzt α'', β'', γ'' die Winkel der Linie EF mit den drei Axen durch A, so ist:

$$\cos\alpha'' = \cos(\alpha_1 + (\omega - \varepsilon)t).\sin\gamma,\ \cos\beta'' = \sin((\omega - \varepsilon)t + \alpha_1).\sin\gamma,\ \gamma'' = \gamma. \qquad (3)$$

Für den besondern Fall, dass $\omega = \varepsilon$, wie diess beim Tellurium der Fall ist, folgt aus (3):

$$\cos\alpha'' = \cos\alpha_1 \sin\gamma,\quad \cos\beta'' = \sin\alpha_1 \sin\gamma,\quad \gamma'' = \gamma; \qquad (4)$$

d. h. wenn man (4) mit (1) vergleicht:

$$\alpha'' = \alpha,\quad \beta'' = \beta,\quad \gamma'' = \gamma; \qquad (5)$$

oder die Linie EF bleibt beständig mit sich selbst parallel.

Dreht also eine Kugel sich um die Axe AB und zugleich um die mit ihr parallele CD, sind die beiderseitigen Winkelgeschwindigkeiten gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, so bleibt jeder durch O gehende Durchmesser der Kugel beständig mit sich parallel. Diess ist nun das Princip des Telluriums. Die Einrichtung desselben ist übersichtlich folgende:

Eine Stange AB (Taf. X. Fig. 5.) ist um MN drehbar. An MN ist ein horizontales, nach unten gezähntes Rädchen G fest. In dieses greift ein vertikales Rädchen C ein, das an der Stange CD ist, welche letztere in E und F an AB befestigt, sonst aber ganz frei ist. In D ist ein vertikales Rädchen, ebenfalls fest an CD und ganz gleich dem in C, welches dann in das horizontale H eingreift, das gleich G, aber innerhalb der Rädchen C und D ist.

Die Axe dieses Rädchens, die an demselben fest ist, trägt den (Halb-) Ring KL, an dem, an der (schiefen) Axe KL eine Kugel ist. Man sieht leicht ein, dass diese Vorrichtung die obigen Voraussetzungen verwirklicht, so dass KL bei der Bewegung von AB um MN, wobei also die Kugel sich um MN und HJ dreht, die Linie KL z. B. (die Erdaxe, wenn die Kugel die Erde in ihrer Bewegung um die Sonne vorstellt und KL um $23\frac{1}{2}^0$ gegen MN geneigt ist) immer mit sich parallel bleibt, was bekanntlich mit der Erdaxe der Falle ist.

Digitized by Google

XIV.

Ueber Curven zweiter und dritter Ordnung.

Von dem

Herrn Doctor T. Clausen,

Observator an der Sternwarte zu Dorpat.

Der elegante Pascal'sche Satz in Beziehung auf Curven zweiter Ordnung veranlasste mich einen ähnlichen in Beziehung auf Curven dritter Ordnung aufzusuchen. Bei diesen letztern gestalten sich aber die Gleichungen viel verwickelter; so dass vermuthlich mehrere solche Sätze existiren, die man erlangt, wenn man die Gleichung der Curve auf verschiedene Weise behandelt; wobei man bei Curven zweiter Ordnung auf einerlei Resultat kömmt, bei denen dritter Ordnung aber verschiedene Resultate findet. Ich gelangte durch eine völlig gleiche Behandlungsweise zu dem Pascal'schen Satze und zu einem, wie ich glaube, neuen einfachen Satze in Beziehung auf Curven dritter Ordnung, der mir der Veröffentlichung nicht unwerth schien, weshalb ich ihn mittheile.

1. Zuerst suche ich die allgemeine Gleichung einer Curve, die durch vier gegebene Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 geht. Zieht man durch zwei dieser Punkte P_1 und P_2 eine Gerade und betrachtet diese als Axe der x; und setzt man den Anfangspunkt der Coordinaten im Punkte A: so hat man für die beiden Punkte

$$x = AP_1 = a, \quad y = 0;$$

und

$$x = AP_2 = a', \quad y = 0.$$

Es sei $K=0$ die Gleichung für die Curve. Man sieht leicht, dass K, um den beiden Werthen zu genügen, von der Form sein müsse:

Digitized by Google

$$K=(x-a)(x-a')K_1+yK_2;$$

in welcher Formel K_1 und K_2 andere Polynome von x und y oder Constanten bezeichnen. Es seien nun ferner die Gleichungen für die Geraden, die durch P_1 und P_3, P_2 und P_4 gehen:

$$l_1=x-a+\lambda y=0;\quad l_2=x-a'+\lambda' y=0;$$

sei ferner $l=y$, so hat man:

$$x-a=l_1-\lambda y,\quad x-a'=l_2-\lambda' y;$$

(λ und λ' bedeuten Constanten) also:

$$K=l_1.l_2.K_1+l.K_3 \ldots. \qquad (1)$$

worin K_3 ein ähnliches Polynom als K_2 bezeichnet. Auf ganz ähnliche Weise findet man, wenn man die Gleichung für die Gerade, die durch P_3 und P_4 gezogen ist, $l_3=0$ setzt:

$$K=l_1.l_2.K_4+l_3.K_5 \ldots.. (2)$$

Subtrahirt man nun die Gleichungen (1) und (2) von einander, so findet sich:

$$l_1.l_2.(K_1-K_4)=l_3.K_5-l.K_3.$$

Da in dem Durchschnitte der Geraden l und l_3*) weder l, noch l_3 verschwinden, so muss K_1-K_4 in diesem Punkte $=0$ sein. Es muss daher

$$K_1-K_4=l.K_6-l_3.K_7$$

sein, wo wiederum K_6 und K_7 Polynome von x und y bezeichnen. Demnach ist:

$$K_1-l.K_6=K_4-l_3.K_7=K_8,$$

wodurch die Gleichungen (1) und (2) sich verwandeln in:

$$K=l_1.l_2.K_8+l.l_1.l_2.K_6+l.K_3=l_1.l_2.K_8+l.(K_3+l_1.l_2.K_6),$$

$$K=l_1.l_2.K_8+l_1.l_2.l_3.K_7+l_3.K_5=l_1.l_2.K_8+l_3(K_5+l_1.l_2.K_7).$$

Demnach ist:

$$l(K_3+l_1.l_2.K_6)=l_3.(K_5+l_1.l_2.K_7).$$

Es muss also sein:

---

*) Kürze halber werde ich im Folgenden, wenn kein Missverständnisse zu befürchten ist, statt: die Gerade deren Gleichung $L=0$, schlechtweg die Gerade L schreiben.

Digitized by Google

$$K_3 + l_1 . l \; . K_6 = l_3 . K_9,$$

$$K_5 + l_1 . l_2 . K_7 = l . K_9;$$

oder endlich:

$$K = l_1 . l_2 . K_8 + l . l_3 . K_9 \; ..... \; (3)$$

2. Bei Curven zweiter Ordnung werden die Grössen K_8 und K_9 Constanten. Nimmt man nun zwei andere Punkte P_5, P_6 auf der Curve an, und setzt die Gleichung der Geraden, die durch P_3 und P_5 geht: $l_4 = 0$; der Geraden, die durch P_5 und P_6 geht: $l_5 = 0$; und der Geraden, die durch P_6 und P_4 geht: $l_6 = 0$; so hat man auf ganz ähnliche Art in Beziehung auf die Punkte P_3, P_5, P_6, P_4 folgende Gleichung für die Curve:

$$K = k . l_4 . l_6 + k' . l_5 . l_3 \; ..... \; (4)$$

wo k und k' Constanten bezeichnen. Eliminirt man nun aus den Gleichungen (3) und (4) l_3, so erhält man:

$$(k' . l_5 - K_9 . l) K = k' . K_8 . l_1 . l_2 . l_5 - k . K_9 . l . l_4 . l_6 \; ...(5)$$

Da k, k', K_8, K_9 Constanten sind, so wird

$$k' . l_5 - K_9 . l = l_7 = 0$$

die Gleichung einer Geraden sein. Die neun Durchschnitte der drei Geraden l_1, l_2 und l_5 mit den drei anderen Geraden l, l_4 und l_6 liegen also, da in ihnen die beiden Glieder der Gleichung (5) verschwinden, entweder auf der Curve, oder auf der Geraden l_7. Nun aber schneidet die Gerade l_1 die Geraden l und l_6 auf der Curve. Sie kann die Curve nur in zweien Punkten schneiden, also muss der Durchschnitt mit l_4, da er von den beiden andern im Allgemeinen verschieden ist, auf der Geraden l_7 liegen. Eben so müssen die Durchschnitte l_2 und l_6, l_5 und l auf derselben Geraden liegen. Dieses ist der Pascal'sche Satz.

3. Bei Curven dritter Ordnung werden die Grössen $K_8 . K_9$ in der Formel (3) nicht über die erste Ordnung sein; eine derselben muss wenigstens vom ersten Grade sein, da sonst die Curve nur von zweiter Ordnung wäre. In dem Folgenden wird angenommen, dass beide die Gleichungen von Geraden darstellen, dass also die Gleichung für die Curve von folgender Form sein wird:

$$K = l . l_1 . l_2 + l_3 . l_4 . l_5 ..... (6)$$

Die Gerade l gehe durch die Punkte P_1, P_4, P_7 (Taf. VII. Fig. 5.); l_1 durch die Punkte P_2, P_5, P_8; l_3 durch P_1, P_2, P_3; l_4 durch P_4, P_5, P_6; so sieht man leicht, dass l_2 durch die Punkte P_3, P_6, P_9; und dass l_5 durch P_7, P_8, P_9 geht. Wenn man also durch vier in der Curve liegende Punkte P_1, P_2, P_4, P_5 die vier Geraden zieht: 1) $P_1 P_2$, die die Curve überdies in P_3 schneidet; 2) $P_4 P_5$, die die Curve in P_6 schneidet;

3) $P_1 P_4$, die die Curve noch in P_7 schneidet; 4) $P_2 P_5$, die die Curve noch in P_8 schneidet: so schneiden die Geraden $P_3 P_6$ und $P_7 P_8$ die Curve in demselben Punkte P_9.

Es werden die Geraden l und l_3 beibehalten, oder die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_7, und vier andere Gerade gezogen: l'_1 durch die Punkte P_2, P'_5, P'_8; l'_2 durch P_3, P'_6, P'_9; l'_4 durch P_4, P'_5, P'_6; l'_5 durch P_7, P'_8, P'_9. Alle diese Punkte liegen auf der Curve. Statt des Vierecks P_5, P_6, P_8, P_9 entsteht also ein neues P'_5, P'_6, P'_8, P'_9, dessen verlängerte Seiten die Curve in denselben Punkten, wie die verlängerten Seiten des erstern schneiden. Da beide in der Curve eingeschrieben sind, so hat man ebenfalls für das letztere:

$$K = l.l'_1.l'_2 + l_3.l'_4.l'_5 \ldots\ldots (7).$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (6) und (7) l_3, so ergiebt sich:

$$(l'_4.l'_5 - l_4.l_5)K = l\{l_1.l_2.l'_4.l'_5 - l'_1.l'_2.l_4.l_5\}.$$

K oder die Gleichung für die Curve kann nicht durch l theilbar sein, folglich muss

$$l'_4.l'_5 - l_4.l_5 = L.l$$

sein, wo $L=0$ die Gleichung einer neuen Geraden ist. Demnach ist:

$$L.K = l_1.l_2.l'_4.l'_5 - l'_1.l'_2.l_4.l_5 \ldots\ldots (8).$$

Die Gerade l_1 kann die Curve nur in dreien verschiedenen Punkten schneiden, nemlich in ihren Durchschnitten mit l'_1, l_4, l_5; der Durchschnitt δ (Taf. VII. Fig. 5.) mit l'_2 liegt daher auf der Geraden L; eben so liegen: α der Durchschnitt von l_2 mit l'_1; β der Durchschnitt von l'_4 mit l_5; γ der Durchschnitt von l'_5 mit l_4 auf derselben Geraden. Wir haben also den Satz:

„Beschreibt man in einer Curve dritter Ordnung zwei Vierecke, deren verlängerte Seiten die Curve in denselben vier Punkten schneiden; so liegen die vier Durchschnitte der vier Seiten des einen Vierecks mit den den gegenüberliegenden Seiten entsprechenden in dem andern Vierecke, auf einer Geraden."

Durch Hülfe dieses Satzes lassen sich, wenn die acht Durchschnitte der vier Seiten eines in die Curve eingeschriebenen Vierecks mit der Curve bekannt sind, mittelst eines neunten Punkts, wenn dieser nicht der oben erwähnte neunte Punkt P_9 ist, eine unendliche Anzahl Punkte der Curve durch die leichteste Construction finden. Es sei nemlich (Taf. VII. Fig. 5.) P'_5 dieser Punkt. Man ziehe $P_2 P'_5$ oder l'_1, die die Gerade l_2 in dem Punkte α schneidet; $P_4 P'_5$ oder die Gerade l'_4, die l_5 in dem Punkte β schneidet. Durch α und β ziehe man nun die Gerade L_1, die l_4

Digitized by Google

im Punkte γ, l_1 aber im Punkte δ schneidet, so gehen die Geraden l'_3 durch P_3 und δ, l'_5 aber durch P_7 und γ, wodurch das ganze Viereck völlig bestimmt ist. Man findet also auf diese Weise drei neue Punkte durch Hülfe des einzigen P'_5. Durch Verwechselung der Geraden l, l_1 und l_2 unter einander und l_3, l_4, l_5 lassen sich mehrere neue Punkte blos durch P'_5 finden; wenn man aber die neu gefundenen auf dieselbe Art als P'_5 behandelt, oder die neuen Complexe von drei und drei Geraden anwendet, und die Operationen wiederholt, kann man jede beliebige Anzahl Punkte auf der Curve finden.

4. Es seien in einer Curve zweiter Ordnung zwei Vierecke eingeschrieben, deren auf einander folgende Seiten l, l_1, l_2, l_3 und l', l'_1, l'_2, l'_3 sind. Man hat also, wenn $K=0$ die Gleichung der Curve ist:

$$K=l.l_2+l_1.l_3,$$

$$K=l'.l'_2+l'_1.l'_3;$$

folglich durch Elimination:

$$(l'_1.l'_3-l_1.l_3)\,K=l.l_2.l'_1.l'_3-l'.l'_2.l_1.l_3.$$

Von den sechszehn Durchschnitten der vier Geraden l, l_2, l'_1 und l'_3 mit den vier andern l', l'_2, l_1 und l_3 liegen nur acht auf der Curve, und können nicht mehr verschiedene liegen, weil jede Gerade die Curve nur in zweien Punkten schneiden kann. Die übrigen acht Durchschnitte l und l_2 mit l' und l'_2; l_1 und l_3 mit l'_1 und l'_3 liegen auf einer Curve zweiter Ordnung, oder einem Systeme von zweien Geraden, deren Gleichung

$$l'_1l'_3-l_1l_3=0$$

ist. Man kann hieraus folgenden bekannten Satz folgern:

„Wenn von zweien in einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecken, die drei Seiten des einen die entsprechenden drei Seiten des andern auf einer Geraden schneiden: so liegt der Durchschnitt der vierten Seite mit der entsprechenden im andern Dreiecke auf derselben Geraden. Zugleich liegen die Durchschnitte der vier Seiten des einen Vierecks mit den entsprechenden gegenüberstehenden im anderen Vierecke auf einer anderen Geraden."

5. In einer Curve dritter Ordnung seien zwei verschiedene Vierecke eingeschrieben, in denen blos zwei einander gegenüberstehende Seiten die Curve in denselben beiden Punkten schneiden. Es sei also $K=0$ die Gleichung der Curve, so ist:

$$K=l.l_1.l_2+l_3.l_4.l_5,$$

$$K=l.l'_1.l'_2+l'_3.l'_4.l'_5.$$

Digitized by Google

Eliminirt man hieraus l, so ergiebt sich:

$$(l'_1.l_2' - l_1.l_2)\,K = l'_1.l'_2.l_3.l_4.l_5 - l_1.l_2.l'_3.l'_4.l'_5.$$

Von den fünfundzwanzig Durchschnitten der Geraden l'_1, l'_2, l_3, l_4, l_5 mit den Geraden l_1, l_2, l'_3, l'_4, l'_5 liegen die in dem untenstehenden Schema mit 0 bezeichneten Durchschnitte der in der obern horizontalen Reihe mit denen in der vertikalen auf der Curve. Die übrigen liegen auf einer andern Curve oder Systeme von zweien Geraden, deren Gleichung

$$l'_1.l'_2 - l_1.l_2 = 0$$

ist.

	l_1	l_2	l'_3	l'_4	l'_5
l'_1	—	—	0	0	0
l'_2	—	—	0	0	0
l_3	0	0	0	—	—
l_4	0	0	—	0	—
l_5	0	0	—	—	0

Hieraus folgt sogleich, dass wenn drei dieser letztern Durchschnitte auf einer Geraden liegen, die sämmtlichen zehn Durchschnitte auf zweien Geraden liegen müssen, und zwar auf jeder fünf derselben.

Digitized by Google

XV.

Zweite Bearbeitung des in dem Aufsatze Thl. XIII. Nr. XXXIII. gegebenen Beweises eines geometrischen Satzes.

Von

Herrn Theodor Lange

zu Berlin.

Es erscheint hiermit eine neue Bearbeitung des Beweises zu dem in Thl. XIII. Nr. XXXIII. S. 341. aufgestellten Satze: Wenn aus zwei Punkten A und B einer geraden Linie zwei gerade Linien AC und BD ausgehen, welche mit der Linie AB die Winkel a und b bilden mögen, und wenn eine aus dem Punkte A auf die Gerade DB gezogene Linie von der Länge r den Winkel a in demselben Verhältnisse theilt, in dem eine aus dem Punkte B auf die Linie AC gezogene Linie von derselben Länge r den Winkel b theilt, so sind die Winkel a und b einander gleich. Der hier folgende Beweis scheint, abgesehen von seiner grössern Einfachheit, deshalb vielleicht einige Aufmerksamkeit zu verdienen, weil in seinem Verlauf deutlicher hervortritt, woher es wohl gekommen ist, dass so viele Versuche einen rein geometrischen Beweis dieses Satzes zu geben, gescheitert sind. Indem nämlich die Bedingung, dass die Halbmesser in den Winkeln a und b liegen müssen, einmal begrenzend und dann wieder ausschliessend wirkt; da dieselbe bewirkt, dass, wenn $a > PBA$ ist, die Gleichung $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta'}$ die Gleichung $a = b$ bedingt, indessen sie, wenn $a < PBA$ ist, die Gleichung unmöglich macht und den Fall, dass die Kreise sich nicht schneiden, ganz ausschliesst; aber auch die Gleichungen $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ und $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta}$ nicht eintreten lässt.

(Von nun an s. m. Taf. X.)

Digitized by Google

Alle geraden Linien aus einem Punkte A, auf denen Punkte liegen, welche von einem Punkte B den bestimmten Abstand r haben, sind Secanten aus A für den mit r als Halbmesser um den Punkt B beschriebenen Kreis. Ebenso sind alle gerade Linien aus dem Punkte B, auf denen Punkte liegen, welche von dem Punkte A den bestimmten Abstand r haben, Secanten aus B für den mit dem Halbmesser r um A gezeichneten Kreis. — Man stelle sich vor, eine Secante für den Kreis um A aus dem Punkte B drehe sich um diesen Punkt so, dass sie aus der Lage BA als der ursprünglichen sich nach einer Richtung bewege, bis sie in die Lage jeder Secante gekommen ist. Der bei dieser Drehung zunehmende Winkel, welchen die Secante mit BA bildet, sei b. Sind während der Drehung auf die Secanten stets die Halbmesser gezogen, so wird jeder Halbmesser mit BA Winkel bilden, von denen der eine α mit dem Winkel b gleichzeitig zunimmt, indessen der ihm der Lage nach entsprechende Winkel α' am andern Halbmesser fortwährend abnimmt. Man bezeichne ferner den Winkel, den eine beliebige Secante aus A für den Kreis um B mit AB bildet, mit a und, der obigen Bezeichnung der Winkel α und α' entsprechend, die Winkel, welche die auf diese Secanten gezogenen Halbmesser gegen AB bilden, mit β und β'.

Da die Winkel a und b beständig denselben Werth behalten, dagegen b und α gleichzeitig zunehmen, so nimmt das Verhältniss $\frac{a}{\alpha}$ ab, indessen $\frac{b}{\beta}$ zunimmt. Es kann also nur höchstens einmal $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ werden, während die Secante in die Lage jeder Secante gekommen ist. Da aber, wenn $a=b$ ist, immer $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, so muss auch umgekehrt, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, $a=b$ sein.

Mit mehr Schwierigkeiten ist aber die Untersuchung verbunden, unter welchen Bedingungen die Quotienten $\frac{a}{\alpha'}$ und $\frac{b}{\beta'}$ einander gleich sind, da diese Verhältnisse gleichzeitig zunehmen. Man stelle sich vor, b nehme immer um einen beständigen Winkel y zu; alsdann wird α' um Winkel abnehmen, welche selbst entweder stetig zunehmen, wenn $AB>r$ ist, oder immer gleich bleiben, wenn $AB=r$ ist, oder stetig abnehmen, wenn $AB<r$ ist. Während daher das Verhältniss $\frac{b}{\beta'}$ von Null beginnend bis $\frac{\pi}{\beta'}$ immer um dieselben Werthe zunimmt, muss $\frac{a}{\alpha'}$ von $\frac{a}{\pi}$ beginnend bis zu unendlich grossen Werthen zunehmen. Daraus folgt, dass das Verhältniss $\frac{a}{\alpha'}$, während $\frac{b}{\beta'}$ um immer gleiche Stücke zunimmt, um immer grössere und grössere zunimmt, denn dieses Verhältniss muss sich immer in derselben Weise ändern. Da nun aber,

Digitized by Google

wenn b gleich a wird, $\frac{b}{\beta'}=\frac{a}{\alpha'}$ ist, so folgt, dass anfangs $\frac{b}{\beta'}<\frac{a}{\alpha'}$ ist, dann aber $\frac{b}{\beta'}=\frac{a}{\alpha'}$, dann $\frac{b}{\beta'}>\frac{a}{\alpha'}$, dann $\frac{b}{\beta'}=\frac{a}{\alpha'}$ und zuletzt $\frac{b}{\beta'}<\frac{a}{\alpha'}$ wird. Im Allgemeinen muss daher zweimal $\frac{b}{\beta'}$ gleich $\frac{a}{\alpha'}$ werden, und zwar einmal wenn $a=b$ ist.

Wenn gleich es mir nicht gelungen ist, die Grenze genau zu bestimmen, wann die Gleichung $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ die Gleichheit, wann die Ungleichheit der Winkel a und b bedinge, so zeigt doch folgende Untersuchung, dass unter besondern Bedingungen nur dieser oder jener Fall eintreten kann.

Es sei zuerst AB und r so gegeben, dass die Kreise um A und um B sich schneiden. Wenn in diesem Falle $a>\beta'$ gegeben ist, und b gleich β' wird, so ist $\alpha'>a$, folglich $\frac{b}{\beta'}>\frac{a}{\alpha'}$. Es muss daher schon ehe $b=\beta'$ geworden ist, einmal $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ gewesen sein, und es muss auch, wenn $b>\beta'$ wird, noch einmal $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ werden. Da b hier kleiner als a ist, und wenn $b=a$ wird, die Verhältnisse $\frac{a}{\alpha'}$ und $\frac{b}{\beta'}$ gleich sind, so folgt, dass wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, während $b>\beta'$ ist, die Winkel a und b einander gleich sind. — Wenn aber $a<\beta'$ ist, und $b=\beta'$ wird, so ist $a>\alpha'$, also $\frac{b}{\beta'}<\frac{a}{\alpha'}$. Da nun aber, als $b=a$ war, $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ gewesen sein muss, kann, wenn $b>\beta'$ wird, die Gleichung $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ nicht eintreten. Wenn also beide Kreise sich schneiden und $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, während $b>\beta'$ ist, so muss auch der Winkel a gleich dem Winkel b sein.

Es sei AB und r so gegeben, dass die Kreise sich nicht schneiden, so zeigt die Figur deutlich, dass die Winkel α' und β' nicht gleichzeitig in den Winkeln a und b liegen. Wenn man daher als Bedingung hinstellt, dass α' und β' gleichzeitig in den ihnen entsprechenden Winkeln a und b liegen sollen, so schliesst man den Fall, dass die beiden Kreise sich nicht schneiden, aus, indem man die Bedingungen, welche, wenn die Kreise sich schneiden, die Gleichungen $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ und $a=b$ gleichzeitig auftreten lassen, erfüllt. — Wenn daher $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, während α' und

Digitized by Google

β' Theile von a und b sind, so ist der Winkel a gleich dem Winkel b.

Es bleibt nun noch zu zeigen, unter welchen Bedingungen die Gleichung $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$, oder $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta}$ auftritt. — Da das Verhältniss $\frac{a}{\alpha}$ immer abnimmt, wenn $\frac{b}{\beta'}$ zunimmt, so kann höchstens einmal $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ werden. — Wenn a kleiner als ein Rechter ist, ist $\beta'>\beta$, mithin $\frac{b}{\beta'}<\frac{b}{\beta}$; das abnehmende Verhältniss $\frac{a}{\alpha}$ wird daher bei grösserem Werthe von b das Verhältniss $\frac{b}{\beta'}$, als das Verhältniss $\frac{b}{\beta}$ erreichen, so dass, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ ist, und $a<R$, immer b grösser als a sein müsste. Wenn aber a grösser ist, als ein Rechter, so findet man auf dieselbe Weise, dass, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ sein soll, b kleiner als a sein müsste. — Aus der Gleichung $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ folgt, wenn a kleiner als b ist, $a-\alpha<b-\beta'$ oder $a+\beta'<b+\alpha$. Es kann aber nie $a+\beta'<b+\alpha$ sein, wenn anders nicht $b>R$ ist. Und wenn $a>b$ ist, folgt aus der Gleichung $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$, $a-\alpha>b-\beta'$ oder $a+\beta'>b+\alpha$. Es kann aber $a+\beta'$ nie grösser sein, als $b+\alpha$, wenn nicht b kleiner, als ein Rechter ist. Wenn demnach $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ sein soll, muss einer von beiden Winkeln a oder b grösser und der andere kleiner sein, als ein rechter Winkel. Dasselbe gilt von der Gleichung $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta}$. Diese Bedingung tritt aber nie ein, wenn die Winkel α' und β oder α und β' gleichzeitig in ihre entsprechenden Winkel a und b fallen.

Nachdem nun gezeigt ist, dass erstens, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, auch immer $a=b$ sei, dass zweitens, wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, und gleichzeitig α' und β' in ihre entsprechenden Winkel a und b fallen, auch $a=b$ sei, dass drittens, wenn α' und β oder β' und α gleichzeitig in ihren entsprechenden Winkeln a und b liegen, nie $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ oder $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ werden kann, so hat man folgenden allgemeinen Satz:

Wenn aus zwei Punkten A und B einer geraden Linie zwei Linien AC und BD ausgehen, welche mit der

Digitized by Google

Linie *AB* die Winkel *a* und *b* bilden mögen, und wenn eine aus dem Punkte *A* auf die Linie *BD* gezogene Linie von der Länge *r*, den Winkel *a* in demselben Verhältniss theilt, in dem eine, aus dem Punkte *B* auf die Linie *AC* gezogene Linie von derselben Länge *r*, den Winkel *b* theilt, so sind die Winkel *a* und *b* einander gleich.

Dieser Satz umfasst den durch die Schwierigkeiten seines Beweises bekannten Satz: Wenn eine aus einem Dreieckswinkel auf die Gegenseite gezogene Linie *r* diesen Winkel in demselben Verhältniss theilt, in dem eine aus einem andern Dreieckswinkel auf die Gegenseite gezogene Gerade von derselben Länge diesen zweiten Winkel theilt, so ist das Dreieck gleichschenklich.

Mit diesem Satze steht folgender auf gleicher Linie: Wenn eine gerade Linie von zwei anderen geschnitten wird, und theilt eine aus dem einen Schnittpunkt auf die andere gerade Linie gezogene Gerade von gegebener Länge *r* einen der Winkel in demselben Verhältniss, wie eine aus dem andern Schnittpunkt auf die erstere gerade Linie gezogene Gerade von der gegebenen Länge *r* dessen Wechselwinkel oder dessen gleichliegenden Winkel theilt, so sind die beiden Linien parallel.

Digitized by Google

XVI.

Miscellen.

Wie man den körperlichen Inhalt der Halbkugel oder der Kugel durch Vergleichung derselben mit einem Kegel und einem Cylinder zu bestimmen pflegt, ist bekannt genug, und findet sich fast in allen Lehrbüchern der Geometrie. Nicht so bekannt scheint zu sein, verdient aber, so einfach die Sache auch an sich ist, für den geometrischen Elementarunterricht wohl eine Bemerkung, dass man fast mit derselben Leichtigkeit ganz auf dieselbe Weise sogleich den körperlichen Inhalt eines beliebigen Kugelsegments, und dann ferner auch dessen sphärische Oberfläche, bestimmen kann, wie im Nachfolgenden in der Kürze gezeigt werden soll.

Ist nämlich Taf. X. Fig. 1. die allgemein bekannte Figur für den Fall der Halbkugel, so denke man sich GN parallel mit AB gezogen, und betrachte nun die drei durch Umdrehung von $FDGN$, HEM, $DJLF$ um CE oder KE als Axe entstandenen Körper, welche respective ein Cylinder, ein Kugelsegment und ein abgestumpfter Kegel sind. Betrachtet man nun einen beliebigen mit GN parallelen Schnitt $G'N'$, so ist:

$$\text{Schnitt im Cylinder} = K'G'^2.\pi,$$

$$\text{Schnitt in der Kugel} = K'H'^2.\pi,$$

$$\text{Schnitt im Kegel} = K'J'^2.\pi.$$

Zieht man aber CH', so ist $CH' = K'G'$, und ausserdem ist offenbar $K'J' = CK'$; also ist

$$\text{Schnitt im Cylinder} = CH'^2.\pi,$$

$$\text{Schnitt in der Kugel} = K'H'^2.\pi,$$

$$\text{Schnitt im Kegel} = CK'^2.\pi.$$

Digitized by Google

Weil nun nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$CH^2 = K'H^2 + CK^2$$

ist, so ist

$$\text{Schnitt im Cylinder} = \text{Schnitt in der Kugel} + \text{Schnitt im Kegel},$$

woraus nach einer bekannten Schlussweise folgt, dass der durch Umdrehung von $FDGN$ um KE entstandene Cylinder gleich der Summe des durch Umdrehung von HEM um KE entstandenen Kugelsegments und des durch Umdrehung von $DJLF$ um KE entstandenen abgestumpften Kegels ist.

Bezeichnen wir jetzt den Halbmesser der Kugel durch r, und setzen ausserdem $KE = h$, so ist, weil offenbar

$$KJ = CK = CE - KE$$

ist, $KJ = r - h$, und folglich nach bekannten Sätzen:

$$\text{Cylinder} = r^2\pi h,$$

$$\text{Abgestumpfter Kegel} = \frac{1}{3}\pi h\{r^2 + r(r-h) + (r-h)^2\};$$

also nach dem Obigen

$$\text{Kugelsegment}$$

$$= r^2\pi h - \frac{1}{3}\pi h\{r^2 + r(r-h) + (r-h)^2\}$$

$$= \pi h\{r^2 - \frac{1}{3}[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2]\},$$

woraus man mittelst leichter Rechnung

$$\text{Kugelsegment} = \pi h^2(r - \frac{1}{3}h)$$

erhält. Nun ist aber nach einem bekannten Satze vom Kreise, wenn wir $KH = \varrho$ setzen, offenbar:

$$h : \varrho = \varrho : 2r - h,$$

also

$$2r - h = \frac{\varrho^2}{h}, \quad r = \frac{1}{2}h + \frac{\varrho^2}{2h}, \quad r - \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}h + \frac{\varrho^2}{2h};$$

folglich nach dem Obigen

Digitized by Google

$$\text{Kugelsegment} = \pi h^2\left(\frac{1}{6}h+\frac{\varrho^2}{2h}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3\varrho^2),$$

welches die bekannte Formel für den körperlichen Inhalt eines Kugelsegments ist.

Bezeichnen wir ferner die sphärische Oberfläche des Kugelsegments durch O, so erhellet mittelst einer einfachen Betrachtung auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{3}rO=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3\varrho^2)+\frac{1}{3}\pi\varrho^2(r-h)$$

$$=\frac{1}{6}\pi h\{3h(2r-h)+h^2\}+\frac{1}{3}\pi h(2r-h)(r-h),$$

woraus nach leichter Rechnung

$$\frac{1}{3}rO=\frac{2}{3}\pi hr^2,$$

also

$$O=2\pi hr$$

folgt, welches wieder eine längst bekannte Formel ist, die für $h=r$ auf der Stelle zur Oberfläche $2r^2\pi$ der Halbkugel, also zur Oberfläche $4r^2\pi$ der ganzen Kugel führt.

Solche Erweiterungen bekannter Darstellungsmethoden, die gewöhnlich nur in specielleren Fällen angewandt zu werden pflegen, mögen für den geometrischen Elementarunterricht einiges Interesse haben, und verdienen daher vielleicht nicht ganz unbeachtet gelassen zu werden. G.

Schreiben des Herrn W. Mink, Lehrers der Mathematik an der höheren Stadtschule zu Crefeld an den Herausgeber.

Ihre Aufforderung im letzten Hefte des Archivs der Mathematik und Physik (Thl. XIII.), zu dem darin unter Nr. XXXIII. mitgetheilten Satze geometrische Beweise zu liefern, veranlasst mich Ihnen beifolgende Kleinigkeit zu übersenden. Mir wurde dieser Satz und zwar mit der Beschränkung, dass die Winkel halbirt würden,

Digitized by Google

vor einiger Zeit von einem frühern Schüler der Königl. Gewerbschule mitgetheilt mit dem Bemerken, dass der Beweis desselben so ungleich schwieriger sei, als der des umgekehrten Satzes. Ich fand damals den hier mitgetheilten Beweis und überzeugte mich von der Richtigkeit jener Bemerkung. Der allgemeinere Satz wird sich auf die hier eingeschlagene Weise schwerlich beweisen lassen, ich werde aber, so bald ich einige Musse habe, mich bemühen, auch den Beweis für diesen zu finden, und wenn es mir gelingen sollte, Ihnen zur Zeit Mittheilung davon machen.

Lehrsatz. Wenn die Halbirungslinien AD und BE (Taf. X. Fig. 2.) der Winkel CAB und CBA im Dreieck ABC gleich sind, so sind auch die Seiten BC und AC gleich.

Beweis.

Es sei $GF \parallel AB$ und AD und BE verlängert bis zum Durchschnitt mit GF, so ist:

$$AB:AD=CF:DF=AC:DF,$$

und

$$AB:BE=CG:EG=BC:EG;$$

also

$$\text{I.}\quad AC:BC=DF:EG.$$

Nun ist aus den ähnlichen Dreiecken ABD und CFD, so wie ABE und CGE:

$$DF=\frac{BD.DC}{AD} \text{ und } EG=\frac{AE.EC}{BE};$$

daher

$$\text{II.}\quad AC:BC=BD.DC:AE.EC.$$

Ferner ist nach einem bekannten Satze

$$AB:AC=BD:DC,$$

also

$$DC=\frac{AC.BD}{AB};$$

und nach demselben Satze:

$$EC=\frac{BC.AE}{AB};$$

Digitized by Google

also

$$\text{III.} \quad AC:BC=AC.BD^2:BC.AE^2;$$

woraus

$$1:1=BD^2:AE^2$$

also

$$BD^2=AE^2$$

oder

$$BD=AE.$$

Folglich ist

$$\Delta ABD\cong\Delta ABE,\ \angle DBA=\angle EAB,$$
$$AC=BC;$$

w. z. b w.

Digitized by Google

XVII.

Die Wichtigkeit einer richtigen Auffassung von Thibaut's Beweise der Summe der Dreieckswinkel für die gesammte Elementar-Geometrie, und besonders für die Theorie der Parallelen.

Von dem

Dr. Theol. Herrn F. H. Germar,

zu Heide in Norder-Dithmarschen.

Nach einer Aeusserung des Proklus schreibt Eudemus den euklidischen Beweis des Satzes, dass die Summe aller Dreieckswinkel gleich zwei rechten Winkeln sei, den Pythagoräern zu; er war also schon lange vor Euklides in Gebrauch. Da aber diese Beweisart sich auf die Gleichheit der Wechselswinkel bei den geraden Parallelen gründet, so blieb dem Euklid, wenn er bei derselben bleiben wollte, nichts anders übrig, als auch bei der desshalb eingeführten Definition der geraden Parallelen zu verharren, nach welcher „gerade Parallelen solche gerade Linien in der nämlichen Ebene sind, welche unendlich verlängert sich nach keiner Seite schneiden", wie sehr auch seinem sonst so richtigen und strengen logischen Tacte eine solche Definition widersprechen mochte. Denn, weil Keiner läugnen wird, dass es auch Parallel-Kreise, folglich krumme Parallelen giebt; so wird man auch das logische Gesetz zugeben müssen, dass die Definition zuerst auf Parallellinien überhaupt, als das genus, sich beziehen, und dann erst die differentia specifica für gerade Parallellinien angeben solle. Für das genus ist aber schwerlich ein anderes Merkmal aufzufinden, als dasjenige, welches der sensus communis überall mit dem Parallelismus verbindet, nämlich den

Digitized by Google

durchgängigen gleichen Abstand, dessen Beweis bei den Parallel-Kreisen in einer Ebene keine Schwierigkeit haben kann, weil bei concentrischen in einer Ebene liegenden Kreisen die Differenzen aller möglichen Radien zwischen jenen Kreisen nothwendig einander gleich sein müssen. Auch leuchtet es von selbst ein, dass Linien überhaupt, welche durchgängig gleichen Abstand haben, einander niemals schneiden können, keineswegs aber, dass gerade Linien in einer Ebene, welche unendlich verlängert sich nach keiner Seite schneiden, deswegen gleichen Abstand haben müssen. Falls nämlich ihre Annäherung in gleichen Abständen zu beiden Seiten etwa in dem Verhältnisse wie $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ ihres früheren Abstandes fortschritte, so würden sie sich unaufhörlich nähern, ohne sich jemals zu schneiden; und dieses würde noch viel weniger geschehen, wenn sie in solchem Verhältnisse sich zu beiden Seiten von einander entfernten. Dass aber ein solches Verhältniss bei geraden Linien nicht Statt finden kann, versteht sich nicht von selbst, muss also erst bewiesen werden.

Dagegen scheint aber auch der Beweis, dass zwei gerade Linien in einer Ebene, wenn sie in zwei Punkten gleichen Abstand haben, den nämlichen auch in allen übrigen haben müssen, ganz unmöglich zu sein, wenn die Summe der Dreieckswinkel nicht schon vorher, und unabhängig von der Theorie der Parallelen gefunden ist. Gerade darin aber dürfte der Grund liegen, dass alle Versuche, den gleichen Abstand zu beweisen, eben so wohl scheitern mussten, als die Bemühungen, das Unbefriedigende der euklidischen Beweisart zu beseitigen.

Wenn man nämlich auf einer geraden Linie zwei gleiche Verticalen erhebt, und durch ihre Endpunkte eine Gerade zieht: so lässt sich, bevor die Summe der Dreieckswinkel gefunden ist, nimmer durch Gleichheit der Dreiecke beweisen, dass die zweite Gerade in allen übrigen Punkten gleichen Abstand von der ersten habe, d. h. alle übrigen Verticalen jenen beiden gleich sein müssen. Errichtet man hingegen drei gleiche Verticalen, so lassen sich immer nur zwei Endpunkte derselben durch eine Gerade verbinden, und dann kann man eben so wenig beweisen, dass die beiden dadurch entstandenen an einander stossenden Linien eine einzige Gerade bilden.

Vermehrt wird die Schwierigkeit der Sache aber auch noch durch den unbestimmten Begriff der geraden Linie, wenn derselbe, wie gewöhnlich so abgefasst ist: sie sei diejenige Linie, deren Elemente oder Punkte sämmtlich in einerlei Richtung liegen. Denn, was ist einerlei Richtung? Beide Wörter leiden gleich sehr an Dunkelheit, und man wird auf ihren Ursprung zurück gehen müssen, wenn man sie deutlich machen will. Das Wort Richtung ist nämlich von der Bewegung des Auges hergenommen, und bezeichnet diejenige Stellung desselben, in welcher es den kleinsten Gegenstand am deutlichsten sieht. Kann nun eine Linie, (d. h. die Gränze einer Fläche, so wie die Fläche die Gränze des eingeschlossenen Raums ist) entweder durch ihre

Digitized by Google

eigene oder des Auges Bewegung in eine solche Stellung kommen, dass in der Richtung desselben alle Elemente der Linie in einen Punkt zusammenzufallen scheinen, oder sich decken; so hat sie in allen ihren Elementen die nämliche Richtung wie die Richtung des Auges, also einerlei Richtung. Dies erhellet auch schon aus der Art, wie die gerade Linie praktisch geprüft wird. Die Definition derselben dürfte also richtiger folgendermassen lauten: Die gerade Linie ist diejenige, welche in eine solche Stellung gegen die Richtung des Auges kommen kann, dass alle ihre Elemente in einem Punkte zusammen zu fallen scheinen, oder einander decken; diejenige aber, bei welcher dieses unmöglich ist, heisst eine krumme.

Daraus folgt denn freilich, dass die Elemente einer geraden Linie in einerlei Richtung liegen müssen, d. h. mit der Richtung des Auges zusammen fallen können; desgleichen, dass zwei Punkte die Richtung einer geraden Linie vollkommen bestimmen; ferner, dass die Ebene diejenige Fläche ist, mit welcher gerade Linien von jeder Richtung in allen Punkten zusammenfallen, sobald dieses in zwei Punkten geschieht,

Zwar wird nun die Schärfe der Grundbegriffe und der Beweise von denen gering geschätzt, denen es nur um Resultate der Geometrie für die praktische Anwendung zu thun ist, daher diese eine Menge von Sätzen der Elementar-Geometrie als Axiome darstellen. Das ist jedoch nicht im Sinne Euklids gehandelt. Den Griechen war es nicht so sehr um die Resultate der Geometrie, als um strenge logische Form der Beweise zu thun; ihnen war sie hauptsächlich eine Propädeutik der Philosophie. Uns sind nun freilich jene Resultate weit wichtiger für die Naturkunde und Technik geworden, als sie ihnen waren; aber deswegen bleibt doch auch für uns die Bildung zu einem strenglogischen Denken nicht weniger wichtig. Unbestimmte vieldeutige Grundbegriffe richten in allen Wissenschaften, besonders in den discursiven und speculativen, unsägliches Unheil an, und haltlose Schlüsse aus erschlichenen oder halbwahren Prämissen versperrten oft für Jahrhunderte den Weg zur Wahrheit. Des Aristoteles Fehlschluss für eine verschiedene Fallgeschwindigkeit der Körper hielt über ein Jahrtausend alle Köpfe gefangen, und die schlagendsten englischen Beobachtungen haben noch nicht die Reihe von Fehlschlüssen über Fluth und Ebbe verdrängen können, zu welchen man bloss dadurch verleitet ward, dass man vergass, die Erde sei kein solcher Körper als die Theorie sie nothwendig denken musste, um die Wirkung der Attraction klar zu machen. Wenn aber solches sogar in der Physik geschehen konnte, wie viel grösser ist die Gefahr für diejenigen Wissenschaften, welche von Beobachtungen und Erfahrungen wenig oder gar nicht unterstützt werden!

Jedenfalls schickt es sich am wenigsten für die reine Geometrie, welche vor allen andern Wissenschaften auf unumstössliche Wahrheit ihrer Lehrsätze Anspruch macht, wenn auch sie sich beschuldigen lassen muss, für manche ihrer Grundbegriffe nur unklare Worte, und für einen ihrer wichtigsten und folgenreich-

Digitized by Google

sten Lehrsätze nur einen mangelhaften unbefriedigenden Beweis zu haben.

Es fehlt also nicht an triftigen Rechtfertigungsgründen für das Bestreben derjenigen, welche immer neue Versuche gemacht haben, jenen Vorwurf von der Geometrie abzuwenden. Auch der Verfasser dieses Aufsatzes, der in verschiedenen Verhältnissen seines langen Lebens zum wiederholten Vortrage der Wissenschaft genöthigt war, konnte sich solcher Versuche nicht entschlagen, sah sie jedoch stets vereitelt, bis schon vor vielen Jahren die Ansicht von Thibauts Geometrie durch die Art, wie derselbe unabhängig von der Theorie der Parallelen den Beweis für den Satz von der Summe der Dreieckswinkel führt, ihm den Weg zu öffnen schien. Doch ward er damals durch dringendere Arbeiten verhindert denselben weiter zu verfolgen. Wider seine Vermuthung hat er aber auch nicht erfahren, dass jener Beweis bei den späteren Versuchen so benutzt wäre, wie er es zu verdienen scheint, vielleicht weil der Urheber denselben mehr andeutete als vollständig ausführte. Daher benutzte er, bei einer neuen Veranlassung, die Sache wieder aufzunehmen, die unfreiwillige Musse, welche ihm durch die nun schon mehr als zweijährige dänische Vertreibung aus seinem Amte geworden ist, die Wichtigkeit, welche er einer richtigen Auffassung jenes Beweises für die gesammte Elementar-Geometrie und besonders für die Theorie der Parallelen zuschreiben zu müssen glaubt, der öffentlichen Prüfung vorzulegen, indem er zugleich dem Herrn Dr. Vechtmann in Meldorf für die sachkundige Sorgfalt, mit welcher derselbe sich zuerst derselben unterzog, so wie auch dem Herrn Professor Horn in Glückstadt seinen Dank abstattet.

Um aber den Raum und die unnöthigen Kosten vieler Figuren zu ersparen; sind im Folgenden alle von der Summe der Dreieckswinkel unabhängigen Beweise nur kurz angedeutet, diejenigen Sätze aber ganz weggelassen, welche mit dem Hauptziele in keiner nothwendigen Verbindung stehen.

Will man jedoch den von Professor Thibaut angebahnten Weg verfolgen, so muss man nach seinem Vorgange von einer andern Definition des Winkels ausgehen, als die gewöhnliche ist, welche durch den Ausdruck — „der Winkel sei die Neigung zweier Linien, welche in einem Punkte zusammenstossen“ — wiederum den dunkeln Begriff der Neigung in die Definition mischt. Denn dieser Begriff kann nur durch den Gegensatz, nämlich als Abweichung vom Parallelismus, deutlich werden; von diesem darf aber vor der Theorie der Parallelen nicht die Rede sein.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, muss man von dem Begriff der Kreislinie ausgehen, indem man diese als das Bild des Weges betrachtet, welchen der eine Endpunkt einer geraden

Digitized by Google

Linie beschreibt, wenn sie sich mit dem andern Endpunkte um einen Punkt vollständig herumdreht, d. h. so lange, bis sie ganz in die ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, mithin eine volle Umdrehung gemacht hat.

Die umgedrehte gerade Linie heisst bekanntlich der Radius oder Halbmesser des Kreises; das Bild des Weges aber, welchen der eine Endpunkt des Radius bei einer vollen Umdrehung um den andern Endpunkt gemacht hat, heisst die Peripherie oder der Umkreis der von derselben begränzten Kreisfläche. Ein Theil der Peripherie des Kreises wird ein Kreisbogen genannt, und die Grösse desselben durch das Verhältniss des Theils der Umdrehung, der er seine Entstehung verdankt, zu der vollen Umdrehung bestimmt. Der ganze Kreis ist daher als Bild einer vollen Umdrehung auch zugleich das Maass derselben, der Halbkreis das Maass einer halben, und der Kreisbogen als Theil des Kreises das Maass des seiner Grösse entsprechenden Theils der vollen Umdrehung. Dass es aber bei diesem Maasse nicht auf die Grösse der Radien ankomme, erhellet daraus, dass nicht die Länge des Bogens an sich, sondern nur sein Verhältniss zum ganzen Kreise die Grösse des Theils der Umdrehung bestimmt.

Ein Winkel ist also nichts anders als das Bild eines solchen Theils einer vollen Umdrehung; die Radien, durch deren Drehung er entstanden ist, und welche nun denselben begränzen, heissen die Schenkel, und der Mittelpunkt, um welchen der Theil der Umdrehung erfolgt ist, die Spitze oder der Scheitelpunkt des Winkels.

Ist nun ein Winkel das Bild des vierten Theils einer vollen Umdrehung, hat er folglich den vierten Theil eines Kreises zu seinem Maasse, so heisst er ein rechter; ist er kleiner, so wird er ein spitzer, und ist er grösser, ein stumpfer genannt. Vergrössert er sich aber so sehr, dass seine Schenkel gerade in entgegengesetzter Richtung stehen, also einer derselben auf der rückwärts gezogenen Verlängerung des andern Schenkels zu liegen kommt, mithin beide eine gerade Linie bilden, daher man ihn dann auch einen gestreckten Winkel nennt; so ist er das Bild einer halben Umdrehung, und hat folglich den Halbkreis zu seinem Maasse. Da nun der Durchmesser des Kreises nichts anders ist, als zwei Radien desselben, welche eine gerade Linie, oder jenen gestreckten Winkel bilden, so folgt von selbst, dass jeder Durchmesser die Peripherie in zwei gleiche Theile theilt.

Wird also ein Kreis von beliebiger Grösse in eine Zahl gleicher Theile getheilt, und der Mittelpunkt des Kreises auf die Spitze eines Winkels gelegt, so lässt sich durch die Zahl jener Theile, welche zwischen dessen Schenkel fallen, das Maass des Winkels, d. h. sein Verhältniss zur vollen Umdrehung, bestimmen. Die Zahl jener gleichen Theile ist willkührlich; bekanntlich hat aber, von den ältesten Zeiten an, die Eintheilung in 360 Theile oder Grade den Vorzug behauptet, weil dieselbe durch viele Zah-

Digitized by Google

len dividirt werden kann, ohne in die Quotienten unbequeme Brüche zu bringen. So enthält demnach der rechte Winkel oder $\frac{1}{4}$ Umdrehung 90^0; $\frac{1}{5}$ derselben ist $=72^0$; $\frac{1}{6}=60^0$; $\frac{1}{8}=45^0$; $\frac{1}{9}=40^0$; $\frac{1}{10}=36^0$; $\frac{1}{12}=30^0$, u. s. w.

Aus den jetzt vorangeschickten Erläuterungen ergeben sich nun nachstehende Folgerungen:

§. 1. Jede volle Umdrehung einer geraden Linie um einen Punkt in einer Ebene ist $=4R$.

§. 2. In einer Ebene ist die Summe aller Winkel um eine gemeinschaftliche Spitze $=4R$.

Denn die gemeinschaftliche Spitze ist der Mittelpunkt eines Kreises, also des Maasses einer vollen Umdrehung.

§. 3. Alle Winkel über einer geraden Linie mit einer gemeinschaftlichen Spitze (Nebenwinkel) sind zusammen $=2R$.

Denn sie haben zu ihrem gemeinschaftlichen Maasse den Halbkreis, folglich $\frac{4R}{2}=2R$.

§. 4. Sind also zwei Winkel (α und β) einander gleich: so sind es auch ihre Supplementswinkel, d. h. diejenigen, welche mit ihnen über einer geraden Linie einen Schenkel und eine Spitze gemeinschaftlich haben.

Denn jeder der Supplementswinkel ist $=2R-\angle\alpha$ oder $-\angle\beta$. Ist also $\angle\alpha=\angle\beta$, so müssen auch die Reste gleich sein.

§. 5. Das Nämliche gilt für zwei spitze Winkel in Ansehung ihrer Complementswinkel, d. h. derjenigen, die mit ihnen zusammen $=1R$ sind.

§. 6. Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene einander schneiden, so sind von den vier dadurch entstehenden Winkeln die gegenüberstehenden (die Vertical-Winkel) einander gleich.

Der Beweis aus §. 3. ist bekannt.

§. 7. Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

Denn sollte noch eine andere Linie zwischen zwei Punkten eine gerade Linie sein, so müssten alle Elemente derselben nebst jenen zwei Punkten für das Auge in einen Punkt zusammen fallen können. Dann wäre sie aber keine zweite,

Digitized by Google

von der ersten verschiedene, sondern die nämliche Linie. Fallen aber nicht alle ihre Elemente nebst jenen zwei Punkten in einen einzigen Punkt zusammen, so ist sie zwar eine verschiedene, aber keine gerade. (Vergl. die Erklärungen oben).

§. 8. Folglich können zwei verschiedene gerade Linien nur in einem einzigen Punkte zusammenfallen oder sich schneiden.

Denn, hätten sie zwei Punkte gemeinschaftlich, so wären sie nach §. 7. entweder keine zwei verschiedene, oder keine gerade Linien.

§. 9. Zwei gerade Linien können keine Figur, d. h. keine überall begränzte Fläche, bilden.

Denn: liegen beide gerade Linien auf einander, so bilden sie nur eine einzige gerade Linie, also keine Figur. Dreht dagegen die eine sich um die gemeinschaftliche Spitze von der andern ab, so können beide nach §. 8. keine neue Verbindung haben, also nicht eine Fläche einschliessen. Der Bogen aber, den diese beschreibt, ist bloss das Maass des Winkels, aber keine Seite desselben; jedenfalls wäre er eine dritte Linie, und noch dazu keine gerade.

§. 10. Eine geradlinige Figur muss also wenigstens drei Seiten haben, oder wenigstens ein Dreieck sein.

§. 11. Zwei Kreise in einer Ebene schneiden sich über und unter der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, wenn diese Verbindungslinie 1) kleiner ist als die Summe ihrer Radien, aber zugleich 2) grösser als die Differenz derselben.

Obgleich der vollständige Beweis dieses Satzes keineswegs zu den leichteren in der Elementar-Geometrie gehört, so darf ich doch ihn hier übergehen, weil er die Summe der Dreieckswinkel durchaus nicht voraussetzt und schon von Andern geführt ist. Auch würde er, um ganz deutlich zu werden, zu viel Raum und mehrere Figuren erfordern. Nur die Bemerkung erlaube ich mir, dass die zweite Bedingung bei Kreisen von gleichen Radien von selbst wegfällt, weil die Differenz derselben $=0$ ist, folglich nur bei Kreisen von ungleichen Radien in Betracht kommt.

§. 12. Aus drei ungleichen geraden Linien kann also kein Dreieck entstehen, wenn nicht die Summe von je zwei Seiten grösser ist als die dritte.

Es sei nämlich von drei geraden Linien die eine $ab=4$, die andere $cd=2$ und die dritte $ef=1$; so ist es unmöglich daraus ein Dreieck zu bilden. Denn, nimmt man $ab=4$ zur Grundlinie, so können cd und ef einander nicht einmal erreichen, also viel weniger schneiden, weil die Summe der Radien $=2+1$ kleiner ist als die Verbindungslinie der Mittelpunkte ihrer Kreise, nämlich die Linie $ab=4$. Will man aber $cd=2$ zur Grundlinie nehmen, so ist zwar $ab+ef$, nämlich $4+1$,

Digitized by Google

grösser als die Verbindungslinie $dc=2$; aber dc ist auch grösser als die Differenz von $ab-ef=1$, folglich kann ebenfalls kein Durchschnittspunkt entstehen, weil der Kreis von ab den Kreis von ef umgiebt ohne ihn zu schneiden. Mithin kann auch in diesem Falle kein Zusammenstossen der beiden Linien in einem gemeinschaftlichen Punkte stattfinden, also auch die Figur nicht geschlossen werden.

§. 13. Daraus folgt von selbst, dass in jedem geradlinigen Dreiecke die Summe von je zwei Seiten grösser ist als die dritte.

§. 14. Die gerade Linie ist die kürzeste zwischen zwei Punkten.

Denn, zieht man zwischen zwei Punkten a und b eine gerade und eine krumme Linie; so können die Elemente der krummen Linie nicht in allen übrigen Punkten mit der geraden Linie zusammenfallen, denn sonst wäre auch sie eine gerade Linie. Es müssen folglich in ihr sich Punkte finden, welche ausserhalb der geraden Linie liegen. Werden nun diese durch gerade Linien mit den Punkten a und b verbunden, so ist ihre Summe nach §. 13. allemal grösser als die gerade Linie, welche die Grundlinie dieser Dreiecke bildet.

---

§. 15. Schon jetzt lässt sich nach Professor Thibaut's Vorgange der Satz streng beweisen, dass die Summe aller Winkel eines jeden geradlinigen Dreiecks $=2R$ ist. (Taf. XI. Fig. 1.)

Beweis 1. Man verlängere die drei Seiten des Dreiecks abc, und lege auf die verlängerte Grundlinie ab eine andere ihr gleiche gerade Linie, welche hier als ein Pfeil dargestellt ist, um die beiden Endpunkte derselben zur Erkennung der vollen Umdrehung unterscheiden zu können. Schiebt man nun diesen Pfeil auf der verlängerten Grundlinie ad so weit fort, bis das hintere Ende desselben auf b liegt, so hat er bei dieser Bewegung unstreitig keinerlei Drehung erlitten, denn er deckt nach wie vor die nämliche in gerader Richtung verlängerte Grundlinie. Wird nun der Pfeil um den Punkt b so weit gedreht, dass er auf der Seite bc liegt, so ist der Winkel δ die erste Drehung desselben. Wird er alsdann auf der verlängerten geraden Linie be fortgeschoben, bis sein hinteres Ende auf dem Punkte c liegt, so hat er durch diese Bewegung ebenfalls keine Drehung erfahren. Diese zweite Drehung erfolgt vielmehr erst, wenn er sich jetzt um den Punkt c so weit herumbewegt, dass er auf der Dreiecksseite ac liegt, nachdem er den zweiten Drehungswinkel ε gebildet hat. Endlich rückt er auch auf der verlängerten geraden Linie af fort, bis sein hinteres Ende auf dem Punkte a angekommen ist, und wird nun durch die dritte Drehung um den

Digitized by Google

Winkel ζ wieder völlig in seine vorige Lage gebracht, welches beweist, dass er eine ganze oder volle Umdrehung gemacht hat. Da diese nun einzig und allein durch die Drehung in den Winkeln δ, ε und ζ bewirkt worden ist, so muss die Summe ihrer Drehungen einer vollen Umdrehung gleich sein. Also ist die Summe von $\angle\delta + \angle\varepsilon + \angle\zeta = 4R$.

Wollte jedoch Jemand dagegen einwenden, die Umdrehung sei keine volle, weil sie nicht durchgängig in dem nämlichen Punkte der Ebene vorgegangen ist, obgleich es doch bei dem Anfangs- und Endpunkte der Drehung wirklich geschah, so muss dieser auch noch weit mehr alle Rotation der Himmelskörper leugnen; denn Keiner derselben vollendet seine Rotation an dem nämlichen Punkte des Raumes, sondern während einer Bewegung von vielen tausend Meilen, und die Trabanten sogar während einer zwiefachen Bewegung.

II. Nun ist aber (nach §. 3.)

$$\angle\beta + \angle\delta = 2R;\ \angle\gamma + \angle\varepsilon = 2R;\ \angle\alpha + \angle\zeta = 2R.$$

Also

$$\angle\beta + \angle\gamma + \angle\alpha + \angle\delta + \angle\varepsilon + \angle\zeta = 6R.$$

Da nun nach I. $\quad \ldots\ldots \angle\delta + \angle\varepsilon + \angle\zeta = 4R$

So ist $\quad \angle\beta + \angle\gamma + \angle\alpha = 2R.$

§. 16. Daraus ergeben sich unmittelbar folgende Sätze für jedes geradlinige Dreieck:

a) Der rechte Winkel ist grösser als jeder der beiden andern.

b) Es ist nur ein rechter oder stumpfer Winkel darin möglich.

c) Zwei gerade Linien, welche senkrecht auf einer dritten stehen, können sich niemals schneiden.

Denn, könnten sie sich schneiden, so würden sie ein Dreieck bilden. Dann enthielte aber die Summe der Winkel dieses Dreiecks mehr als $2R$, im Widerspruch gegen §. 15.

Anmerkung. Hier ist also schon der Beweis für die euklidische Definition der Parallelen geführt, aber freilich nicht für den gleichen Abstand.

d) Wenn eine Seite verlängert wird, so ist der dadurch entstehende äussere Winkel gleich der Summe der beiden gegenüberstehenden.

Denn, ist der äussere Winkel $=\alpha$, sein Nebenwinkel im Dreieck $=\beta$, die beiden gegenüberstehenden $=\gamma$ und δ; so ist $\angle\alpha + \beta = 2R$ (§. 3.) und $\angle\beta + \gamma + \delta = 2R$ (§. 15.); also ist $\angle\alpha + \beta = \angle\beta + \gamma + \delta$; folglich $\angle\alpha = \gamma + \delta$.

Digitized by Google

§. 17. Die folgenden Sätze von der Congruenz der Dreiecke und einige andere sind freilich unentbehrlich; aber sie bedürfen hier keiner Beweise, weil diese sämmtlich von der Summe der Dreieckswinkel unabhängig und bekannt genug sind. Es sind folgende:

a) Wenn alle drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten eines anderen gleich sind, so decken sie einander, folglich auch die Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberstehen.

b) Wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in einem Dreiecke den nämlichen Stücken in einem anderen gleich sind; woraus folgt, dass gleiche Bogen gleiche Sehnen haben.

c) Auch, wenn zwei Seiten und ein anliegender Winkel den nämlichen Stücken in einem anderen Dreiecke gleich sind; aber nur unter der Bedingung, dass die jenem Winkel gegenüberstehende Seite grösser ist als die anliegende.

d) Wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel in zwei Dreiecken gleich sind.

e) Also auch, wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken eine Cathete und der anliegende spitze Winkel gleich sind; denn dann ist der rechte Winkel der zweite anliegende.

f) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; und, eine aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks gefällte Verticale halbirt die Grundlinie desselben.

g) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich, so ist es gleichschenklich, d. h. die gegenüberstehenden Seiten sind einander gleich.

§. 18. In jedem geradlinigen Dreieck steht I. der grösseren Seite der grössere Winkel, und umgekehrt II. dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber. (Taf. XI. Fig. 2.)

Beweis von I.

$ab > bc$ (ex hyp.), folglich kann $bc = bd$ von ab abgenommen werden. Zieht man nun cd, so ist $\angle\alpha = \angle\beta$. (§. 17. f)) Aber $\angle\alpha = \angle\gamma + \delta$ (§. 16. d)); also ist auch $\angle\beta = \angle\gamma + \delta$; folglich $\angle\beta + \delta = \angle\gamma + 2\delta$, mithin $\angle\beta + \delta$ oder $\angle acb$ grösser als $\angle\gamma$.

Beweis von II.

$\angle acb > \angle\gamma$ (ex hyp.), also kann der $\angle\delta = \gamma$ vom $\angle acb$ abgenommen werden. Dann ist aber $ad = cd$ (§. 17. g)); also $ad + db = cd + db$. Da nun $cd + db$ grösser als cb (§. 13.); so ist auch $ad + db$ oder ab grösser als cb.

§. 19. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse grösser als jede der Catheten.

Digitized by Google

Denn der rechte Winkel ist grösser als jeder der übrigen (§. 16. a)), also die gegenüberstehende Seite, die Hypotenuse, grösser als jede andere (§. 18. I.).

§. 20. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn I. die Hypotenuse und ein spitzer Winkel, dessgleichen II. die Hypotenuse und eine Cathete in dem einen Dreiecke den nämlichen Stücken in dem andern gleich sind.

Denn in dem ersten Falle sind auch die beiden anderen als Complementswinkel zu dem zweiten rechten Winkel des Dreiecks einander gleich (§. 15. und §. 5.), folglich gilt §. 17. d).

Im zweiten Falle aber ist die Hypotenuse grösser als jede Cathete (§. 19.), folglich sind die Dreiecke congruent nach §. 17. c).

§. 21. Die Verticale ist die kürzeste aller Linien zwischen einem Punkte und einer geraden Linie, folglich das Maass seines Abstands von derselben.

Denn alle übrigen sind Hypotenusen, folglich länger als die verticale Cathete (§. 19.).

§. 22. In jedem geradlinigen Vierecke ist die Summe aller Winkel $=4R$.

Denn, zieht man eine Diagonale, so erhält man zwei Dreiecke. Nun ist in jedem die Summe der Winkel $=2R$, also in beiden zusammen $=4R$.

§. 23. Ist also in einem geradlinigen Vierecke die Summe zweier Winkel $=2R$, so ist die Summe der beiden anderen ebenfalls $=2R$, und, sind diese beiden einander gleich, so ist jeder derselben $=1R$.

Jetzt sind alle Vorbedingungen vorhanden, deren es bedarf, um zum Endziele zu gelangen, d. h. den überall gleichen Abstand der geraden Parallelen, und die Gleichheit ihrer Wechselswinkel nach der euklidischen Methode durch die Gleichheit der Dreiecke zu beweisen.

§. 24. Wenn in einer Ebene zwei gerade Verticalen auf einer dritten geraden Linie stehen, so sind sie parallel, d. h. sie haben überall gleichen Abstand. (Taf. XI. Fig. 3.)

Hypothesis: $\angle bax = \angle aby = R$

Thesis: $ax \# by$.

Digitized by Google

Beweis.

Man mache in beliebiger Entfernung von a und b die Linie $ac=bd$, und ziehe cd nebst den Diagonalen ad und bc, so ist:

I. $ab=ab$; $\angle bac=\angle abd=R$ (ex hyp.); $bc=ad$ (ex constr.).

Also $\Delta abc\cong\Delta abd$ (§. 17. b));

folglich $bc=ad$; $\angle\beta=\alpha$; $\angle\varepsilon=\zeta$; und $\angle\gamma=\delta$ als Complementswinkel (§. 5.).

II. $cd=cd$; $ac=bd$ (ex constr.) $ad=bc$ (I.)

Also $\Delta cda\cong\Delta cdb$ (§. 17. a));

folglich $\angle\vartheta=\angle\eta$; und da $\angle\zeta=\varepsilon$ (I.); so ist

$$\angle\vartheta+\zeta=\angle\eta+\varepsilon.$$

Da nun

$$\angle bax=\angle aby=R \text{ (ex hyp.)}$$

so ist

$$\angle\vartheta+\zeta=\angle\eta+\varepsilon=\frac{2R}{2}=1R \text{ (§. 23.)}$$

III. $bd=bd$; $ad=bc$ (I.); $\angle abd=\angle bdc=R$ (II.).

Also $\Delta bda\cong\Delta bdc$ (§. 20. II.);

folglich $cd=ab$; und da $\angle abd=R$ (ex hyp.) und $\angle bdc=R$ nach II., so ist der Abstand cd = Abstand ab (§. 21.).

IV. Da endlich ac, bd beliebige Entfernungen sind, so gilt das Bewiesene für jede Entfernung von ab; also ist $ax\,\#\,by$.

§. 24. Wenn von zwei geraden Linien in einer Ebene jede von einer dritten geraden Linie vertical geschnitten werden, so sind sie parallel.

Denn, verlängert man in der vorigen Figur die Linien ax, by unterhalb der Linie vw, so wird diese die schneidende Linie, und da unterhalb derselben eben sowohl rechte Winkel sind als oberhalb nach §. 3., so muss hier das Nämliche gelten, was oberhalb bewiesen ist.

Digitized by Google

§. 25. **Wenn von zwei geraden Parallelen die eine durch eine dritte gerade Linie vertical geschnitten wird, so geschieht das Nämliche auch bei der andern. (Taf. XI. Fig. 4.)**

Hypoth. 1) $uv \# wx$

2) $\angle bay = R.$

Thes. $\angle dca = R.$

Beweis.

Man errichte in beliebiger Entfernung, z. B. in b, die Verticale bd, so ist sie als Abstandslinie $= ac$ (§. 23.). Also:

I. $ab = ab$; $ac = bd$; $\angle bac = \angle abd = R$ (ex hyp. et constr.)

Also $\Delta abc \cong \Delta abd$ (§. 17. b));

folglich $bc = ad$ und $\angle \gamma = \angle \delta$.

II. $cd = cd$; $ac = bd$ (I.); $ad = bc$ (I.)

Also $\Delta cda \cong \Delta cdb$ (§. 17. a));

folglich $\angle \vartheta = \eta$.

III. Da nun auch $\angle \delta = \gamma$ (I.); so ist

$$\angle \vartheta + \delta = \angle \eta + \gamma = \frac{2R}{2} = 1R,$$

oder $\angle dca = R$.

§. 26. **Wenn zwei gerade Parallelen in einer Ebene von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind die Wechselswinkel einander gleich. (Taf. XI. Fig. 5.).**

Hypoth. $uv \# wx$

Thes. $\angle \alpha = \angle \beta$.

Beweis.

Man fälle aus a und d Verticalen auf die gegenüberstehende Parallel-Linie, so ist:

$ad = ad$; $ac = db$ (ex hyp. und §. 25.); $\angle \delta = \angle \gamma = R$ (ex constr.)

Also $\Delta adc \cong \Delta adb$ (§. 20. II.);

folglich $\angle \alpha = \angle \beta$.

Digitized by Google

§. 27. Wenn bei zwei in einer Ebene liegenden geraden Linien, welche von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, die Wechselswinkel gleich sind, so sind die Linien parallel.

Hypoth. $\angle\alpha=\beta$; Thesis $uv \# wx$.

Beweis.

Ist Figur und Construction eben wie oben, so ist:

I. $ad=ad$; $\angle\alpha=\angle\beta$ (ex hyp.); $\angle\gamma=\angle\delta$ (ex constr.)

Also $\Delta adb \cong \Delta adc$ (§. 20. I.);

folglich $bd=ac$ und $\angle\zeta=\varepsilon$

II. $\angle\alpha=\beta$ (ex hyp.); und $\angle\varepsilon=\zeta$ (I.), folglich

$$\angle\alpha+\angle\varepsilon=\angle\beta+\angle\zeta=\frac{2R}{2}=1R \text{ (§. 22. u. §. 23.)},$$

also Verticale ac = Verticale bd; mithin $av \# wx$ (§. 24.).

§. 28. Die übrigen Sätze, nämlich, dass bei geraden Parallelen, die von einer geraden Linie durchschnitten werden, der innere Winkel dem an der nämlichen Seite gegenüberstehenden gleich ist, und dass die Summe der beiden inneren Winkel 180° beträgt, nebst deren Gegensätzen, sind nun, durch Hülfe der Vertical- und Neben-Winkel, auf die gewöhnliche Weise so leicht zu beweisen, dass eine nähere Entwickelung dieser Beweise völlig überflüssig scheint.

Digitized by Google

XVIII.

Ueber die geometrische Konstruktion der imaginären Wurzeln einer Gleichung.

Von

Herrn H. Scheffler,

Bau-Conducteur bei den Herzogl. Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Das gewöhnliche Verfahren der Aufsuchung der Wurzeln einer numerischen Gleichung mittelst geometrischer Konstruktion, wobei man die Uebekannte x wie eine veränderliche Abszisse und den Werth der gegebenen Funktion für jedes zugehörige x wie eine korrespondirende rechtwinklige Ordinate behandelt, und die Abszissen sucht, für welche die durch die Endpunkte der Ordinaten gelegte Kurve die Abszissenlinie durchschneidet, ist nur brauchbar, um die reellen Wurzeln einer solchen Gleichung zu finden.

Wenn aber die Gleichung

$$F(x)=0 \ldots\ldots (1)$$

auch imaginäre Wurzeln von der Form

$$x=re^{\varphi\sqrt{-1}} = r\,(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}), \ldots\ldots (2)$$

welches überhaupt die allgemeinere Zahlform ist, in der auch die reellen Werthe enthalten sind, besitzt; so geht dieselbe durch Substitution des vorstehenden Ausdrucks für x über in

$$F(re^{\varphi\sqrt{-1}}) = F[r(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})]=0 \ldots\ldots (3)$$

Digitized by Google

Hierdurch erhält man eine Gleichung zwischen zwei von einander ganz unabhängigen Grössen r und φ. Die Letzteren sind aber wegen Gleichung (2) an die Bedingung geknüpft, dass r stets einen absoluten oder positiv reellen und φ irgend einen positiven oder negativen, aber ebenfalls durchaus reellen Werth habe. Man ist also jetzt in den Stand gesetzt, die Untersuchung bloss auf reelle Grössen zu beschränken, welche der Gleichung (3) ein Genüge leisten. Ohne die genannte Bedingung würde die Gleichung (3) den Charakter der Unbestimmtheit annehmen; man könnte dann z. B. für φ jeden beliebigen Werth setzen, um durch Auflösung für r einen dazu gehörigen Werth der letzteren Grösse zu finden. Dies würde dem Falle entsprechen, dass man in Gleichung (1) für x einen Ausdruck von der Form

$$x = (pe^{\alpha\sqrt{-1}})(qe^{\beta\sqrt{-1}})$$

substituirt hätte, der aus zwei Faktoren von allgemeiner Form bestände, und wovon der erste $pe^{\alpha\sqrt{-1}}$ den obigen Faktor r und der zweite $qe^{\beta\sqrt{-1}}$ den obigen Faktor $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ in Gleichung (2) verträte. Abgesehen davon, dass hierdurch das Problem nicht vereinfacht wäre, indem man durch die Einführung beliebiger reeller oder imaginärer Werthe für φ in Gleichung (3), wodurch

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1} = e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

die Form $qe^{\beta\sqrt{-1}}$ annähme, immer wieder auf eine Gleichung kommen würde, die im Allgemeinen für r imaginäre Wurzeln von der Form $pe^{\alpha\sqrt{-1}}$ enthielte; so ist doch zu bemerken, dass die unter solchen Umständen existirende Unbestimmtheit der Gleichung (3) sich nur auf die Werthe von φ und r, nicht aber auf die daraus zusammengesetzten Werthe von $x = re^{\varphi\sqrt{-1}}$, also auch nicht auf die Auflösungen der gegebenen Gleichung (1) überträgt. Denn wenn irgend ein Werth non φ die Grösse

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1} = e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

in die Form $qe^{\beta\sqrt{-1}}$ überführt, und $r = pe^{\alpha\sqrt{-1}}$ ein Werth ist, welcher sich für jenes φ aus Gleichung (3) ergibt, so hat man

$$\begin{aligned} x &= pe^{\alpha\sqrt{-1}} \cdot qe^{\beta\sqrt{-1}} = (pq)e^{(\alpha+\beta)\sqrt{-1}} \\ &= (pq)\left[\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta).\sqrt{-1}\right], \end{aligned}$$

worin nun (pq) und $(\alpha+\beta)$ reelle Grössen sind. Beschränkt man sich also auf die obige Bedingung, dass in Gleichung (3) r und φ nur reelle Werthe haben sollen; so würde man eben dieselbe vorstehende Auflösung für x erhalten müssen, wenn man in Gleichung (3) $\varphi = (\alpha+\beta)$ gesetzt hätte, was dann für r den Werth (pq) geben müsste.

Digitized by Google

Scheinbar bleibt aber selbst unter Beobachtung der genannten Bedingung, welche ja die Werthe von φ und r nur in die weiten Gränzen unendlicher Zahlenreihen einschliesst, für die Gleichung (3) noch ein grosser Spielraum der Unbestimmtheit. Dass dies jedoch nur scheinbar ist, leuchtet ein, wenn man die Funktion F in jener Gleichung so entwickelt, dass das Reelle von dem rein Imaginären sich sondert. Angenommen dies gebe

$$F'(r,\varphi) + F''(r,\varphi) \cdot \sqrt{-1} = 0 \ldots\ldots (4)$$

Da diese Gleichung nur realisirt werden kann, wenn der reelle und der imaginäre Theil für sich gleich Null wird; so zerfällt dieselbe in folgende zwei Gleichungen:

$$F'(r,\varphi) = 0 \ldots\ldots (5)$$

$$F''(r,\varphi) = 0 \ldots\ldots (6)$$

Jetzt hat man zwischen den beiden Unbekannten r und φ zwei Gleichungen; die Unbestimmtheit ist also verschwunden, oder bezieht sich vielmehr nur noch auf die Vielheit der Wurzeln, welche einem jeden Systeme von zwei höheren Gleichungen mit zwei Unbekannten nach dem besonderen Charakter jener Gleichungen eigen ist.

Wollte man behufs geometrischer Konstruktion der Wurzeln dieser Gleichungen sich in der gewöhnlichen Weise eines rechtwinkligen Koordinatensystems bedienen; so könnte man folgendermaassen verfahren.

Man substituirte sowohl in (5), wie in (6), für φ einen bestimmten Zahlwerth φ_1 und behandelte bloss r als einzige Veränderliche, welche unter den absoluten oder positiven Zahlen von 0 bis $+\infty$ zu variiren wäre. Diese Werthe von r trüge man von demselben Mittelpunkte aus auf Ein und derselben Axe als Abszissen auf. Die entsprechenden Werthe von $F'(r,\varphi_1)$, als rechtwinklige Ordinaten behandelt, ergäben alsdann Eine Kurve und die von $F''(r,\varphi_1)$ eine zweite Kurve über derselben Axe. Angenommen, diese beiden Kurven durchschneiden sich in einem Punkte A_1. Für einen möglichst benachbarten Werth von φ, der φ_2 heisse, würde sich dann durch $F'(r,\varphi_2)$ und $F''(r,\varphi_2)$ über derselben Axe ein zweites System von zwei Kurven ergeben, welches sich in dem Punkte A_2 schneiden möge. Auf diese Weise liesse man φ in der Reihe von 0 bis $+\infty$ und von 0 bis $-\infty$ variiren. Die genannten Durchschnittspunkte A_1, A_2... der aus je zwei Kurven bestehenden Systeme würden sich dann durch eine neue Kurve verbinden lassen. Der Durchschnittspunkt dieser neuen Kurve mit der Abszissenaxe lieferte alsdann eine Abszisse, welche für r genommen, den fraglichen Gleichungen ein Genüge leistete.

Dieses Verfahren ist nicht allein wegen der erforderlichen Zerlegung der gegebenen Gleichung (3) in zwei Theile F' und F''

Digitized by Google

und der Berechnung der genannten Doppelkurven sehr umständlich, sondern auch deshalb unvollkommen, weil sich vermittelst desselben nur der Werth von r, nicht aber der des dazu gehörigen Winkels φ und überhaupt nicht unmittelbar die gesuchte Grösse x graphisch darstellt, wie es von der geometrischen Darstellung des in der gegebenen Gleichung liegenden Gesetzes gefordert werden muss.

Besser im Geiste der geometrischen Konstruktion liegt folgende Methode. Nachdem man einen Nullpunkt und eine reelle Axe festgelegt hat, stellt man sofort den Werth von $F(x)$ aus Gleichung (1) für irgend ein x dar, indem man als x eine Linie von bestimmter Länge r wählt, die sich unter irgend einem Winkel φ gegen den positiven Theil der reellen Axe neigt, also eine Linie von der Form

$$x = re^{\varphi\sqrt{-1}} = r\cos\varphi + r\sin\varphi.\sqrt{-1}.$$

Die positiven Werthe von φ werden links um den Nullpunkt, die negativen rechts herum gerechnet. Bei dieser Darstellung von $F(x)$ führt man schrittweise die darin vorkommenden Operationen aus, indem man mit möglichster Vermeidung der Rechnung namentlich die Neigungen der einzelnen Theile dieser Funktion und die Zusammensetzung derselben unmittelbar durch Zeichnung darstellt. Es bleiben dann in der Regel, wenn die Funktion F nicht zu komplizirt ist, nur die absoluten Längen der einzelnen Strahlen zu berechnen. Diese Längen sind meistens unabhängig von dem Winkel φ, und dies gewährt den Vortheil, dass wenn man einmal für eine Reihe benachbarter Werthe von r, die in der Zahlenreihe von 0 bis $+\infty$ liegen, jene Längen berechnet hat, man dieselben Längen für jeden beliebigen anderen Werth des Winkels φ gebrauchen kann.

Die Grundregeln bei dieser Konstruktion sind:

a) für die Addition, dass an den Endpunkt des Einen Strahls der hinzu zu addirende in der ihm zukommenden Richtung gelegt werde;

b) für die Subtraktion, dass an den Endpunkt des Minuend der Subtrahend in der ihm direkt entgegengesetzten Richtung getragen werde;

c) für die Multiplikation, dass die absolute Quantität des Produktes durch Multiplikation der absoluten Quantitäten der Faktoren, die Neigung des Produktes jedoch durch Vorwärtsdrehung aus der Richtung des Einen Faktors um den Drehungswinkel des andern Faktors erhalten werde;

d) für die Division, dass die absolute Quantität des Quotienten durch Division der absoluten Quantitäten des Dividends und Divisors, die Neigung des Quotienten jedoch durch Rückwärtsdrehung aus der Richtung des Dividends um den Drehungswinkel des Divisors entstehe;

Digitized by Google

e) für die Potenzirung zu einem positiven ganzen Exponenten n, dass die absolute Quantität der Potenz gleich derselben Potenz von der absoluten Quantität des Grundfaktors, dagegen der Drehungswinkel jener Potenz gleich dem $n$fachen des Drehungswinkels des Grundfaktors sei;

f) für die Wurzelausziehung zu einem positiven ganzen Exponenten n, dass die Quantität der Wurzel gleich der $n$ten Wurzel aus der Quantität der gegebenen Grösse, dagegen der Drehungswinkel gleich dem $n$ten Theile des Drehungswinkels diesser Grösse sei.

Nach der Regel (*c*) ist auch Multiplikation einer Grösse mit den Faktoren

$$-1,\ +\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}$$

oder mit

$$e^{\pi\sqrt{-1}},\ e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}},\ e^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

gleichbedeutend mit einer Vorwärtsdrehung respect. um 180°, 90°, 270°.

Hierdurch ergibt sich durch die obige Konstruktion ein Polygon, welches vom Nullpunkte ausläuft, und welches mit dem letzten Endpunkte wieder in diesen Nullpunkt einfallen muss, wenn der angenommene Werth von x eine Auflösung der Gleichung (1) sein soll.

Damit man dieses Verfahren ausführen könne, muss die Funktion F in solche Theile zerlegt sein, auf welche sich die Regeln (*a*) bis (*f*) zur Erzeugung der auf einander folgenden Seiten des fraglichen Polygons unmittelbar in Anwendung bringen lassen. Hätte man z. B.

$$F(x) = Ax^3 - \sqrt{cx} + \log x = 0,$$

worin der Koeffizient A irgend eine geneigte Linie von der allgemeinen Form

$$ae^{\alpha\sqrt{-1}} = a\cos\alpha + a\sin\alpha\,.\sqrt{-1},$$

dagegen c nur eine absolute Zahl darstellen möge, also

$$F(x) = ae^{\alpha\sqrt{-1}}x^3 - \sqrt{cx} + \log x = 0,$$

so müsste, wenn man nun für x den allgemeinen Werth

$$x = re^{\varphi\sqrt{-1}} = r\cos\varphi + r\sin\varphi\,.\sqrt{-1}$$

einführen wollte, das Glied

$$\log x = \log[r(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})]$$

Digitized by Google

in die bekannte Form

$$\log r + \varphi\sqrt{-1}$$

gebracht werden. Dies gibt

$$ae^{\alpha\sqrt{-1}}r^3e^{3\varphi\sqrt{-1}} - \sqrt{cr}\,.\,e^{\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}} + \log r + \varphi\sqrt{-1} = 0,$$

oder

$$ar^3\,.\,e^{(\alpha+3\varphi)\sqrt{-1}} - \sqrt{cr}\,.\,e^{\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}} + \log r + \varphi\sqrt{-1} = 0.$$

Wenn man in allen Gliedern, von denen jedes eine Seite des Polygons ergibt, die Richtungskoeffizienten deutlicher als Potenzen von e markiren und ausserdem die Funktion auf der linken Seite so darstellen will, dass die einzelnen Theile überall als Summanden erscheinen; so kann man auch schreiben

$$ar^3.e^{(\alpha+3\varphi)\sqrt{-1}} + \sqrt{cr}.\,e^{(\pi+\frac{\varphi}{2})\sqrt{-1}} + \log r.e^{0\sqrt{-1}} + \varphi\,.\,e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = 0.$$

Die absoluten Längen ar^3, $\sqrt{cr}$, $\log r$ der ersten drei Glieder sind unabhängig von jedem Werthe, den man für φ einführen möge; nur der des letzten Gliedes ändert sich mit φ. Nachdem also die ersteren drei für irgend eine Reihe von Werthen für r berechnet sind, kann man sich derselben für jeden beliebigen Werth von φ bedienen.

Ferner erhellet, dass die Richtungen der sich durch diese Gleichung ergebenden vier Polygonalseiten unabhängig sind von der Länge r der für x angenommenen Linie, dass also, wenn man das fragliche Polygon erst einmal für einen bestimmten Werth von r und φ entworfen hat, die Seiten aller Polygone, für welche man bloss r in der gedachten Zahlenreihe variiren lässt und φ konstant erhält, den Seiten des ersten Polygons parallel sein werden.

Gibt man nun in $F(x)$ der Grösse x irgend einen bestimmten Neigungswinkel φ_1 und lässt dann deren absolute Länge r von 0 bis $+\infty$ variiren; so beschreibt der zweite Endpunkt des fraglichen Polygons eine Kurve, welche durch den Nullpunkt gehen muss, wenn es für φ_1 ein zugehöriges r_1 geben soll, welches in der Form $r_1e^{\varphi_1\sqrt{-1}} = x_1$ der gegebenen Gleichung ein Genüge leistet. Gibt man jetzt dem Winkel φ einen zweiten Werth φ_2 und lässt die Länge r durch eben dieselbe frühere Zahlenreihe variiren; so beschreibt der letzte Endpunkt des Polygons eine zweite Kurve. φ_3, φ_4, φ_5.... ergibt eine dritte, vierte, fünfte .... Kurve. Diese Werthe von φ müssen nun allmählig sowohl die Reihe der positiven, wie der negativen Zahlen, also die Reihe

$$-\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots +\infty$$

Digitized by Google

durchlaufen, um alle möglichen Kurven zu ergeben, welche der fragliche Endpunkt des Polygons beschreiben kann.

Statt dass man φ in dieser Weise über jede Gränze hinaus wachsen lässt, kann man auch, indem man in die gegebene Gleichung statt φ den Ausdruck $2k\pi+\varphi$ schreibt, worin k eine willkührliche, aber positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, erst überall $k=0$ setzen und nun erst φ von 0 bis 2π variiren lassen, dann $k=1$ setzen und hierauf φ ebenfalls nur von 0 bis 2π variiren lassen u. s. f.

Ob es nöthig sei, dass man den Winkel φ in vorstehender Weise ins Unendliche wachsen lasse, um alle denkbaren Kurven der genannten Art zu erhalten, oder ob sich für gewisse Perioden der Werthe von φ immer wieder dieselben früheren Kurven wiederholen müssen, in welchem Falle man dann den Winkel φ nur zwischen den Gränzen Einer solchen Periode zu variiren brauchte, hängt von der Beschaffenheit der Funktion F ab.

Man erkennt, dass in dem obigen für $F(x)$ gewählten Beispiele das erste Glied

$$ar^3 . e^{(\alpha+3\varphi)\sqrt{-1}} = Ax^3$$

seine Fundamentalwerthe regelmässig wiederholt, sobald man φ von 0 bis 2π hat wachsen lassen und nun über 2π hinausgeht, indem $e^{(\alpha+3(2k\pi+\varphi))\sqrt{-1}}$ denselben Neigungswinkel darstellt, wie $e^{(\alpha+3\varphi)\sqrt{-1}}$. Ferner erkennt man, dass in dieser Periode auch alle diejenigen Werthe vorkommen, welche Ax^3 für irgend ein negatives φ annehmen kann, indem $e^{(\alpha-3(2k\pi+3\varphi))\sqrt{-1}}$ denselben Neigungswinkel darstellt, wie $e^{(\alpha+3(2\pi-\varphi))\sqrt{-1}}$. Dieses ersten Gliedes wegen brauchte man man also φ nur von 0 bis 2π wachsen zu lassen.

Die Werthe des zweiten Gliedes

$$\sqrt{cr} \; . \; e^{(\pi+\frac{\varphi}{2})\sqrt{-1}} = -\sqrt{cx}$$

kehren jedoch erst dann regelmässig wieder, wenn φ von 0 bis 4π gewachsen ist. Alsdann sind aber auch alle diejenigen Werthe vorgekommen, welche sich für negative φ einstellen würden. Wegen dieses zweiten Gliedes ist also eine Variation von φ zwischen den Gränzen 0 und 4π erforderlich.

Das Glied $\log r$ ist für alle Werthe von φ dasselbe und erfordert demnach gar keine Variation dieses Winkels.

Das letzte Glied

$$\varphi \; . \; e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

Digitized by Google

ändert seinen Werth mit jeder Variation von φ, ist auch ein anderes für $-\varphi$, als für $+\varphi$. Da dasselbe jedoch einen konstanten Richtungskoeflizienten, also eine konstante Neigung gegen die reelle Axe besitzt, und ausserdem mit φ gleichförmig wächst; so wird man sehr bald erkennen, ob und wie weit es erforderlich ist, dieses letzteren Gliedes wegen die Variationen von φ auszudehnen, indem man immer vor Augen hat, dass die zu konstruirenden Kurven dem Nullpunkte sich nähern und nicht denselben fliehen sollen.

Nach diesen Vorbetrachtungen schlägt man nun folgendes systematische Verfahren ein.

Nachdem man den Nullpunkt O und die positive reelle Axe OX (Taf. XI. Fig. 6.) festgelegt hat, gibt man in Gleichung (3) dem Winkel φ irgend einen bestimmten Werth φ_1, womit man die Variationen von φ beginnen will, und zieht durch O die Linie OD_1, welche sich unter diesem Winkel $D_1OX=\varphi_1$ gegen die Axe OX neigt. Indem man nun vorläufig $\varphi=\varphi_1$ konstant erhält, lässt man die absolute Länge r der Unbekannten x von 0 gegen $+\infty$ variiren. Für irgend einen solchen Werth r'_1 von r möge nun die Konstruktion der Funktion $F(r'_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}})$ das im Nullpunkte O anhebende Polygon $OA'_1B'_1C'_1$ ergeben, dessen letzter Endpunkt C'_1 sei. Jetzt ziehe man noch durch den Punkt C'_1 mit OD_1 parallel die Linie $C'_1D'_1$ und mache deren Länge $=r'_1$.

Für einen zweiten Werth r''_1 von r sei bei demselben Werthe von φ das durch $F(r''_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}})$ sich ergebende Polygon dargestellt durch $OA''_1B''_1C''_1$, und es sei wieder $C''_1D''_1$ parallel genommen zu derselben Linie OD_1 und an Länge gleich r''_1 gemacht.

In ähnlicher Weise mögen als Endpunkte der Polygone für den konstanten Winkel φ_1 resp. für $r=r'_1$, r''_1, r'''_1.... die Punkte C'_1, C''_1, C'''_1..... und in paralleler Hinausrückung über diese Punkte die Punkte D'_1, D''_1, D'''_1.... entstehen, wobei die Linien

$$C'_1D'_1,\ C''_1D''_1,\ C'''_1D'''_1\ldots \text{ resp. } =r'_1,\ r''_1,\ r'''_1\ldots.$$

und sämmtlich parallel zu OD_1 sind.

Die Variationen von r für den Werth $\varphi=\varphi_1$ dehnt man aber bloss so weit aus, dass einige der Punkte C'_1, C''_1, C'''_1.... diesseit und einige derselben jenseit der Linie OD_1 zu liegen kommen.

Hierauf verbindet man sowohl die Punkte C'_1, C''_1, C'''_1..... wie auch die Punkte D'_1, D''_1, D'''_1.... durch Kurven, von denen die erstere die Linie OD_1 in dem Punkte C_1 und die letztere diese Linie OD_1 in dem Punkte D_1 durchschneiden möge.

Jetzt setzt man für φ einen zweiten Werth φ_2 und legt die Linie OD_2 unter dem Neigungswinkel φ_2 gegen die Axe OX. Ebenso, wie vorhin für $\varphi=\varphi_1$ die beiden Punkte C_1 und D_1 in

Digitized by Google

der Linie OD_1 gefunden sind, werden nun für $\varphi = \varphi_2$ die beiden Punkte C_2 und D_2 in der Linie OD_2 ermittelt.

Für einen dritten, vierten, fünften Werth φ_3, φ_4, φ_5 für φ erhalte man dann in den Linien, welche sich unter diesen Winkeln gegen OX neigen, oder in deren Verlängerungen (wie z. B. bei Od, welche, indem Winkel $dOX = \varphi_5$ ist, rückwärts nach C_5 und D_5 verlängert ist) die Punkte C_3 und D_3, C_4 und D_4, C_5 und D_5. Dass ein Punkt, wie D_5, in der rückwärts gerichteten Verlängerung der betreffenden Linie Od liege, charakterisirt sich dadurch, dass derselbe zwischen O und den Endpunkt C_5 des zugehörigen Polygons fällt. Allgemein ist aber die wahre Richtung der hier in Frage kommenden Linien OD_1, OD_2, OD_3... durch diejenige Linie dargestellt, welche sich von dem betreffenden Punkte C nach dem zugehörigen D hin erstreckt, und nicht umgekehrt von D nach C.

Diese Variation des Winkels φ setzt man, wenn man nur Eine Auflösung der gegebenen Gleichung sucht, nur so weit fort, bis sich in den Linien OC_1D_1, OC_2D_2.... die Lage der beiden Punkte C_1 und D_1, C_2 und D_2.... in Beziehung zum Nullpunkte O umkehrt, wie bei OD_3C_3, oder auch nur so weit, bis der Nullpunkt O zwischen jene beiden Punkte fällt, wie bei C_4OD_4, also C_5 in die rückwärts gerichtete Verlängerung der die Richtung von x darstellenden Linie Od zu liegen kommt.

Jetzt verbindet man die Punkte C_1, C_2..... durch die Kurve $C_1C_2C_3C_4C_5$ und die Punkte D_1, D_2..... durch die Kurve $D_1D_2D_3D_4D_5$. Die erstere Kurve, welche die Endpunkte von Polygonen enthält, wird durch den Nullpunkt O gehen, also eine Auflösung der gegebenen Gleichung erkennen lassen.

Es ist aber klar, dass, wenn der Punkt C_3 mit O zusammenfällt, also die Sehne OC_3 der Kurve $C_1C_2C_3OC_4C_5$ sich auf einen Punkt O reduzirt, die Richtung dieser Sehne mit der Tangente der eben genannten Kurve für den Nullpunkt O zusammenfällt. Ausserdem wird das Verbindungsstück C_3D_3 zwischen dieser Kurve und der anderen $D_1D_2D_3DD_4D_5$ gleich der Länge OD.

Zieht man also im Nullpunkte O an die Kurve C_1OC_5 die Tangente OD bis zum Durchschnitte D mit der Kurve D_1DD_5; so stellt OD sowohl nach *Länge*, wie nach *Richtung* den Strahl $x = re^{\varphi\sqrt{-1}}$ dar, welcher der gegebenen Gleichung ein Genüge leistet oder eine *Wurzel* dieser Gleichung ist.

Wenn die gegebene Gleichung mehrere imaginäre Wurzeln hat; so wird die Kurve C_1OC_5 in eben so viel Windungen oder Zweigen durch den Nullpunkt gehen. Die Tangenten an die verschiedenen Zweige von O bis zum Durchschnitte mit dem betreffenden Zweige der Kurve D_1DD_5 ergeben alsdann die verschiedenen Wurzeln.

Digitized by Google

Es leuchtet ein, dass die reellen Wurzeln durch dieses Verfahren nicht dargestellt werden können, sobald die konstanten Grössen der Funktion F sämmtlich reell sind, weil alsdann sämmtliche Polygonseiten und demnach auch alle Kurven, wie $C'_1 C_1 C''_1$ und $D'_1 D_1 D''_1$ in die reelle Axe fallen, welche für $\varphi = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots$ zugleich die Linie OD_1 darstellt, sodass unter solchen Umständen ein jeder Punkt dieser Axe als gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt mit jenen Kurven angesehen werden könnte.

Die imaginären Wurzeln der algebraischen Gleichungen des zweiten Grades mit reellen Koeffizienten führen nach Vorstehendem zu einer sehr gefälligen Konstruktion. Man braucht nämlich bei diesen Gleichungen die Kurvenbögen $C'_1 C_1 C''_1$ und $D'_1 D_1 D''_1$ gar nicht darzustellen, um die in OD_1 liegenden Punkte C_1 und D_1 zu finden, sondern kann die letzteren Punkte und demnach die Kurven $C_1 OC_5$ und $D_1 DD_5$ unmittelbar festlegen. Es sei zu diesem Ende

$$a + bx + cx^2 = 0$$

oder

$$a + bre^{\varphi\sqrt{-1}} + cr^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} = 0$$

die gegebene Gleichung. Ist nun in Taf. XI. Fig. 7. OD_1 die Richtung irgend eines für $x = re^{\varphi\sqrt{-1}}$ angenommenen Strahles, also Winkel $D_1 OX = \varphi_1$ und $OA_1 B_1 C_1$ das für $r = r_1$ sich ergebende Polygon, indem

$$(OA_1) = a,\quad (A_1 B_1) = bx = bre^{\varphi\sqrt{-1}},$$
$$(B_1 C_1) = cx^2 = cr^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}};$$

so ist Winkel $B_1 A_1 X = \varphi$, also $A_1 B_1$ parallel zu OD_1, ferner der Neigungswinkel von $B_1 C_1$ gegen OX gleich 2φ; mithin Winkel $A_1 B_1 C_1 = OA_1 B_1$. Soll nun der Punkt C_1 in die Linie OD_1 fallen; so muss auch Winkel $OC_1 B_1 = C_1 O A_1$ und die Länge der Linie $B_1 C_1 = OA_1$, d. i. $cr_1^2 = a$ sein.

Hiernach erhält also die dritte Seite $B_1 C_1$ des fraglichen Polygons eine konstante von dem besonderem Werthe φ_1 des Winkels φ oder von der Richtung der Linie OD_1 ganz unabhängige Länge, welche gleich der Länge des bekannten Gliedes $OA_1 = a$ in der gegebenen Gleichung ist. Die Länge des hierzu gehörigen x wird also ebenfalls konstant und zwar

$$r_1 = \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Man kann also schon voraus schliessen, dass die absolute Quantität (der Model) der gesuchten imaginären Wurzeln

Digitized by Google

$= \sqrt{\frac{a}{c}}$ sein wird. Da die Länge der zweiten Seite A_1B_1 des fraglichen Polygons

$$= br_1 = b\sqrt{\frac{a}{c}}$$

ist; so folgt, dass auch diese Seite eine von φ unabhängige konstante Länge bewahren wird.

Um also für die verschiedenen Werthe von φ oder für die verschiedenen Richtungen OD_1 die Punkte C_1 und D_1 zu finden, macht man auf der positiv reellen Axe OX die Länge $OA_1 = a$, beschreibt um A_1 mit dem Halbmesser

$$br_1 = b\sqrt{\frac{a}{c}} = A_1B_1$$

einen Kreis, zieht A_1B_1 parallel zu OD_1 bis an den Umfang dieses Kreises und schneidet mit der Zirkelöffnung $cr^2 = a = OA_1 = B_1C_1$ von B_1 in die Linie OD_1 so ein, dass Winkel $B_1C_1O = A_1OC_1$ wird. Dies ergibt den Punkt C_1. Macht man darauf in OD_1 die Länge

$$C_1D_1 = r_1 = \sqrt{\frac{a}{c}};$$

so findet man auch den Punkt D_1.

Auf diese Weise ist in Taf. XI. Fig. 7. die Gleichung

$$2 + 2x + x^2 = 0$$

oder

$$2 + 2re^{\varphi\sqrt{-1}} + r^2e^{2\varphi\sqrt{-1}} = 0$$

konstruirt, worin man $a=2$, $b=2$, $c=1$, also

$$r_1 = \sqrt{\frac{a}{c}} = \sqrt{2},$$

also

$$OA_1 = a = 2, \quad A_1B_1 = br_1 = 2\sqrt{2},$$

$$B_1C_1 = cr_1^2 = a = 2, \quad C_1D_1 = r_1 = \sqrt{2}$$

hat. Die Kurve C_1Oc ist eine geschlossene, welche über und unter der reellen Axe zwei kongruente Schenkel besitzt, welche zweimal durch den Nullpunkt gehen und daselbst eine

Digitized by Google

Schlinge bilden. Die ebenfalls aus zwei kongruenten Schenkeln bestehende Curve D_1DD' besitzt in der reellen Axe links vom Nullpunkte bei d eine widerkehrende Spitze. Die beiden imaginären Wurzeln

$$x=-1+\sqrt{-1}=\sqrt{2}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1})$$

und

$$x=-1-\sqrt{-1}=\sqrt{2}(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1})$$

sind dargestellt resp. durch die beiden Tangenten OD und OD' an die beiden Schenkel der Kurve C_1Oc im Nullpunkte O.

Für den Werth $\varphi=\pi$, also $2\varphi=2\pi$ fallen die drei Seiten OA_1, A_1B_1, B_1C_1 des obigen Polygons in die reelle Axe dergestalt, dass, wenn die Koeffizienten a, b, c sämmtlich positiv sind, OA_1 die positive, A_1B_1 die negative und B_1C_1 die positive Richtung annimmt, also

$$Oc=OA_1+B_1C_1-A_1B_1$$
$$=a+a-b\sqrt{\frac{a}{c}}=2a-b\sqrt{\frac{a}{c}}$$

wird. Wäre nun $OA_1+B_1C_1$ oder $2OA_1<A_1B_1$ oder $2a<b\sqrt{\frac{a}{c}}$ d. i. $4a<\frac{b^2}{c}$; so könnte die Kurve C_1Oc den Nullpunkt O nicht erreichen; es gäbe alsdann keine imaginären Wurzeln.

In Taf. XI. Fig. 8. ist die Gleichung

$$2-2x+x^2=0$$

oder

$$2-2re^{\varphi\sqrt{-1}}+r^2e^{2\varphi\sqrt{-1}}=0$$

konstruirt. Hier, wo das zweite Glied negativ ist, muss die zweite Seite A_1B_1 des fraglichen Polygons eine der Linie OD_1 direkt entgegengesetzte Richtung erhalten. Dies erzeugt anfänglich Polygone von der Gestalt $OA_1B_1C_1$. Im Uebrigen ist das Verfahren dem früheren gleich. Man findet auch, dass die Kurve C_1Oc der für die Gleichung

$$2+2x+x^2=0$$

gefundenen gleich ist, dass aber jetzt einem Winkel φ der zweite Durchschnittspunkt der Linie OC_1 mit jener Kurve angehört. Die Kurve D_1DO nimmt eine von der früheren abweichende Gestalt an, indem dieselbe ebenfalls zweimal durch den

Digitized by Google

Nullpunkt geht und daselbst eine Schlinge bildet. Die beiden imaginären Wurzeln

$$x=1+\sqrt{-1}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)$$

und

$$x=1-\sqrt{-1}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)$$

sind jetzt durch die beiden Tangenten OD und OD' an die beiden Schenkel der Kurve C_1Oc im Nullpunkte O dargestellt.

Für den Werth $\varphi=0$, also $2\varphi=0$, fallen die drei Seiten OA_1, A_1B_1, B_1C_1 des fraglichen Polygons ebenfalls in die reelle Axe dergestalt, dass wenn die Koeffizienten a und c positiv sind und b negativ ist, OA_1 die positive, A_1B_1 die negative und B_1C_1 die positive Richtung annimmt. Die Kurve C_1Oc würde also auch hier den Nullpunkt nicht erreichen können, wenn

$$OA_1+B_1C_1=2OA_1<A_1B_1,$$

oder

$$2a<b\sqrt{\frac{a}{c}},\text{ d. i. }4a<\frac{b^2}{c}$$

wäre. Es würde alsdann auch in einer solchen Gleichung keine imaginären Wurzeln geben.

Wenn in einer quadratischen Gleichung die beiden Koeffizienten a und c entgegengesetzte Zeichen hätten; so würde, wie Taf. XI. Fig. 9. anschaulich macht; für keine der Kombinationen

$$\begin{aligned} a&=+a \quad +a \quad -a \quad -a,\\ b&=+b \quad -b \quad +b \quad -b,\\ c&=-c \quad -c \quad +c \quad +c \end{aligned}$$

der Endpunkt C_1 eines Polygons $OA_1B_1C_1$ in die direkte Richtung OD_1 des zugehörigen Winkels φ fallen können. Unter solchen Umständen gibt es eine Kurve C_1Oc von der bekannten Beschaffenheit überhaupt nicht, und es sind demnach auch keine imaginären Wurzeln vorhanden.

In Taf. XI. Fig. 10. ist die Konstruktion der vier imaginären Wurzeln der Gleichung

$$a+x^5=0$$

oder

Digitized by Google

$$a + r^5 e^{5\varphi\sqrt{-1}} = 0$$

dargestellt. Wenn $OA_1 = a$ genommen wird; so ist für irgend ein

$$x_1 = r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}},$$

welches in der Richtung OC_1 liegen soll, der Neigungswinkel C_1A_1X der zweiten und letzten Polygonalseite

$$A_1C_1 = x_1^5 = r^5 e^{5\varphi\sqrt{-1}} \text{ gleich } 5\varphi_1 = 5(C_1OX).$$

Hiernach kann man den Punkt C_1 in der Linie OC_1 unmittelbar finden. Lässt man φ von 0 bis $\frac{\pi}{4} = E_3OX$ variiren, so ergibt sich die Kurve CC_1OC_2, an deren unendlich langem Schenkel OC_2 die Linie E_3OE_2 eine Asymptote bildet. Für

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ bis } \frac{\pi}{2} = E_5OX$$

ergibt sich die Kurve C_3OC_4, an deren oberem unendlichen Schenkel OC_3 die Linie E_2OE_3 und an deren unterem unendlichen Schenkel OC_4 die Linie E_5OE_4 eine Asymptote bildet. Für

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{3\pi}{4} = E_7OX$$

ergibt sich die Kurve C_5OC_6 mit zwei unendlichen Schenkeln und den Asymptoten E_4OE_5 und E_7OE_6. Für

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ bis } \pi = X'OX$$

ergibt sich die Kurve C_7OC_8C mit Einem unendlichen Schenkel OC_7 und der dazu gehörigen Asymptote E_6OE_7. Wenn φ über π hinaus wächst; so stellen sich die genannten Kurven der Reihe nach wieder ein.

Da diese Kurven den Nullpunkt viermal und zwar dann passiren, wenn

$$5\varphi \text{ resp. } = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi;$$

also

$$\varphi \text{ resp. } = \frac{\pi}{5},\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5}$$

ist; so gibt es vier imaginäre Wurzeln. Man hat aber zu beachten, dass die von O ausgehenden Kurvenbögen zum Theil nicht durch die Durchschnitte der direkten Richtungen der Linien OC_1 und A_1C_1, sondern auch durch die Durchschnitte der rückwärts gerichteten Verlängerungen gebildet sind. Für die Durchschnitte der direkten Richtungen hat man

Digitized by Google

von $\varphi = 0$ bis $\frac{\pi}{4}$ den Kurventheil CC_1O und demnach als Richtung der ersten Wurzel die Tangente OD;

von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bis $\frac{\pi}{2}$ gar keinen Kurventheil;

von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{4}$ den Kurventheil C_3O und demnach als Richtung der zweiten Wurzel die Tangenten OD';

von $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ bis $\frac{5\pi}{4}$ gar keinen Kurventheil;

von $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ den Kurventheil OC_4 und demnach als Richtung der dritten Wurzel die Tangente OD'';

von $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ bis $\frac{7\pi}{4}$ gar keinen Kurventheil;

von $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ bis 2π den Kurventheil OC_8C und demnach als Richtung der vierten Wurzel die Tangente OD'''.

Um die absolute Quantität dieser Wurzeln zu bestimmen, braucht man hier die bekannte Kurve $D_1D_2\ldots$ nicht zu entwerfen, da, wenn die Länge von $A_1C_1 = R_1$ gesetzt wird, $R_1 = r_1{}^3$, also $r_1 = \sqrt[3]{R_1}$ und für die fraglichen Wurzeln $R_1 = a$, also $r_1 = \sqrt[3]{a}$ ist.

XIX.

Beweis der Existenz von n Wurzeln in jeder Glichung des $n$ten Grades und Untersuchungen über die Natur einer solchen Gleichung.

Von

Herrn H. Scheffler,

Bauconducteur bei den Herzogl. Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Im sechsten Theile dieses Archives, Nr. XXXV., hat Herr Dr. Wittstein die geometrische Bedeutung des Beweises von Cauchy über des Vorhandensein von mindestens Einer Wurzel in jeder algebraischen Gleichung näher nachgewiesen. Hierdurch ist die Eleganz jenes Beweises noch bedeutend erhöhet. Derselbe ist aber ein indirekter Beweis, und ausserdem wird dadurch nicht unmittelbar das ganze Faktum, worauf es eigentlich ankommt, nämlich dass jede algebraische Gleichung vom $n$ten Grade n Wurzeln haben müsse, dargethan. Um diesen letzteren Satz abzuleiten, bedarf es nun immer noch ganz besonderer analytischer Combinationen, bei welchen die geometrischen Beziehungen nicht so nahe liegen dürften, als bei dem Beweise des ersteren Satzes. Die Wichtigkeit des fraglichen Satzes für die Algebra, und die Berühmtheit, welche derselbe dadurch erlangt hat, dass er lange Zeit ohne Beweis geblieben ist, werden es daher rechtfertigen, dass ich noch einen anderen und zwar direkten Beweis liefere, welcher den in Rede stehenden Satz sofort in seiner grössten Allgemeinheit aufklärt.

Die gegebene Gleichung vom $n$ten Grade, nach aufsteigenden Potenzen von x geordnet, sei, nachdem durch den Koeffizienten des höchsten Gliedes dividirt ist,

Digitized by Google

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + x^n = F(x) = 0 \ldots . \quad (1)$$

Hierin mögen die Koeffizienten A_0, A_1.. beliebige reelle oder imaginäre Werthe haben, also allgemein von der Form

$$A = a e^{\alpha \sqrt{-1}} = a \cos \alpha + a \sin \alpha . \sqrt{-1}$$

sein, worin a eine absolute Quantitität bezeichnet, α jedoch nur reell zu sein braucht, sonst aber sowohl positiv, wie negativ sein kann. Die Glieder jener Gleichung brauchen nur durch das Additionszeichen verbunden zu werden, indem man z. B. nur

$$-A = -a e^{\alpha \sqrt{-1}} = +a e^{(\pi + \alpha)\sqrt{-1}}$$

zu setzen braucht.

Die allgemeine Form, in welcher man sich irgend einen Werth für x denken kann, ist

$$x = r e^{\varphi \sqrt{-1}} = r \cos \varphi + r \sin \varphi . \sqrt{-1},$$

worin r ebenfalls nur eine absolute Quantität zwischen 0 und $+\infty$, φ jedoch jeden reellen Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ darstellt. Durch Substitution dieser Ausdrücke für x und für die Koeffizienten A in Gl. (1) wird dieselbe

$$a_0 e^{\alpha_0 \sqrt{-1}} + a_1 r e^{(\alpha_1 + \varphi)\sqrt{-1}} + a_2 r^2 e^{(\alpha_2 + 2\varphi)\sqrt{-1}} + a_3 r^3 e^{(\alpha_3 + 3\varphi)\sqrt{-1}} + \ldots .$$

$$+ a_{n-1} r^{n-1} e^{[\alpha_{n-1} + (n-1)\varphi]\sqrt{-1}} + r^n e^{n\varphi \sqrt{-1}} = F(r e^{\varphi \sqrt{-1}}) = 0 \ldots . (2)$$

oder wenn man den reellen Theil vom imaginären trennt und den ersteren mit $f_1(r, \varphi)$ und den letzteren mit $f_2(r, \varphi) . \sqrt{-1}$ bezeichnet,

$$a_0 \cos \alpha_0 + a_1 r \cos(\alpha_1 + \varphi) + a_2 r^2 \cos(\alpha_2 + 2\varphi) + \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots + a_{n-1} r^{n-1} \cos[\alpha_{n-1} + (n-1)\varphi] + r^n \cos(n\varphi)$$

$$+ \{a_0 \sin \alpha_0 + a_1 r \sin(\alpha_1 + \varphi) + a_2 r^2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots + a_{n-1} r^{n-1} \sin[\alpha_{n-1} + (n-1)\varphi] + r^n \sin(n\varphi)\} \sqrt{-1}$$

$$= f_1(r, \varphi) + f_2(r, \varphi) . \sqrt{-1} = 0 \ldots \ldots . \quad (3)$$

Wir stellen uns jetzt unmittelbar auf den Boden der geometrischen Anschauung, von welchem jeder arithmetische Gedanke doch nur eine Abstraktion ist, und welcher sich deshalb vorzüglich dazu eignet, die Jdeen zu fixiren, wiewohl man, wenn man

Digitized by Google

bloss mit Kombinationen reiner Begriffe operiren wollte, dieselben Resultate auch ohne geometrische Versinnlichung, aber mit einem grösseren Aufwande von Formeln und Erläuterungen erzielen könnte.

Es ist klar und könnte leicht streng gezeigt werden, dass die Funktionen F, f_1, f_2 in Gl. (2) und (3) sowohl für r, wie für φ, wenn man diese Grössen als Veränderliche betrachtet, stetig sind. Nimmt man daher für φ irgend einen bestimmten Werth φ_1 an, behandelt darauf in Gl. (2) oder (3) φ_1 wie eine Konstante und lässt bloss r von 0 bis ∞ variiren; so muss der zweite Endpunkt des durch F dargestellten Polygons (s. den früheren Aufsatz Nr. XVIII. über die Konstruktion der imaginären Wurzeln einer Gleichung) eine stetige Kurve AC_1 (Taf. XII. Fig. 1.) beschreiben. Auf rechtwinklige Koordinaten bezogen, ist f_1 aus Gl. (3) die vom Nullpunkte aus in positiver oder negativer Richtung der reellen Axe gemessene Abszisse, und f_2 die zugehörige Ordinate für irgend einen Punkt dieser Curve. Wenn OA das bekannte Glied

$$ae^{\alpha\sqrt{-1}} = a\cos\alpha + a\sin\alpha.\sqrt{-1}$$

der gegebenen Gleichung darstellt; so muss der Anfangspunkt jener Kurve nothwendig im Punkte A liegen; von diesem Punkte aus erstreckt sich dieselbe aber (für $r=\infty$) ins Unendliche.

B_1 sei ein Punkt dieser Curve, für welche $\varphi=\varphi_1$ und $r=r_1$ ist. Behandelt man nun in der gegebenen Gleichung diesen Werth r_1 für r als Konstante und lässt bloss den Winkel φ vom Werthe φ_1 an bis zum Werthe $2n\pi+\varphi_1$ wachsen; so muss der Punkt B_1 ebenfalls eine stetige Kurve B_1B_2 beschreiben. Da für keinen dieser endlichen Werthe von φ_1 die Gleichung (2) oder (3) einen unendlich langen Strahl ergeben kann; so müssen alle Punkte dieser Kurve B_1B_2, insofern r_1 endlich ist, in endlichen Abständen vom Punkte A liegen. Da aber für $\varphi=2n\pi+\varphi_1$ die gegebene Gleichung durchaus dieselben Werthe liefert, wie für $\varphi=\varphi_1$; so muss der letzte Punkt der fraglichen Kurve wieder mit dem ersten B_1 zusammenfallen; es muss also B_1B_2 eine geschlossene Kurve sein (die übrigens mehr als Eine ganze Umwindung machen kann), welches auch der Werth von r_1 sein möge.

Jetzt sei Ab_1c_1 eine Kurve, welche man statt der AB_1C_1 erhält, wenn man dem Winkel φ den von φ_1 nur unendlich wenig verschiedenen Werth φ' gibt, und r wiederum von 0 bis ∞ wachsen lässt. Diese Kurve wird in unendlicher Nähe von AB_1C_1 liegen. Die kurzen Verbindungsstriche zwischen beiden mögen die stetigen Wege andeuten, welche bei dieser Veränderung die Punkte B_1, C_1 ... der Kurve AB_1C_1 durchlaufen haben, um in die Punkte b_1, c_1 ... der Kurve Ab_1c_1 zu gelangen indem die gleichnamigen Punkte in beiden stets Ein und demselben Werthe von r entsprechen.

Es leuchtet nun ein, dass, wenn man sich alle Kurven von unendlicher Zahl denkt, welche bei einem stetigen Wachsen des Winkels φ von φ_1 bis φ' in vorstehender Weise erzeugt werden und die allmähligen Uebergänge von AB_1C_1 zu Ab_1c_1

Digitized by Google

bilden, jedenfalls alle diejenigen Punkte der Koordinatenebene von diesen verschiedenen Kurven getroffen werden müssen, welche in den mit Strichen ausgefüllten Flächenräumen Ap, pm, $mB_1C_1c_1b_1m$ zwischen jenen beiden Kurven liegen. Unter diesen Flächenräumen sind im Allgemeinen diejenigen verstanden, welche von A aus zwischen zwei Durchschnittspunkten, wie A und p, p und m der beiden Kurven liegen, während der letzte Raum $m\ C_1\ c_1$ an der obersten Seite von dem Wege $C_1\ c_1$ des Punktes C_1 begränzt ist. Durch diese Behauptung wird nicht ausgeschlossen, dass durch die fragliche Variation auch noch andere, ausserhalb der gedachten Flächenräume liegende Punkte der Koordinatenebene berührt werden können, indem sich z. B. die Kurve $A\ B_1\ C_1$ bei ihrem Uebergange in $A\ b_1\ c_1$ im unteren Theile Am noch etwas weiter nach rechts über den betreffenden Bogentheil der Kurve $A\ b_1\ c_1$ ausgebaucht haben und dann erst durch rückgängige Bewegung ihrer Punkte in die Lage $A_1mb_1c_1$ gekommen sein kann.

Ist nun für irgend einen anderen Werth φ_2 von φ, welcher um eine endliche Grösse von φ_1 verschieden ist, in vorerwähnter Weise die Kurve $A\ B_2\ C_2$ erzeugt und $C_1\ C_2$ der Weg, welchen der Punkt C_1 beschreiben würde, wenn man unter Festhaltung des dazu gehörigen Werthes von r nur den Winkel φ von φ_1 bis φ_2 hätte wachsen lassen; so müssen bei dem stetig gedachten Uebergange der Kurve $A\ B_1\ C_1$ in $A\ B_2\ C_2$ wenigstens alle diejenigen Punkte der Koordinatenebene getroffen sein, welche zwischen diesen beiden und der Kurve $C_1\ C_2$ liegen. Dass man nicht etwa die in dem Raume $C_1\ M\ C_2$ liegenden Punkte durch die Annahme ausschliessen kann, dass sich die Kurve $A\ B_1\ C_1$ durch eine Drehung von links nach rechts in die Lage $A\ M\ B_2\ C_2$ bewegt hätte, (was bei der entworfenen Figur 1. auf Taf. XII. fast eine ganze Umwälzung um den Punkt A erfordern würde) leuchtet ein, weil der Uebergang des Punktes nach C_2 durch die Kurve $C_1\ C_2$ ausdrücklich vorausgesetzt ist.

Man kann sich diese Variationen der Kurve $A\ B_1\ C_1$ durch die Idee der Bewegung eines biegsamen und zugleich elastischen Fadens, dessen Einer Endpunkt stets in A festgehalten wird, gut versinnlichen. Dieser Faden kann sich auch für irgend einen Werth von φ in einer geraden Linie ausstrecken und auch in dieser Geraden mehrere Hinundhergänge bilden, was der Allgemeinheit des vorstehenden Räsonnements keinen Abbruch thut.

Wenn gezeigt wird, dass dieser Faden bei der Variation von φ zwischen den Gränzen 0 und $2n\pi$ für n Werthe von $x=re^{\vartheta\sqrt{-1}}$ $n$mal durch den Nullpunkt O gehen muss; so ist damit bewiesen, dass die gegebene Gleichung jederzeit n Wurzeln hat, welche sich bei fortgesetztem Wachsthume des Winkels φ über die Gränze $2n\pi$ periodisch wiederholen.

Bezeichnen wir die goniometrische Tangente des Neigungswinkels für irgend ein Element der Kurve $A_1\ B_1\ C_1$ oder für die Berührungslinie dieser Kurve in irgend einem Punkte, dessen rechtwinklige Koordinaten nach Gl. (3) $f_1(r, \varphi)$ und $f_2(r, \varphi)$ sind,

Digitized by Google

worin die Grösse r allein die Rolle einer veränderlichen spielt, mit β; so hat man bekanntlich

$$\text{tang}\beta = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial r}}{\frac{\partial f_1}{\partial r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Je grösser r wird, desto mehr überwiegt das höchste Glied $x^n = r^n e^{n\varphi\sqrt{-1}}$ in der gegebenen Gleichung alle übrigen, und wird zuletzt unendlich vielmal grösser, als alle übrigen zusammengenommen. Für $r = \infty$ verschwinden also diese letzteren Glieder gegen x^n und man hat alsdann

$$F(x) = x^n = r^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} = r^n \cos(n\varphi) + r^n \sin(n\varphi).\sqrt{-1}$$

$$f_1(r,\varphi) = r^n \cos(n\varphi) \qquad f_2(r,\varphi) = r^n \sin(n\varphi)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = nr^{n-1}\cos(n\varphi) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial r} = nr^{n-1}\sin(n\varphi)$$

also

$$\text{tang}\,\beta = \frac{nr^{n-1}\sin(n\varphi)}{nr^{n-1}\cos(n\varphi)} = \text{tang}\,(n\varphi),$$

oder

$$\beta = n\varphi \ldots\ldots (5)$$

Dieses Resultat drückt aus, dass jede Kurve, wie $A\,B_1\,C_1$, in ihrem oberen Theile, je weiter sich ihre Punkte vom Nullpunkte O entfernen, sich immer mehr und mehr einer Richtung nähert, deren Neigung β gegen die positive reelle Axe das $n$fache desjenigen Werthes von φ ist, für welchen jene Kurve entworfen ist. In unendlicher Entfernung wird diese Kurve also parallel zu der eben genannten Richtung.

Ausserdem erhellet, dass, wenn $\underset{m}{A}x^m = \underset{m}{a}r^m e^{(\underset{m}{\alpha}+m\varphi)\sqrt{-1}}$ das niedrigste auf das bekannte Glied $\underset{m}{A}$ in Gl. (1) folgende Glied ist, dessen Koeffizient $\underset{m}{A}$ nicht gleich null ist, dieses Glied alle höheren unendlich überwiegen wird, sobald man nur r klein genug annimmt. Für ein solches unendlich kleines r hat man daher

$$F(x) = \underset{0}{A} + \underset{m}{A}x^m = \underset{0}{a}\cos\underset{0}{\alpha} + \underset{m}{a}r^m\cos(\underset{m}{\alpha}+m\varphi)$$

$$+ [\underset{0}{a}\sin\underset{0}{\alpha} + \underset{m}{a}r^m\sin(\underset{m}{\alpha}+m\varphi)]\sqrt{-1},$$

$$f_1(r,\varphi) = \underset{0}{a}\cos\underset{0}{\alpha} + \underset{m}{a}r^m\cos(\underset{m}{\alpha}+m\varphi),\quad f_2(r,\varphi) = \underset{0}{a}\sin\underset{0}{\alpha} + \underset{m}{a}r^m\sin(\underset{m}{\alpha}+m\varphi):$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \underset{m}{mar^{m-1}}\cos(\alpha + m\varphi), \quad \frac{\partial f_2}{\partial r} = \underset{m}{mar^{m-1}}\sin(\alpha + m\varphi);$$

also

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\underset{m}{mar^{m-1}}\sin(\alpha + m\varphi)}{\underset{m}{mar^{m-1}}\cos(\alpha + m\varphi)} = \operatorname{tang}(\alpha + m\varphi),$$

$$\beta = \underset{m}{\alpha} + m\varphi \ldots\ldots (5^a)$$

Hiernach verlässt also eine Kurve wie AB_1C_1 den gemeinschaftlichen Anfangspunkt aller Kurven A in einer Richtung, welche sich gegen die positive reelle Axe unter dem Winkel $\underset{m}{\alpha} + m\varphi$ oder gegen die Verlängerung der Linie OA unter dem Winkel $m\varphi$ neigt.

Nun sei in Taf. XII. Fig. 2. AC diejenige Kurve, welche man nach dem vorstehenden Verfahren für den Werth $\varphi = 0$ erhält, und C sei ein in unendlicher Entfernung von O liegender Punkt dieser Kurve, für welchen man die Richtung der Letzteren parallel zu der unter dem Winkel $n\varphi$ geneigten geraden Linie denken kann. Da hier $\varphi = 0$, also auch $n\varphi = 0$; so ist jene Kurve in C der reellen Axe OX selbst parallel. Ob die Kurve AC in die reelle Axe ganz hineinfällt, oder bei C um einen endlichen oder unendlichen Abstand über oder unter OX liegt, ist völlig gleichgültig, auch ob sich diese Kurve, ehe sie nach C gelangt, in mehreren Windungen um den Nullpunkt O schlingt.

Lässt man jetzt φ von 0 bis zum Werth $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n}$ wachsen; so erhält man Kurven, welche, indem sie sämmtlich von A ausgehen, in ihren unendlich entfernten Theilen Richtungen annehmen, die mit der positiven reellen Axe OX immer grösser werdende Winkel $n\varphi$ einschliessen. Der Werth dieses Winkels $n\varphi$ durchläuft hierbei alle Werthe von $n.0 = 0$ bis $n.\frac{2\pi}{n} = 2\pi$, also alle in den vier Quadranten liegende Neigungen, und es ergibt sich mithin für $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n}$ eine Kurve AC_1, welche in ihren unendlich entfernten Theilen C_1 wiederum parallel zur positiven Axe OX wird. Der Punkt C für $r = \infty$ beschreibt hierbei, bis er nach C_1 gelangt, von rechts nach links einen Weg in der Richtung des Pfeils CD, welcher bis auf den Abstand der beiden Kurven AC und AC_1 zwischen ihren unendlich entfernten parallelen Theilen einer ganzen Umdrehung von 360° gleich ist. Die Tangente des Anfangspunktes A, deren Neigung gegen die positive Axe für $\varphi = 0$ den Werth $\underset{m}{\alpha}$ (Gl. 5^a) besitzt, hat sich während dieser Periode um den Winkel $\frac{m}{n}2\pi$ nach derselben Seite herum weitergedrehet. Diese Drehung kann, da $m < n$, nur einen Theil $\frac{m}{n}$ einer

Digitized by Google

ganzen Umdrehung ausmachen, wenn nicht gerade eine binomische Gleichung gegeben wäre, wofür man $m=n$ hat.

Bei dieser Bewegung der Kurve AC müssen alle Punkte der Koordinatenebene berührt sein, welche in dem unendlichen Flächenraum $ACD...C_1A$ liegen. Da aber die Kurve AC_1 nicht mit der ersteren AC zusammenzufallen braucht; so ist es nicht nothwendig, dass unter den berührten Punkten auch der Nullpunkt O sei, d.h. es ist nicht nothwendig, dass die Gleichung eine Wurzel x_1 besitze, für welche φ zwischen 0 und $\frac{2\pi}{n}$ liegt. Wenn der Punkt O von keiner der durch jene Variation entstandenen Kurven getroffen ist; so wird die Kurve AC_1 gegen denselben etwa die in Taf. XII. Fig. 2. angegebene Lage AEC_1 haben. Ist derselbe aber getroffen und zwar nur ein einziges Mal; so wird er auf der entgegengesetzten Seite der Kurve AC_1 liegen, indem diese Kurve dann etwa den Zug AE_1C_1 verfolgt. Es wäre übrigens im Allgemeinen möglich, dass der Nullpunkt durch die Bewegung der fraglichen Kurve in die Lage AEC_1 0, 2, 4, 6..., überhaupt eine gerade Anzahl von Malen, bei der Bewegung in die Lage AE_1C_1 jedoch 1, 3, 5, 7..., überhaupt eine ungerade Anzahl von Malen und mindestens Ein Mal getroffen sei, dass es also bei der ersten Lage $2m$ und bei der letzteren Lage $2m+1$ Wurzeln gäbe, für welche der Werth von φ zwischen 0 und $\frac{2\pi}{n}$ läge.

Lässt man jetzt φ von $\frac{2\pi}{n}$ bis $\frac{4\pi}{n}$ wachsen; so macht die Kurve AC_1 wiederum eine Umwälzung, welche der der Kurve AC ähnlich ist. Für $\varphi=\varphi_2=\frac{4\pi}{n}$ erhalte man in Taf. XII. Fig. 3. die Kurve AC_2, welche wiederum bei C_2 parallel zur Axe OX wird, indem man hierfür $n\varphi_2=n.\frac{4\pi}{n}=4\pi$ hat. Gab es nun innerhalb der Gränzen 0 und $\frac{2\pi}{n}$ für φ Eine Wurzel, oder konnte die Kurve AC_1 in Taf. XII. Fig. 2. die Lage AE_1C_1 rechts vom Nullpunkte haben; so kann jetzt die neue Kurve AC_2 in Beziehung zum Nullpunkte O eine Lage wie AEC_1 in Taf. XII. Fig. 2. haben, wenn es keine oder nur eine gerade Anzahl von Wurzeln innerhalb der Gränzen $\frac{2\pi}{n}$ und $\frac{4\pi}{n}$ für φ gibt; dagegen eine Lage, wie AE_1C_1 in Taf. XII. Fig. 2., wenn es auch innerhalb der letzteren Gränzen Eine oder eine ungerade Anzahl von Wurzeln gibt. Gab es indessen innerhalb der Gränzen 0 und $\frac{2\pi}{n}$ für φ keine Wurzel, so dass also die Kurve AC_1 die Lage AEC_1 in Taf. XII. Fig. 2. haben musste; so muss, wenn es auch innerhalb der Gränzen $\frac{2\pi}{n}$ und $\frac{4\pi}{n}$ für φ keine Wurzel gibt, die neue Kurve AC_2 eine der in Taf. XII. Fig. 3. dargestellten ähnliche Lage haben, wobei sie den Nullpunkt an der linken Seite mit zwei Windungen umschlingt; dagegen muss, wenn es innerhalb

Digitized by Google

der letzteren Gränzen Eine oder überhaupt eine ungerade Menge von Wurzeln gibt, die neue Kurve AC_2, nachdem sich die Kurve AEC_1 aus Taf. XII. Fig. 2. bei ihrer Bewegung Ein Mal oder eine ungerade Menge von Malen durch den Nullpunkt gezogen hat, diesen Punkt O an der linken Seite noch mit Einer Windung umschlingen, ähnlich der Kurve AEC_1 in Taf. XII. Fig. 2.

In dieser Weise lässt man den Winkel φ periodisch von dem Einen der durch 0, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, ... $\frac{2(n-1)\pi}{n}$, 2π oder resp. durch 0, φ_1, φ_2.... φ_{n-1}, φ_n dargestellten Gränzwerthe zum anderen wachsen. Von den hierdurch entstehenden Kurven AC, AC_1 AC_2... ... AC_{n-1}, AC_n, welche sämmtlich von A ausgehen, und, nachdem sie ganze Umwälzungen gemacht haben, immer wieder in den Punkten C, C_1, C_2... der positiven Axe OX parallel werden, umschlingt jede folgende den Nullpunkt ebensoviel Mal, als die vorhergehende, wenn es innerhalb der betreffenden Gränzen von φ Eine Wurzel gibt, dagegen Ein Mal mehr, als die vorhergehende, wenn es innerhalb dieser Gränzen keine Wurzel, und ferner kann sie den Nullpunkt höchstens p mal weniger, als die vorhergehende umschlingen, wenn es innerhalb jener Gränzen $(p+1)$ Wurzeln gibt. Hieraus folgt auch, dass, wenn man den Winkel φ sofort von 0 bis $\frac{2p\pi}{n}$ hat wachsen lassen, die letzte Kurve AC_p den Nullpunkt an der linken Seite $p$mal mehr umschlingen wird als die erste AC, wenn es innerhalb jener Gränzen keine Wurzel gibt, und dass sie denselben mindestens $(p-q)$mal mehr umschlingen muss, wenn es in jenem Zwischenraum q Wurzeln gibt, dass also eine gleiche Anzahl von Umschlingungen wie bei AC nur dann möglich ist, wenn es zwischen den fraglichen Gränzen p Wurzeln gibt. Dieser Satz lässt sich in aller Strenge einsehen und erleidet für keine denkbare Figur der fraglichen Kurven eine Einschränkung, wenngleich derselbe noch einiger weiter unten zu gebenden Erläuterungen für gewisse Fälle bedürfen wird.

Nun muss aber nach der Natur der gegebenen Gleichung für $\varphi=\varphi_n=\frac{2n\pi}{n}=2\pi$ die Kurve AC_n genau mit der ursprünglichen Kurve AC für $\varphi=0$ zusammenfallen; die AC_n muss also genau ebensoviel Umschlingungen um den Nullpunkt besitzen, wie AC. Daraus folgt ohne Weiteres, dass bei der Variation des Winkels φ von 0 bis 2π die Bewegung der Kurve AC den Nullpunkt mindestens $n$mal getroffen haben, oder dass es innerhalb dieser Gränzen mindestens n Wurzeln der Gleichung (2) geben muss. Es wäre nur denkbar, dass die Menge dieser Wurzeln noch um eine gerade Anzahl grösser sei als n, was jedoch aus anderen Gründen, die wir sogleich näher betrachten wollen, unmöglich ist.

In Taf. XII. Fig. 5. sei AmC_1 die Kurve, welche für irgend einen bestimmten Werth von φ dadurch erzeugt ist, dass man r von 0 bis

Digitized by Google

∞ hat wachsen lassen. Anc_1 sei eine unendlich benachbarte Kurve, welche man für den Werth $\varphi + \partial\varphi$ des Winkels φ in derselben Weise erhält. m und n oder C_1 und c_1 seien Punkte in diesen beiden Kurven, welche Ein und demselben Werth von r angehören, also mn oder $C_1 c_1$ ein Element der Bahn, welche resp. der Punkt m oder der Punkt C_1 beschreiben würde, wenn man den dazugehörigen Werth von r konstant erhalten und den Winkel φ um den kleinen Zuwachs $\partial\varphi$ vermehrt hätte. Durch Striche sind in der Figur die Wege angedeutet, welche alle solche Punkte wie m, denen Ein und derselbe Werth von r angehört, bei der Bewegung der Kurve AmC_1 in die Lage Anc_1 beschrieben haben. Es wird behauptet, dass alle diese Wege, wie mn, $C_1 c_1$ u. s. w. auf Ein und derselben Seite der Tangenten der Kurve AmC_1 resp. in den Punkten m, C_1 ... liegen, wobei man sich diese Kurve in der Richtung von A her durchlaufen und die Tangenten immer nach vorwärts gezogen denkt, dass also die Kurve Anc_1 in der vorstehenden Auffassung in ihrer ganzen Ausdehnung entweder auf der linken oder der rechten Seite der Kurve AmC_1 liegt.

Denn angenommen, bei der Bewegung der Kurve AC_1 sei ein Theil ihrer Punkte nach der Einen und ein anderer Theil dieser Punkte nach der entgegengesetzten Seite der fraglichen Tangenten fortgerückt; so müssen sich die beiden Kurven AC_1 und Ac_1 nach einer in Taf. XII. Fig. 6. dargestellten Weise etwa bei m durchschneiden. Hierbei ist es nur möglich entweder

1) dass der ursprünglich der Kurve AC_1 angehörige Punkt m gar keine Bewegung gemacht hat, dass also die beiden Punkte m und n aus Taf. XII. Fig. 5. für Ein und denselben Werth von r zusammenfallen, oder

2) dass der Punkt m nach Taf. XII. Fig. 7. in der Richtung mn der zweiten Kurve Ac_1 fortgerückt ist, womit dann nothwendig verbunden ist, dass auch ein Punkt m der ersteren Kurve AC_1 sich in der Richtung $m\overset{2}{m}$ ebenderselben Kurve AC_1 fortgeschoben hat. Die Punkte m, $\overset{2}{m}$, $\overset{3}{m}$, $\overset{1}{m}$ der Kurve AC_1 in der Nachbarschaft des Durchschnittes m müssten dann die Wege mn, $\overset{1}{m}\overset{1}{n}$, $m\overset{2}{m}$, $\overset{3}{m}\overset{3}{n}$ durchlaufen haben.

Um diese Bedingungen ad 1) und 2 analytisch auszudrücken, beachte man, dass

$$f_1(r,\varphi) = \underset{0}{a}\cos\underset{0}{\alpha} + \underset{1}{ar}\cos(\underset{1}{\alpha}+\varphi) + \underset{2}{ar^2}\cos(\underset{2}{\alpha}+2\varphi) + \ldots + r^n\cos(n\varphi) \ldots (6)$$

$$f_2(r,\varphi) = \underset{0}{a}\sin\underset{0}{\alpha} + \underset{1}{ar}\sin(\underset{1}{\alpha}+\varphi) + \underset{2}{ar^2}\sin(\underset{2}{\alpha}+2\varphi) + \ldots + r^n\sin(n\varphi) \ldots (7)$$

resp. die rechtwinklige Abszisse und Ordinate irgend eines Punktes der Kurve AC_1 darstellt. Schreitet man in dieser Kurve von einem Punkte, welchem ein bestimmter Werth von r angehört, z. B vom Punkte $\overset{2}{m}$ zu einem benachbarten Punkte m, welchem

Digitized by Google

$r+\partial r$ angehört, fort, und projizirt diesen Weg mm_2 auf die Richtungen der beiden rechtwinkligen Koordinatenaxen; so erhält man für diese Projektionen Δf_1 und Δf_2, indem man berücksichtigt, dass φ konstant ist, und indem man aus den Entwickelungen von

$$\Delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial r} \cdot \partial r + \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r^2}{1.2} + \text{u. s. w.}$$

$$\Delta f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial r} \cdot \partial r + \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r^2}{1.2} + \text{u. s. w.}$$

nur das erste Glied nimmt, welches, so lange der darin vorkommende erste Differenzialkoeffizient irgend einen von Null verschiedenen Werth besitzt, alle übrigen Glieder bei genügender Kleinheit von ∂r überwiegt,

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} \cdot \partial r = [a_1 \cos(\alpha_1 + \varphi) + 2a_2 r \cos(\alpha_2 + 2\varphi) + 3a_3 r^2 \cos(\alpha_3 + 3\varphi) + \ldots + n a_n r^{n-1} \cos(n\varphi)]\partial r \ldots (8)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} \cdot \partial r = [a_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + 2a_2 r \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + 3a_3 r^2 \sin(\alpha_3 + 3\varphi) + \ldots + n a_n r^{n-1} \sin(n\varphi)]\partial r \ldots (9)$$

Bei dem Uebergange eines Punktes m der Kurve AC_1 zu dem korrespondirenden Punkte n der Kurve Ac_1, welchen beiden Punkten Ein und derselbe Werth von r angehört, erhält man für die rechtwinkligen Projektionen des Weges mn in ähnlicher Weise wie vorhin, indem man beachtet, dass hierfür r konstant ist,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \cdot \partial \varphi = -[a_1 r \sin(\alpha_1 + \varphi) + 2a_2 r^2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + 3a_3 r^3 \sin(\alpha_3 + 3\varphi) + \ldots + n a_n r^n \sin(n\varphi)]\partial \varphi \ldots (10)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \cdot \partial \varphi = [a_1 r \cos(\alpha_1 + \varphi) + 2a_2 r^2 \cos(\alpha_2 + 2\varphi) + 3a_3 r^3 \cos(\alpha_3 + 3\varphi) + \ldots + n a_n r^n \cos(n\varphi)]\partial \varphi \ldots (11)$$

Aus den letzten vier Gleichungen folgen die beiden wichtigen allgemeinen Beziehungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial f_2}{\partial r} \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = r \frac{\partial f_1}{\partial r} \ldots\ldots\ldots (13)$$

Soll nun die erste der beiden obigen Bedingungen erfüllt sein, also der Durchschnittspunkt m der beiden Kurven bei der Bewegung der Kurve AC_1 in die Lage Ac_1 gar keine Verrük-

Digitized by Google

kung erlitten haben (Taf. XII. Fig. 6.); so muss offenbar für diesen Punkt

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0 \ldots\ldots (14)$$

und demnach wegen (12) und (13), wenn nicht etwa $r=0$ ist, was bloss dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte A aller Kurven entsprechen würde,

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial r} = 0 \ldots\ldots (15)$$

sein.

Soll jedoch die zweite jener beiden Bedingungen sich erfüllen, also ein Punkt der Kurve AC_1 wie m in Taf. XII. Fig. 7., durch den Uebergang des ihm zugehörigen r in $r+\partial r$ nach demselben Orte m dieser Kurve gelangen, nach welchem derselbe durch den Uebergang von φ in $\varphi+\partial\varphi$ oder durch die Bewegung der Kurve AC_1 in die Lage Ac_1 gelangt; so muss für einen solchen Punkt offenbar

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial f_1}{\partial r} \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial f_2}{\partial r} \ldots\ldots (16)$$

sein. Substituirt man hierin für $\frac{\partial f_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r}$ ihre aus (12) und (13) sich ergebenden Werthe; so führen die Formeln (16) auf die Bedingungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -r^2 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = -r^2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \ldots\ldots (17)$$

oder wenn man in (16) für $\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$ ihre Werthe aus (12) und (13) setzt, auf die Bedingungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = -r^2 \frac{\partial f_1}{\partial r} \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial r} = -r^2 \frac{\partial f_2}{\partial r} \ldots\ldots (18)$$

Diese Forderungen aus (17) und (18) kommen immer, selbst wenn $r=0$ ist, also auch für den gemeinschaftlichen Anfangspunkt A aller Kurven, auf

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0 \ldots\ldots (19)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial r} = 0 \ldots\ldots (20)$$

hinaus. Diese letzteren Forderungen enthalten übrigens schon einen Widerspruch gegen die Voraussetzung, da, wenn dieselben erfüllt sind, der Punkt m überhaupt gar keine Bewegung ge-

Digitized by Google

macht haben kann, woraus folgt, dass ein Fortschieben eines solchen Punktes bei dem Uebergange der Kurve AC_1 in die Kurve Ac_1 in der Richtung der ersteren Kurve AC_1 unmöglich ist, und dass man die Untersuchung auf die Voraussetzung der durch Taf. XII. Fig. 6. dargestellten ersten Bedingung zu beschränken hat, deren analytischer Ausdruck, wennicht $r=0$, also wenn es sich nicht um den Anfangspunkt A handelt, durch eben dieselben Formeln gegeben ist.

Nun hat man aber zu erwägen, dass wenn die ersten Differenzialkoeffizienten von f_1 und f_2 sowohl für φ, wie für r gleich null sein müssen, was in jeder Weise unerlässlich ist, das erste Glied in der Reihenentwickelung für Δf_1 und Δf_2 sowohl in Beziehung zu φ, wie zu r gänzlich verschwindet, und demzufolge nicht mehr die übrigen Glieder dergestalt überwiegen kann, dass man dieselben gegen jenes erste Glied vernachlässigen dürfte. Es kommt aber, damit die erste der beiden obigen Bedingungen erfüllt werde, streng darauf an, dass

$$\frac{\Delta f_1}{\partial \varphi} . \partial \varphi = 0 \text{ ung } \frac{\Delta f_2}{\partial \varphi} . \partial \varphi = 0 \ldots (21)$$

werde, und damit die zweite Bedingung erfüllt werde, dass

$$\frac{\Delta f_1}{\partial \varphi} . \partial \varphi = \frac{\Delta f_1}{\partial r} . \partial r \text{ und } \frac{\Delta f_2}{\partial \varphi} . \partial \varphi = \frac{\Delta f_2}{\partial r} . \partial r \ldots\ldots (22)$$

sei. Dies führt nun zuvörderst zu den vorstehend entwickelten Forderungen, wonach die ersten Differenzialkoeffizienten gleich null werden müssen, unter solchen Umständen aber weiter zu der Forderung, dass auch die zweiten Differenzialkoeffizienten gleich null werden müssen, dann aber auch, dass die dritten, vierten und alle folgenden Differenzialkoeffizienten verschwinden müssten. Letztetes ist aber unmöglich, da die $n$ten Differenzialkoeffizienten in Beziehung zu r, nämlich

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial r^n} = 1.2.3 \ldots . (n-1) n \cos (n\varphi) \ldots\ldots (23)$$

$$\frac{\partial^n f_2}{\partial r^n} = 1.2.3 \ldots . (n-1) n \sin (n\varphi) \ldots\ldots (24)$$

Grössen sind, welche für keinen Werth von r und φ gleichzeitig gleich null werden können.

Es ist also schlechterdings unmöglich, dass zwei benachbarte Kurven, wie AC_1 und Ac_1, einen Punkt m miteinander gemein haben können, mit Ausnahme des Anfangspunktes A, für welchen die erste der beiden obigen Bedingungen dadurch realisirt wird, dass $r=0$ ist, wodurch denn auch vermöge der Beziehungen (12) und (13) $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}=0$ und $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}=0$, und überhaupt, wie leicht zu zeigen,

$\frac{\Delta f_1}{\partial \varphi}=0$ und $\frac{\Delta f_2}{\partial \varphi}=0$, nicht aber $\frac{\Delta f_1}{\partial r}=0$ und auch nicht $\frac{\Delta f_2}{\partial r}=0$ wird. Noch viel weniger können sich zwei benachbarte Kurven in einem korrespondirenden Punkte berühren, da dies das Zusammenfallen sogar von zwei Paaren solcher Punkte voraussetzen würde.

Hieraus folgt die Richtigkeit der früheren Behauptung, dass die Kurve Ac_1 in ihrer ganzen Ausdehnung auf Ein und derselben Seite von AC_1 liegen muss, und ferner, dass die ganze Bewegung dieser Kurve bei fortgesetztem Wachsen von φ stets in demselben Sinne herum erfolgen muss, weil ja ein Rückwärtsschreiten nothwendig den Durchschnitt mit unendlich benachbarten Kurven oder wenigstens eine Berührung in korrespondirenden Punkten zur Folge haben müsste, auch hat man gesehen, dass bei dieser Bewegung kein Punkt der Kurve AC_1 längs ihrer eigenen Richtung oder Tangente fortzuschreiten vermag.

Nun ist klar, dass die Kurve AC_1 sich selbst durchschneiden kann, indem sie wie in Taf. XII. Fig. 5. eine Schlinge bildet. Dieser Fall tritt ein, wenn für zwei verschiedene Werthe von r bei demselben Werthe von φ sowohl die Funktion f_1, wie f_2 dieselben Werthe annimmt. Alsdann wird auch die Kurve Ac_1 sich selbst und die AC_1 durchschneiden; allein es leuchtet ein, dass ein solcher Durchschnitt der beiden unendlich benachbarten Kurven mit dem vorstehend betrachteten in keinerlei Beziehung steht, da es nicht dieselben oder unendlich benachbarte Punkte aus beiden Kurven sind, welche in einem solchen Durchschnitte zusammenfallen, sondern dass der Punkt, welcher aus der Kurve AC_1 bei deren Bewegung in die Lage Ac_1 mit dieser letzteren Kurve zusammentrifft, aus dem sich zurückwindenden Zweige herstammt und in der Richtung der Kurve gemessen in einer endlichen Entfernung von dem Durchschnittspunkte liegt, sodass hier weder ein Stillstand, noch ein Verrücken des fraglichen Punktes in der Richtung der an ihn gelegten Tangente stattfindet.

Solche Schlingen sind aber für das Folgende von einer anderen grossen Wichtigkeit. Nach dem Vorstehenden müssen, wenn die Kurve AC_1 (Taf. XII. Fig. 8.) durch die Bewegung des Punktes C_1 nach nach C_2, C_3... hinüber in der Lage AC_2 eine Schlinge bildet (was übrigens nicht unbedingt zu geschehen braucht), die nachfolgenden Kurven wiederum Schlingen bilden, wie AC_3. Die Schlinge zieht sich immer enger zusammen, und reduzirt sich zuletzt auf einen Punkt D, woselbst die betreffende Kurve ADC_4 eine tangential widerkehrende Spitze bildet. Die darauf folgenden Kurven bewegen sich, wie AC_3 weiter und es kann auch die unmittelbar auf AC_4 folgende in der Nachbarschaft des Punktes D weder eine ähnliche Spitze, noch eine jenseit D liegende Schlinge bilden. Wenn bei umgekehrter Bewegung, eine Kurve wie AC_6 in eine Kurve wie ADC_4 mit einer Spitze übergeht; so muss die dann zunächst folgende Kurve wie AC_5 eine Schlinge bilden, welche um den Punkt D herum geht und kann diese Schlinge weder innerhalb der Spitze

Digitized by Google

D zwischen den Schenkeln AD und DC_4 liegen, noch auch selbst eine der D ähnliche Spitze sein.

Diese Behauptungen bedürfen, abgesehen von der allgemeinen Bewegung der ganzen Kurve, welche aus dem Vorstehenden mit Nothwendigkeit folgt, noch eines strengeren Nachweises hinsichtlich der Gestalten in unmittelbarer Nähe des Punktes D.

Dass wenn zufolge des obigen Bewegungsprinzips AC_1 in die Lage AC_6 oder umgekehrt AC_6 in die Lage AC_1 kommen soll, irgendwo eine Kurve ADC_4 mit einer Spitze D entstehen muss, ist klar. Dass die beiden Schenkel dieser Kurve bei D eine gemeinschaftliche Tangente besitzen müssen, erhellet aus der Formel (4) für die goniometrische Tangente des Neigungswinkels β dieser Berührungslinie gegen die Abszissenaxe. Der Ausdruck

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial r}}{\frac{\partial f_1}{\partial r}}$$

kann nach der Natur der Funktionen f_1 und f_2 für ein bestimmtes r und φ, also für einen bestimmten Punkt D, immer nur einen einzigen Werth annehmen. Selbst wenn derselbe sich für $\frac{\partial f_1}{\partial r}=0$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r}=0$ in der Form $\frac{0}{0}$ darstellen sollte, wird man durch fortgesetzte Differenziation des Zählers und Nenners endlich auf einen bestimmten Ausdruck für $\operatorname{tang}\beta$ kommen, weil schliesslich $\frac{\partial^n f_1}{\partial r^n}$ und $\frac{\partial^n f_2}{\partial r^n}$ nach Gl. (23) und (24) jenen Ausdruck nicht mehr unbestimmt lassen können.

Für eine solche Spitze muss aber ferner der erste Differenzialkoeffizient von f_1 und f_2 in Beziehung zu r den Werth null, dagegen der zweite einen von null verschiedenen Werth besitzen, weil ja von jener Spitze aus sowohl eine Vermehrung, wie eine Verminderung des betreffenden Werthes von r um die unendlich kleine Grösse ∂r dieselbe Veränderung in den Funktionen f_1 und f_2, welche die Koordinaten von D sind, bis auf relativ unendlich kleine Differenzen hervorbringen muss. Wäre zufällig für einen solchen Werth von r der zweite Differenzialkoeffizient von f_1 oder f_2 gleich null; so müsste es auch der dritte sein, und man müsste für den vierten einen bestimmten Werth erhalten. Es ist übrigens unmöglich, dass alle höheren Differenzialkoeffizienten in Beziehung zu r gleich null würden. Für die Spitze D hat man also

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}=0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial r}=0;$$

dagegen muss sowohl $\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}$, wie $\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}$ irgend einen bestimmten Werth haben.

Digitized by Google

Bezeichnet man mit f_1' und f_2' die Werthe der Funktionen f_1 und f_2 für den entsprechenden Punkt in der unendlich benachbarten Kurve, für welchen man r und $\varphi + \partial\varphi$ statt r und φ hat; so ist

$$\frac{\partial f_1'}{\partial r} = \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f_1}{\partial r}\right)}{\partial \varphi}\partial\varphi,$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial r} = \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)}{\partial \varphi}\partial\varphi;$$

oder, wie man aus den Gleichungen (8) und (9) leicht findet, wenn man dieselben in Beziehung zu φ differenziirt,

$$\frac{\partial f_1'}{\partial r} = \frac{\partial f_1}{\partial r} - \left(\frac{\partial f_2}{\partial r} + r\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\right)\partial\varphi \ldots\ldots (25)$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial r} = \frac{\partial f_2}{\partial r} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial r} + r\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\right)\partial\varphi \ldots\ldots (26).$$

Da nun $\frac{\partial f_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r}$ den Werth null, dagegen $\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}$ und $\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}$ einen von null verschiedenen Werth haben müssen; so folgt, dass die Ausdrücke

$$\frac{\partial f_1'}{\partial r} = -r\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\partial\varphi \ldots\ldots (27)$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial r} = r\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\partial\varphi \ldots\ldots (28)$$

nicht gleich null sind, dass sich also auch in der benachbarten Kurve keine Spitze bilden kann. Man erkennt dies noch deutlicher in der Reihenentwicklung für die ganzen Differenzen Δf_1, Δf_2, $\Delta f_1'$, $\Delta f_2'$. Diese ergibt unter Berücksichtigung der vorstehenden beiden Formeln und indem man die ersten in $\frac{\partial f_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r}$ multiplizirten Glieder, welche gleich null sind, sofort unterdrückt,

$$\Delta f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f_1}{\partial r^3}\cdot\frac{\partial r^3}{1.2.3} + \ldots\ldots (29)$$

$$\Delta f_2 = \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial r^3}\cdot\frac{\partial r^3}{1.2.3} + \ldots\ldots (30)$$

Digitized by Google

$$\Delta f_1' = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\partial\varphi\partial r + \frac{\partial^2 f_1'}{\partial r^2}\frac{\partial r^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f_1'}{\partial r^3}\frac{\partial r^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\Delta f_2' = \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\partial\varphi\partial r + \frac{\partial^2 f_2'}{\partial r^2}\frac{\partial r^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f_2'}{\partial r^3}\frac{\partial r^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots (32)$$

Das erste Glied von $\Delta f_1'$ und $\Delta f_2'$, welches bei genügender Kleinheit von ∂r alle übrigen überwiegt, kann, da $\partial\varphi$ von ∂r ganz unabhängig ist und unendlich vielmal grösser als ∂r gedacht werden darf, unendlich vielmal grösser gemacht werden, als das erste Glied von Δf_1 und Δf_2, woraus der obige Schluss, dass die Nachbarkurve nicht auch eine Spitze haben kann, sich ergibt. Nach (29) und (30) ist jetzt, wo $\frac{\partial f_1}{\partial r}=0$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r}=0$ ist,

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}}{\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}} \ldots (33).$$

Bezeichnet man nun den Neigungswinkel der Tangente für den Punkt der Nachbarkurve, welcher der Spitze D in der ersten Kurve entspricht, gegen die positive reelle Axe mit β'; so hat man wegen (31) und (32)

$$\operatorname{tang}\beta' = -\frac{\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}}{\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}} = -\cot\beta \ldots (34),$$

wobei noch $\sin\beta'$ das Zeichen von $\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\partial\varphi\partial r$ und $\cos\beta'$ das von $-\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\partial\varphi\partial r$ hat. Es ist also

$$\beta' = \beta + \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (35).$$

Hieraus folgt, dass die Tangente an dem korrespondirenden Punkte der Nachbarkurve perpendikular gerichtet ist gegen die Tangente an der Spitze D der ersten Kurve. Dies beweist nicht bloss die Unmöglichkeit einer Spitze in der Nachbarkurve, sondern auch die Unmöglichkeit, dass die Nachbarkurve eine ganz und gar vor oder ganz und gar hinter der Spitze D liegende Schlinge zu besitzen vermag, da dies, wenn man ∂r klein genug denkt, bei der normalen Richtung der Nachbarkurve, nothwendig zu einer der früher betrachteten unstatthaften Durchschneidung beider Kurven in der Nähe der Spitze führen müsste. Die Nachbarkurve kann also nur nach Art der Taf. XII. Fig. 8. eine Schlinge um die Spitze D herum wie AC_3, oder eine vor der Spitze vorbeiziehende Kurve ohne alle Durchschneidung wie

Digitized by Google

AC_5 bilden, was durch das Nachfolgende noch in ein helleres Licht gesetzt wird.

Es ist nämlich wichtig, zu bemerken, dass $\beta' = \beta + \frac{\pi}{2}$ und nicht $= \beta - \frac{\pi}{2}$ ist, dass also, wenn man, vom Anfangspunkte A aller Kurven kommend, über die Spitze D der Kurve ADC_4 hinaus in der Richtung des ersten Elementes des Schenkels DC_4, für welches das r der Spitze in $r + \partial r$ und nicht in $r - \partial r$ übergeht, fortschreitet, aus dieser Richtung die Richtung des korrespondirenden Elementes der benachbarten durch den Uebergang von φ in $\varphi + \partial\varphi$ und nicht in $\varphi - \partial\varphi$ erzeugten Kurve AC_5 erhalten wird, indem man nach der Seite der positiven Drehung den Winkel β um einen rechten vergrössert. Unter Beachtung dieses Umstandes, und wenn man erwägt, wie die Zeichen von $\sin\beta'$ und $\cos\beta'$ sowohl für $-\partial\varphi$ statt $+\partial\varphi$ als auch für $-\partial r$ statt $+\partial r$ in die entgegengesetzten verwandelt werden, ergibt sich folgendes Gesetz. Wenn sich, wie bei D in Taf. XII. Fig. 8., eine Spitze dergestalt bildet, dass man, von A kommend, den widerkehrenden Schenkel DC_4 zur Rechten hat; so muss dieselbe bei der nächsten Bewegung der Kurve, also für $\varphi + \partial\varphi$, in eine vor der Spitze vorbeiziehende Kurve AC_5 übergeben, und es muss ihr für $\varphi - \partial\varphi$ eine Schlinge AC_3 vorangegangen sein, welche, je weiter man in der Bewegung der Kurven zurücksieht, eine immer grössere Oeffnung gebildet haben und demnach anfänglich über den Punkt A hereingeschritten sein muss, wie dies die Bewegung der Kurven AC_1, AC_2, AC_3, AC_4, AC_5, AC_6 in Taf. XII. Fig. 8. darstellt. Es ist auch klar, dass eine über A hereinschreitende Schlinge AC_2 sich immer enger zusammenzieht, sodass von ihrem Umfange kein Punkt der Koordinatenebene getroffen werden kann, welcher nicht innerhalb der durch A gehenden grössten Schlingenöffnung liegt, und dass sich eine solche Schlinge zuletzt durch einen Uebergang durch eine Spitze ganz auflös't, indem dann alle ferneren Kurven vor dem Spitzenpunkte D vorbeiziehen. Ein jeder in der genannten grössten Schlingenöffnung liegende Punkt wird bei dieser Bewegung Einmal von den sich zusammenziehenden Theilen und dann noch Einmal von den sich wieder ausdehnenden Theilen der Kurve getroffen werden. Bei denjenigen Punkten der Koordinatenebene, durch welche der Kreuzpunkt der Schlinge sich bewegt, erfolgt der Durchgang jener beiden Kurventheile mit Einem Male, so dass auch diese Punkte stets zweimal von der Kurve getroffen werden. Zu den letzteren Punkten gehört ebenfalls der Spitzenpunkt D selbst, bei welchem sich der Umfang der Schlinge auf Null reduzirt. Die Bewegung der Kurve ist aber stets so, dass sich der in der Spitze D liegende Punkt der Koordinatenebene bei fortgesetzter Bewegung der Kurve in den spitzen Winkel ADC_4 hineinzieht, also immer den Kreuzpunkt der im Verschwinden begriffenen Schlinge, mithin zwei Kurvenschenkel auf Einmal durchschneidet. Man weiss auch aus dem Früheren, dass kein Punkt der sich bewegenden Kurve an einem Punkte der Koordinatenebene tangential zur Richtung der Kurve vorüberrücken kann, dass also jeder Punkt dieser Ebene, der überhaupt von der Bewegung der Kurve getrof-

Digitized by Google

ten wird, dieselbe unzweideutig durchschneidet oder sofort auf die entgegengesetzte Seite der Kurve tritt. Unterscheidet man an der fraglichen Kurve, indem man dieselbe vom Anfangspunkte A her durchläuft, eine linke und eine rechte Seite; so ist es die linke, welche in allen Fällen bei der positiven Bewegung der Kurve nach der Gegend der darauf errichteten Normalen vorrückt und die Punkte der Koordinatenebene zuerst aufnimmt. Diese Seite der Kurve ist in Taf. XII. Fig. 8. zu grösserer Deutlichkeit mit Punkten besetzt.

Nennen wir eine Figur wie AC_1 oder AC_6 ohne Schlinge oder Spitze die normale Gestalt der Kurve, und eine Rotation dieser Kurve um den Punkt A, bei welcher sich ebenfalls keine Schlinge oder Spitze einstellt, eine normale Bewegung; so leuchtet ein, dass zwei normale Umwälzungen dazugehören, damit ein Punkt wie O zwei Mal von jener Kurve getroffen werde, insofern die Kurve am Ende der zweiten Umwälzung genau wieder in die anfängliche Lage kommen soll. Ist jener Punkt O jedoch bei der in Taf. XII. Fig. 8. dargestellten Gestaltveränderung vermittelst der Bildung und Wiederauflösung einer von A hereinschreitenden Schlinge schon im Anfange der ersten Umwälzung zwei Mal getroffen; so hat er eine solche Lage gegen die Kurve bekommen, dass dieselbe, wenn sie nun sukzessive und im Verlaufe von zwei ganzen Umwälzungen in die normale Form und Lage der Kurve AC_1 übergeht, während der ganzen an zwei vollständigen Umwälzungen noch fehlenden Bewegung, jenen Punkt O nicht wieder treffen kann, sodass also auf die Eine, wie auf die andere Weise jener Punkt während zweier Umwälzungen der Kurve nur zwei Mal getroffen wird. Bei der normalen Bewegung erfolgt dies Treffen in grösseren Zwischenräumen oder für weiter aus einander liegende Werthe des Winkels φ; bei der abnormen Bewegung jedoch für näher zusammenliegende Werthe von φ. Ein Punkt der Ebene, welcher bei der letzteren Bewegung von dem Kreuzpunkte einer Schlinge getroffen wird, entspricht dem Falle, dass während jener zwei Umwälzungen für Ein und denselben Werth von φ zwei Durchschnitte für zwei verschiedene Werthe von r an zwei verschiedenen Stellen derselben Kurve erfolgen. Ist der letztgedachte Punkt der Spitzenpunkt D; so ist dies der Fall, wo der zweimalige Durchschnitt für Ein und denselben Werth von φ und Ein und denselben Werth von r erfolgt, wo also, wenn D der Nullpunkt ist, die gegebene Gleichung zwei vollkommen gleiche Wurzeln x oder $re^{\varphi\sqrt{-1}}$ besitzt. Dass die Begegnung des Spitzenpunktes D einem zweimaligen Durchschnitte der Kurve entspricht, erkennt man sowohl daran, wenn man denselben als Kreuzpunkt einer unendlich kleinen Schlinge auffasst und die nothwendige Bewegung dieser Kreuzpunkte von A über D hinaus ins Auge fasst, wie es bereits vorhin geschehen, wie auch daran, wenn man denselben wie den dem Kreuzpunkte der Schlinge diametral gegenüberliegenden Punkt im Umfange dieser Schlinge auffasst und berücksichtigt, dass dieser Umfang, so lange die Oeffnung der Schlinge noch endliche Dimensionen hat, gegen den Punkt D vorschreitet, und denselben also das erste Mal bei der hingängigen Bewegung mit der

Digitized by Google

punktirten Seite trifft, dass dann aber die aus der Schlinge entstehende Kurve mit rückgängiger Bewegung und stets mit der punktirten Seite voran an den Punkt D zum zweiten Male trifft.

Wenn sich irgendwo, wie bei D in Taf. XII. Fig. 9. eine Spitze dergestalt bildet, dass man von A kommend, den widerkehrenden Schenkel DC_3 zur Linken hat; so muss dieselbe unter Berücksichtigung der Werthe für $\text{tang}\,\beta'$, $\sin\beta'$, $\cos\beta'$ bei der nächsten Bewegung der Kurve in positiver Richtung, also für $\varphi+\partial\varphi$ in eine Schlinge AC_4 übergehen, und es muss ihr für $\varphi-\partial\varphi$ eine vor der Spitze vorbeiziehende Kurve AC_2 vorangegangen sein. Die entstehende Schlinge muss sich nun bei positiver Bewegung immer mehr erweitern und zuletzt dadurch auflösen, dass sie den Anfangspunkt A passirt und darauf die Gestalt AC_6 annimmt. Die stets voranschreitende linke Seite der Kurve ist auch in Taf. XII. Fig. 9. mit Punkten besetzt. Hierdurch erkennt man leicht, dass wenn bei dieser Bewegung der Kurve AC_1 ein Punkt der Koordinatenebene, wie etwa O, zwei Mal getroffen ist, die Kurve, welche den letzten Durchgang bewirkt hat, in eine solche Lage gekommen ist, dass sie bei normaler Formveränderung zwei ganze Umwälzungen vollenden müsste, um wieder in die Lage AC_1 zu kommen, ohne bei diesen Umwälzungen den Punkt O wieder zu treffen. Die Kreuzungspunkte der Schlingen und der Spitzenpunkt D spielen hierbei dieselbe Rolle von Doppelpunkten, wie in Taf. XII. Fig. 8., indem ein solcher Kreuzungspunkt zwei verschiedenen Werthen von r für denselben Werth von φ, und der Spitzenpunkt D zweimal demselben Werthe von r für denselben Werth von φ entspricht.

Nach Vorstehendem können nur die links herum sich wendenden Krümmungen der Kurve unmittelbar zu einer Schlinge führen, während die rechts herumlaufenden Biegungen bei den nächsten Bewegungen sich zu verlieren streben. Es ist zwar nicht nöthig, dass jede Krümmung der ersteren Art an jeder Stelle der Kurve eine Schlinge nach sich ziehe; erwägt man aber, dass die Tangente des unendlich entfernten Kurventheiles (Gl. 5.) eine raschere Winkelbewegung links herum besitzt, als die Tangente des Anfangspunktes A (Gl. 5^a), und dass, wenn in der gegenseitigen Beziehung zwischen den Tangenten dieser beiden äussersten Kurvenenden das Verhältniss einer Biegung nach der linken Seite besteht, der Neigungswinkel $n\varphi$ der ersteren Tangente schon grösser ist, als der Winkel $\alpha+m\varphi$ der letzteren, dass man alsdann also $n\varphi > \underset{m}{\alpha}+m\varphi$ habe; so folgt, dass diese Differenz durch die positive Bewegung der Kurve immer erheblicher werden und zuletzt jedenfalls zu einer Schlinge führen muss, welche dann bei ihrer Auflösung das bis dahin bestandene Verhältniss der Wendung nach links in das entgegengesetzte einer Wendung nach rechts verwandelt, für welches Letztere man $n\varphi < \underset{m}{\alpha}+m\varphi$ hat, und welches sich daher durch die positive Bewegung der Kurve allmählig ausgleicht. Da nur dann, wenn Gl. (1) eine binomische ist, $n=m$, sonst aber immer $n>m$ ist; so folgt, dass es bei einer binomischen Gleichung niemals eine Schlinge geben kann, dass es aber bei jeder anderen Gleichung stets Schlingenbildungen geben muss.

Digitized by Google

Wenn man bei der Schlingenbildung nach Taf. XII. Fig. 8. oder Fig. 9. einen Punkt der Koordinatenebene betrachtet, welcher wegen seiner Lage gegen die Aussenseite der Kurve nur Ein Mal getroffen werden kann, wie etwa der Punkt O, insofern man nun von der Kurve AC_3 ausgeht; so findet man, dass die gleich auf die Durchschneidung folgende Kurve AC_6 eine solche Lage bekommen hat, dass bei normaler Formveränderung jetzt noch Eine ganze Umwälzung erforderlich wäre, um ohne ferneren Durchgang durch denselben Punkt O wieder in eine der AC_2 ähnliche Lage zu kommen. Geht man aber von der Kurve AC_1 in Taf. XII. Fig. 8. oder Fig. 9. aus, wobei der Punkt O zwei Mal getroffen wird; so kann der erste Durchgang durch diesen Punkt, welcher die Kurve AC_2 erzeugt, wie der durch normale Bewegung während Einer Umwälzung bewirkte Durchschnitt angesehen werden. Die fragliche Schlingenbildung vermehrt dann die Zahl der normalen Durchgänge während derselben Umwälzungs-Periode um Einen, bringt dadurch aber die Kurve in eine solche Lage, dass nun bei der zweiten normalen Umwälzung bis in die ursprüngliche Lage AC_1 kein weiterer Durchschnitt möglich sein würde.

Nachdem Eine solche Schlingenbildung vollendet ist, oder auch gleichzeitig mit derselben, kann sich eine zweite, dritte etc. entwickeln. Es kann z. B., nachdem sich in Taf. XII. Fig. 8. die Kurve AC_1 in die Lage AC_6 bewegt und demgemäss den Punkt O gleich im Anfange der ersten Umwälzung zwei Mal getroffen, und hierdurch gegen diesen Punkt O eine Lage erhalten hat, welche der Lage der Kurve AC_2 in Taf. XII. Fig. 9. gegen den Punkt O ähnlich ist, sich nach Art der Fig. 9. eine zweite Schlingenbildung entwickeln, vermöge welcher aber der Punkt O während derselben Umwälzung nur noch Ein ferneres Mal getroffen werden kann, so dass derselbe nun im Laufe dieser Periode im Ganzen drei Mal erreicht ist. Die auf den dritten Durchschnitt folgende Kurve AC_6 in Taf. XII. Fig. 9. hat alsdann aber eine solche Lage gegen den Punkt O, dass dieselbe, um weiter in die Form der ursprünglichen Kurve AC_1 in Taf. XII. Fig. 8. zu kommen, drei ganze normale Umwälzungen machen müsste, wobei jener Punkt nicht wieder zu erreichen wäre.

Solche zwei Schlingen können auch ganz in einander fallen, indem Ein hingehender Arm der Kurve durch seine zwei Mal sich zurückwindende Fortsetzung durchschnitten wird. Taf. XII. Fig. 10. stellt dar, wie die spiralförmige Kurve AC_1 mit zwei Umgängen durch ihre positive Bewegung zwei in einander fallende Schlingen AC_3 erzeugen kann. Beide Schlingen sind über den Punkt A hereingeschritten. AC_2 sei diejenige Kurve, bei welcher die innere Schlinge die grösste durch A gehende Oeffnung besitzt. Bei dem Zusammenziehen dieser beiden Schlingen, welche sich im Allgemeinen nach einander mittelst zweier besonderer Spitzen auflösen, und bei der alsdann erfolgenden Wiederausdehnung kann jeder in der eben genannten grössten Oeffnung der inneren Schlinge liegende Punkt drei Mal getroffen werden. Die auf den dritten Durchgang folgende Kurve hat alsdann aber eine solche Lage, dass ebenso wie bei zwei neben einander liegenden Schlingen drei normale Umwälzungen dazugehören, um wieder in die ursprüngliche Form AC_1 zu kommen, wobei derselbe Punkt nicht

Digitized by Google

wieder erreicht werden kann. Ein jeder Kreuzungspunkt dieser beiden Schlingen entspricht, wenn er es sein sollte, welcher durch den Nullpunkt geht, neben dem dritten Durchgange, dem Falle, dass es innerhalb der betrachteten Bewegung drei Wurzeln der Gleichung von der Form $r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, $r_2 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$ und $r_3 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$ gibt, wovon zwei bei verschiedenen Werthen von r denselben Werth von φ gemein haben. Geht ein Spitzenpunkt durch den Nullpunkt; so sind zwei von jenen drei Wurzeln ganz gleich und man hat $r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, $r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, $r_2 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$. Wenn die beiden Kreuzungspunkte jener zwei Schlingen gleichzeitig durch den Nullpunkt gehen; so hat man drei Wurzeln $r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, $r_2 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, $r_3 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, welchen Ein und derselbe Werth von φ angehört. Fiele gleichzeitig ein Spitzenpunkt und ein Kreuzungspunkt auf den Nullpunkt; so hätte man drei Wurzeln $r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, $r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, $r_2 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, denen der Winkel φ_1 gemeinschaftlich zukäme, während ausserdem bei zweien auch noch die Model r gleich wären. Es ist auch möglich, dass sich beide Schlingen mit Einem Male in eine einzige Spitze auflösen oder dass die fraglichen beiden Spitzen zusammenfallen. Es ist ganz klar, dass der betreffende Punkt der Koordinatenebene alsdann bei jener Bewegung zwar nur ein einziges Mal erreicht werden kann, dass er aber bei dem Fortschreiten der Kurve einem dreimaligen Durchschnitte an drei besonderen Schenkeln dieser Kurve, deren Dimensionen sich auf Null reduziren, entspricht. Man hat alsdann, wenn diese Doppelspitze auf den Nullpunkt treffen sollte, drei gleiche Wurzeln $r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, $r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, $r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$. Umgekehrt ist es aber auch immer nothwendig, dass wenn drei gleiche Wurzeln existiren sollen, eine Doppelspitze durch den Nullpunkt gehen muss, weil sich ja hier zugleich drei Punkte der Kurve befinden müssen, für deren jeden man $\varphi = \varphi_1$ und $r = r_1$ haben muss, was einen dreimaligen Durchschnitt derselben Kurve an demselben Orte und in der Art erfordert, dass die zwischen je zwei Durchschnitten liegenden Kurvenbögen auf einen einzigen, jenem $r = r_1$ angehörigen, Punkt reduzirt sind.

Ganz allgemein ist nun klar, dass in Folge jeder einzelnen vollkommenen oder unvollkommenen Schlingenbildung während einer gewissen Reihe von Umwälzungsperioden die normale Anzahl der Durchgänge durch den Nullpunkt um Einen vermehrt werden kann, dass dann aber hierdurch Ein normaler Durchgang für die späteren Perioden unmöglich gemacht wird — und umgekehrt, dass sich für jede Suspension eines normalen Durchganges während einer ganzen Rotation Eine vollkommene Schlinge oder eine als unvollkommene Schlinge anzusehende links herumgehende Spiralwindung sich in der Kurve erzeugt oder eine rechts herumgehende Spiralwindung sich aufhebt. Da nun nach n ganzen Umwälzungen die Kurve genau wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehren muss; so leuchtet ein, dass während dieser n Umwälzungen nicht mehr und nicht weniger, als n Durchgänge durch den Nullpunkt erfolgt sein müssen, dass also die Gleichung vom $n$ten Grade stets n Wurzeln, und auch nicht mehr besitzt. Sind

Digitized by Google

hierunter m Wurzeln, welche denselben Werth von φ gemein haben; so geht Ein und dieselbe Kurve m mal durch den Nullpunkt oder es bewegt sich der gemeinschaftliche Kreuzungspunkt von $(m-1)$ Schlingen durch diesen Nullpunkt. Für m ganz gleiche Wurzeln konzentriren sich alle diese Schlingen auf einen einzigen, durch den Nullpunkt gehenden Spitzenpunkt, der dann die Bedeutung eines $m$fachen Punktes besitzt.

Es liegt nicht in der Absicht, hier alle sich auszeichnenden Spezialitäten näher zu untersuchen, da die vorstehenden allgemeinen Gesetze zur Erläuterung aller hierhergehörigen Erscheinungen ausreichen. Es muss nur noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass unter Umständen die rotirende Kurve für gewisse Werthe von φ sich in einer geraden Linie ausstrecken oder sich so darin zusammenlegen kann, dass sie mehrere Hinundhergänge darin bildet. Eine solche besondere Figur ändert Nichts an den allgemeinen Prinzipien, unter welchen die obige Kurve betrachtet ist. Ein jeder Punkt in solcher geraden Linie, wo die Kurve in direkt entgegengesetzter Richtung zurückkehrt, spielt die Rolle eines Spitzenpunktes oder einer annullirten Schlinge. Es könnten sich auch mehrere Spitzenpunkte oder annullirte Schlingen in Ein und demselben Punkte einer solchen geradlinigen Kurve vereinigen, und die endlichen Zweige dieser Schlingen können sowohl nach derselben, wie nach entgegengesetzten Seiten aus diesen Schlingen heraustreten. In welchen gegenseitigen Beziehungen die Theile einer solchen zusammengefalteten Kurve zu einander stehen, erkennt man, wenn man den Werth des zugehörigen φ um ein sehr kleines Inkrement wachsen oder abnehmen lässt, indem sich dadurch jene Beziehungen sofort in deutlicher Gestalt entwickeln. So kann sich z. B. die platt gedrückte Kurve $ADEC$ in Taf. XII. Fig. 11. bei positiver Drehung je nach der Natur der gegebenen Gleichung wie Taf. XII. Fig. 12., 13, 14. oder 15. zeigt, entwikkeln. Eine Gestalt wie AC_3 wird bei fortgesetzter Bewegung immer die nächste Folge davon sein. Unmöglich würde aber immer eine Entwickelung nach Art der Taf. XII. Fig. 16. sein, indem sich zwischen die Schenkel der zweiten Spitze E_1 niemals eine vorn abgerundete Kurve legen kann, sondern sich nach Taf. XII. Fig. 12. um diese zweite Spitze eine Schlinge erzeugen müsste, wenn überhaupt $AD_1E_1C_1$ den Typus für die fernere Bewegung abgibt. Derartige Figuren kommen vorzugsweise bei den reellen Wurzeln der Gleichungen mit reellen Koeffizienten in Betracht, bei denen sich für $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ stets eine in gerader Linie sich erstreckende Kurve einstellen muss. Denkt man sich die der Taf. XII. Fig. 12. entsprechende rückgängige Bewegung der Kurve; so bilden sich die in Taf. XII. Fig. 17. angegebenen Gestaltén. Es erscheint hierbei die geradlinige Kurve $ADEC$ aus Taf. XII. Fig. 11 als ein Uebergang der Kurve Ac_3 aus Taf. XII. Fig. 17. in die Kurve AC_3 aus Taf. XII. Fig. 12., wobei diese beiden Kurven symmetrische, aber in Beziehung zur geraden Linie AC entgegengesetzt liegende Formen besitzen. Bei diesem Umschlagen der Kurven Ac_3 in AC_3 wird offenbar in allen Fällen jeder zwischen A, E und jeder über D hinaus liegende Punkt der Geraden AC nur von einem einzigen, jeder zwischen E, D liegende Punkt aber von drei Schenkeln der sich bewegenden Kurve getroffen. Das Stück ED der Geraden AC, welches schon von

Digitized by Google

Ac_3 umschlungen wurde, bleibt nun auch in der Umschlingung der Kurve AC_3 liegen, wie Taf. XII. Fig. 18. darstellt.

Läge also der Nullpunkt O zwischen E und D und wäre AC die Kurve für $\varphi=0$, also ihre Richtung die der positiven reellen Axe; so gäbe es drei positive reelle Wurzeln, deren Quantitäten r verschieden wären. Läge der Nullpunkt in D; so gäbe es zwei gleiche und eine davon verschiedene grössere Wurzel. Läge derselbe in E; so gäbe es zwei gleiche und eine davon verschiedene kleinere Wurzel. Das Stück DE der Geraden AC kann sich auf einen einzigen Punkt reduziren; alsdann existiren, wenn der Nullpunkt in diesen Punkt hineinfiele, drei gleiche positive Wurzeln.

Angenommen, es handele sich in dem vorstehenden Falle um eine Gleichung dritten Grades, welche ausser diesen drei Wurzeln weiter keine haben kann. Der geradlinigen Kurve AC (Taf. XII. Fig. 18.), von welcher der Nullpunkt dreimal durchschritten wird, entspricht der Werth $\varphi=0$. Um sich zu überzeugen, dass es bei den drei nächsten Umwälzungen, wodurch $\varphi=\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=2\pi$ wird, keinen weiteren Durchgang durch den Nullpunkt gibt, beginne man die Bewegung von einer Kurve, wie AC_3, welcher ein sehr kleiner Werth von φ, also $\partial\varphi$, entspricht. Diese Kurve wird nach Obigem eine Schlinge bilden, in welcher der Nullpunkt liegt. Bei fortgesetzter Vergrösserung des Winkels φ erweitert sich diese Schlinge, tritt durch den Punkt A aus, sodass alsdann die Kurve eine rechts um den Nullpunkt herumgehende Spirale mit einer Windung darstellt. Nach der ersten Umwälzung, also für $\varphi=\frac{2\pi}{3}$, ist diese Spiralwindung verschwunden; die Kurve erstreckt sich in flacher Gestalt von A nach der Seite C_3, indem der Nullpunkt noch an der rechten Seite derselben liegt. In der Mitte der zweiten Umwälzung, also für $\varphi=\pi$, streckt sich die Kurve wieder in der reellen Axe, aber von A nach der negativen Seite hin aus, sodass hiervon der rechts von A liegende Nullpunkt nicht erreicht werden kann. Am Ende der zweiten Umwälzung, also für $\varphi=\frac{4\pi}{3}$, dehnt sich die Kurve von A wieder gegen C_3 hin aus, aber nun liegt der Nullpunkt ihr zur Linken. Gegen das Ende der dritten Umdrehung bildet die Kurve eine links um den Nullpunkt gehende Spirale mit Einer Windung, welche sich, je näher φ an 2π heran kommt, in die durch Ac_3 dargestellte Schlinge zusammenzieht. Beim Uebergange von Ac_3 in die entgegengesetzte Gestalt AC_3 durch die gerade Linie AC wird nun mit Einem Schlage der Nullpunkt drei Mal getroffen.

Was die Frage anlangt, unter welchen Umständen sich die Kurve in eine gerade Linie ausstrecken kann und welche Richtung diese Linie haben wird; so bemerkt man, dass für diesen Fall, selbst wenn in jener geraden Linie mehrere Kurventheile von direkt entgegengesetzten Richtungen liegen, stets

Digitized by Google

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial r}}{\frac{\partial f_1}{\partial r}} =$$

(36)

$$\frac{a_1 \sin(\alpha_1+\varphi) + 2a_2 r \sin(\alpha_2+2\varphi) + 3a_3 r^2 \sin(\alpha_3+3\varphi) + \ldots + n r^{n-1} \sin(n\varphi)}{a_1 \cos(\alpha_1+\varphi) + 2a_2 r \cos(\alpha_2+2\varphi) + 3a_3 r^2 \cos(\alpha_3+3\varphi) + \ldots + n r^{n-1} \cos(n\varphi)}$$

eine in Beziehung zu r konstante Grösse sein muss. Es könnten aber in der ursprünglichen Gleichung die Koeffizienten A_1, A_2.. einiger auf das bekannte folgenden Glieder null gewesen sein. Nehmen wir daher das in x^m multiplizirte Glied als das niedrigste in der gegebenen Gleichung vorkommende mit x behaftete Glied an, setzen also a_1, $a_2 \ldots a_{m-1}$ gleich null; so ergibt die vorstehende Gleichung, nachdem man Zähler und Nenner auf der rechten Seite durch r^{m-1} dividirt hat, den allgemeinen Ausdruck

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{m a_m \sin(\alpha_m+m\varphi) + (m+1) a_{m+1} r \sin[\alpha_{m+1}+(m+1)\varphi] + \ldots + n r^{n-m} \sin(n\varphi)}{m a_m \cos(\alpha_m+m\varphi) + (m+1) a_{m+1} r \cos[\alpha_{m+1}+(m+1)\varphi] + \ldots + n r^{n-m} \cos(n\varphi)}.$$

Soll dieser Ausdruck in Beziehung zu r konstant sein; so muss derselbe (indem man einmal $r=0$ setzt) den Werth

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}(\alpha_m + m\varphi)$$

haben; es muss also allgemein

$$\beta = \alpha_m + m\varphi \quad \ldots \quad (37)$$

sein, da, wenn man r von 0 bis ∞ wachsen lässt, sowohl der Zähler, wie der Nenner des Bruchs für $\operatorname{tang}\beta$ gleichzeitig gleich 0, also $\operatorname{tang}\beta = \frac{0}{0}$ werden kann, was anzeigt, dass für diesen Werth von r die Kurve eine Spitze besitzt, in welcher ihre Richtung in die direkt entgegengesetzte umschlägt; so müsste man eigentlich

$$\beta = \alpha_m + m\varphi + k\pi$$

setzen, worin für k eine beliebige ganze, resp. paare oder unpaare Zahl zu nehmen wäre. Man wird jedoch hiernach leicht die nachfolgenden Resultate ergänzen können, wenn man darin $\alpha_m + k\pi$ für α_m gesetzt denkt. Bezeichnet man der Kürze wegen den Inbegriff aller r enthaltenden Glieder im Zähler von $\operatorname{tang}\beta$ mit B und im Nenner mit C; so hat man

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{{}_{m}a \sin({}_{m}\alpha + m\varphi) + B}{{}_{m}a \cos({}_{m}\alpha + m\varphi) + C}$$

$$= \operatorname{tang}({}_{m}\alpha + m\varphi) + \frac{B\cos({}_{m}\alpha + m\varphi) - C\sin({}_{m}\alpha + m\varphi)}{\cos({}_{m}\alpha + m\varphi)\,[{}_{m}a \cos({}_{m}\alpha + m\varphi) + C]}.$$

Damit nun dieser Ausdruck konstant gleich $\operatorname{tang}({}_{m}\alpha + m\varphi)$ se könne, muss jedes Glied des nach Potenzen von r geordnet Zählers

$$B\cos({}_{m}\alpha + m\varphi) - C\sin({}_{m}\alpha + m\varphi) =$$

$$(m+1)\,{}_{m+1}a \sin({}_{m+1}\alpha + \varphi - {}_{m}\alpha).r$$

$$+ (m+2)\,{}_{m+2}a \sin({}_{m+2}\alpha + 2\varphi - {}_{m}\alpha)\,r^2 + \ldots + n \sin[(n-m)\,\varphi - {}_{m}\alpha]\,r^{n-}$$

gleich null sein. Dies führt zu folgenden $(n-m)$ Bedingung gleichungen:

1) $${}_{m+1}\alpha + \varphi - {}_{m}\alpha = k_1\pi,$$

2) $${}_{m+2}\alpha + 2\varphi - {}_{m}\alpha = k_2\pi,$$

3) $${}_{m+3}\alpha + 3\varphi - {}_{m}\alpha = k_3\pi,$$

$$\vdots$$

$n-m-1$) $${}_{n-1}a + (n-m-1)\varphi - {}_{m}\alpha = k_{n-m-1}\pi,$$

$n-m$) $$(n-m)\,\varphi - {}_{m}\alpha = k_{n-m}\pi.$$

Hierin bezeichnen $k_1, k_2 \ldots\ldots k_{n-m}$ willkührliche ganz Zahlen einschliesslich der Null. Sollten noch mehrere Glied der gegebenen Gleichung zwischen $A\,x^m$ und x^n ganz fehle also die zugehörigen Werthe von ${}_{m}a$, z. B. ${}_{m+r}a$ gleich Null sei so verschwindet hierdurch schon das betreffende Glied der e eben annullirten Formel und es fällt die $r$te der vorstehende Bedingungen ganz aus. Man kann sich jedoch, wenn ${}_{m+r}a = 0$ is denken, diese $r$te Bedingung sei jederzeit realisirt. Die letzt Bedingung lässt den Werth des Winkels

$$\varphi = \frac{{}_{m}\alpha + k_{n-m}\pi}{n-m} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

erkennen, für welchen sich die Kurve in gerader Linie zusammen legt, vorausgesetzt, dass die übrigen $(n-m-1)$ Bedingunge erfüllet seien, welche jetzt vermittelst des vorstehenden Werthe von φ zu den folgenden führen:

1) $$\underset{m+1}{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{n-m}\right)\underset{m}{\alpha} + \underset{1}{k}\,\pi - \frac{1}{n-m}\,\underset{n-m}{k}\,\pi,$$

2) $$\underset{m+2}{\alpha} = \left(1 - \frac{2}{n-m}\right)\underset{m}{\alpha} + \underset{2}{k}\,\pi - \frac{2}{n-m}\,\underset{n-m}{k}\,\pi,$$

3) $$\underset{m+3}{\alpha} = \left(1 - \frac{3}{n-m}\right)\underset{m}{\alpha} + \underset{3}{k}\,\pi - \frac{3}{n-m}\,\underset{n-m}{k}\,\pi,$$

$$\vdots$$

$n-m-1$) $$\underset{n-1}{\alpha} = \frac{1}{n-m}\,\underset{m}{\alpha} + \underset{n-m-1}{k}\,\pi - \left(1 - \frac{1}{n-m}\right)\underset{n-m}{k}\,\pi.$$

Der Neigungswinkel dieser geraden Linie gegen die positive Axe ist alsdann wegen der beiden Gleichungen (37) und (38)

$$\beta = \frac{n}{n-m}\,\underset{m}{\alpha} + \frac{m}{n-m}\,\underset{n-m}{k}\,\pi \quad \ldots\ldots\ (39).$$

Sollte diese Linie auch durch den Nullpunkt gehen, also mit der direkten oder indirekten Richtung von OA zusammenfallen; so müsste der vorstehende Werth von $\beta = \underset{0}{\alpha} + \underset{0}{k}\pi$ sein, also der Winkel $\underset{m}{\alpha}$ die Grösse

$$\underset{m}{\alpha} = \frac{n-m}{n}(\underset{0}{\alpha} + \underset{0}{k}\pi) - \frac{m}{n}\,\underset{n-m}{k}\,\pi \quad \ldots\ldots\ (40)$$

besitzen. Jenachdem k eine paare oder unpaare Zahl sein kann, ist die fragliche gerade Linie von A aus direkt wie OA, oder indirekt wie AO gerichtet. Ein Durchgang der in dieser Linie liegenden eigentlichen Kurve durch den Nullpunkt, erfordert also für $\underset{0}{k}$ eine unpaare Zahl.

Wenn die gegebene Gleichung nur reelle Koeffizienten besitzt, so dass unter den Werthen der Winkel $\underset{m}{\alpha}$, $\underset{m+1}{\alpha}$ .... $\underset{n-1}{\alpha}$ nur die Grössen 0 und π, oder allgemein nur Grössen von der Form $k'\pi$ vorkommen; so sind allerdings die vorstehenden $(n-m-1)$ Bedingungen realisirt, man muss jedoch die sonst willkührliche ganze Zahl $\underset{n-m}{k}$ durchaus so wählen, dass, wenn $\underset{m}{\alpha} = k'\pi$ gesetzt wird, $k' + \underset{n-m}{k}$ irgend ein Vielfaches der Zahl $n-m$ ist. Nachdem dies geschehen, findet sich, dass auch

$$n\,\underset{m}{\alpha} + m\,\underset{n-m}{k}\,\pi = (nk' + m\,\underset{n-m}{k})\,\pi$$

ein Vielfaches von $(n-m)\pi$ ist. Daraus folgt, dass der Werth von β aus Gl. (39) ebenfalls ein Vielfaches von π ist, dass sich also die in Rede stehende geradlinige Kurve nur in der reellen Axe ausstrecken kann.

Für jede binomische Gleichung von der Form $\underset{0}{A} + x^n = 0$

oder $ae^{\alpha\sqrt{-1}} + r^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} = 0$, also auch für jede Gleichung ersten Grades, fallen die obigen $(n-m-1)$ Bedingungsgleichungen hinweg oder sind als erfüllt anzusehen. Man hat hier $n=m$. Der Winkel φ bleibt ganz willkührlich, indem die Kurve für alle Werthe von φ eine gerade Linie bildet, welche sich unter dem Winkel $\beta = n\varphi$ gegen die positive Axe neigt und durch den Nullpunkt geht.

Es ist vorhin bemerkt, dass wenn die Kurve sich irgendwo auf eine gerade Linie reduzire, die dieser Reduktion unmittelbar vorangehenden und nachfolgenden Gestalten in Beziehung zu dieser geraden Linie symmetrisch seien. Dieser Satz hat nicht bloss näherungsweise, sondern in aller Strenge Gültigkeit. Um diess einzusehen, werde der Werth des Winkels φ aus Gl. (38) mit φ_1 und der von β aus Gl. (39) mit β_1 bezeichnet. Ist nun AC die Richtung der durch A gehenden reduzirten Kurve, also β_1 der Neigungswinkel CRX von AC gegen die positive reelle Axe OX; so denke man sich von irgend einem Punkte M irgend einer Kurve die Perpendikel MN auf OX und MP auf AC gefällt. Es ist bekanntlich

$$ON = f_1 \text{ und } NM = f_2.$$

Setzt man aber

$$AP = p_1 \text{ und } PM = p_2;$$

so hat man, unter Berücksichtigung, dass

$$OQ = a\cos\alpha \text{ und } QA = a\sin\alpha \text{ ist},$$

$$p_1 = f_1\cos\beta_1 + f_2\sin\beta_1 - a\cos(\alpha - \beta_1),$$

$$p_2 = f_2\cos\beta_1 - f_1\sin\beta_1 - a\sin(\alpha - \beta_1);$$

oder wenn man für f_1 und f_2 ihre Werthe aus Gl. (3) substituirt und gehörig zusammenzieht,

$$p_1 = ar\cos(\alpha + \varphi - \beta_1) + ar^2\cos(\alpha + 2\varphi - \beta_1) + ar^3\cos(\alpha + 3\varphi - \beta_1) + \ldots + r^n\cos(n\varphi - \beta_1),$$

$$p_2 = ar\sin(\alpha + \varphi - \beta_1) + ar^2\sin(\alpha + 2\varphi - \beta_1) + ar^3\sin(\alpha + 3\varphi - \beta_1) + \ldots + r^n\sin(n\varphi - \beta_1).$$

In diese Gleichungen substituire man für die Veränderliche φ den Werth $\varphi_1 + \psi$, worin φ_1 den bekannten Werth aus Gl. (38) hat, für welchen die Kurve in die gerade Line AC fällt, und worin ψ eine neue Veränderliche darstellt, welche späterhin denselben Effekt dadurch hervorbringt, dass sie $=0$ gesetzt wird. Durch dise Substitution wird irgend ein in den Ausdrücken von p_1 und p_2 vorkommender Winkel, wie etwa $\alpha + (m+r)\varphi - \beta_1$, wenn man dabei die obigen Bedingungsgleichungen und auch die Gleichungen (38) und (39) gehörig berücksichtigt,

Digitized by Google

$$\underset{m+r}{\alpha} + (m+r)\varphi - \beta_1 = \underset{m+r}{\alpha} + (m+r)\varphi_1 - \beta_1 + (m+r)\psi$$
$$= \underset{r}{k}\pi + (m+r)\psi.$$

Der Kosinus hiervon ist $\pm\cos[(m+r)\psi]$ und der Sinus $\pm\sin[(m+r)\psi]$, jenachdem $\underset{r}{k}$ paar oder unpaar ist. Hierdurch erhält man'

$$p_1 = \pm \underset{1}{ar}\cos\psi \pm \underset{2}{ar^2}\cos(2\psi) \pm \underset{3}{ar^3}\cos(3\psi) \pm \ldots \pm r^n\cos(n\psi) \quad (41)$$

$$p_2 = \pm \underset{1}{ar}\sin\psi \pm \underset{2}{ar^2}\sin(2\psi) \pm \underset{3}{ar^3}\sin(3\psi) \pm \ldots \pm r^n\sin(n\psi) \quad (42).$$

Will man nun die Kurve bloss in solchen Lagen betrachten, welche der geraden Form AC unmittelbar vorangehen und nachfolgen; so hat man dem Winkel ψ einen unendlich kleinen Werth zu geben. Bleibt man bei den ersten Potenzen der sehr klein gedachten Grösse ψ stehen; so hat man $\cos\psi$, $\cos(2\psi), \ldots \cos(n\psi)$ gleich 1 und $\sin\psi$, $\sin(2\psi), \ldots \sin(n\psi)$ resp. gleich ψ, $2\psi, \ldots n\psi$; also für solche Werthe

$$p_1 = \pm \underset{1}{ar} \pm \underset{2}{ar^2} \pm \underset{3}{ar^3} \pm \ldots \pm r^n \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

$$p_2 = (\pm \underset{1}{ar} \pm \underset{2}{2ar^2} + \underset{3}{3ar^3} \pm \ldots \pm nr^n)\psi \quad \ldots\ldots (44).$$

Ob nun die sehr kleine Grösse ψ positiv oder negativ genommen werde, hat auf den Werth von $p_1 = AP$ gar keinen Einfluss. Der Werth von $p_2 = PM$ behält zwar für ein positives und negatives ψ dieselbe Quantität, wechselt aber das Zeichen. Hieraus ist klar, dass die der geraden Form AC unmittelbar vorangehende Kurve Ac_3 ganz symmetrisch ist, mit der unmittelbar nachfolgenden AC_3.

Bei den vorstehenden Untersuchungen ist vorausgesetzt, dass das bekannte Glied $A = \underset{0}{a}e^{\underset{0}{\alpha}\sqrt{-1}}$ der gegebenen Gleichung irgend einen von Null verschiedenen Werth habe. Um jetzt das Eigenthümliche des Falles anschaulich zu machen, wo dieses Glied dadurch verschwindet, dass seine Quantität $\underset{0}{a} = 0$ wird, gehe man von einer Gleichung, wie

$$\underset{0}{A} + \underset{m}{A}x^m \; \underset{m+1}{A}x^{m+1} + \ldots + \underset{n-1}{A}x^{n-1} + x^n = 0 \quad \ldots\ldots (45)$$

aus, worin die Quantität des bekannten Gliedes $\underset{0}{A}$ unendlich klein sei. Diese Gleichung hat natürlich n Wurzeln. Wird der Werth einer solchen Wurzel in die x enthaltenden Glieder substituirt; so muss die Summe dieser Glieder dieselbe unendlich geringe Quantität, wie $\underset{0}{A}$, mit entgegengesetztem Zeichen annehmen. Hierzu ist offenbar nicht nothwendig erforderlich, dass die Quantität einer solchen Wurzel selbst unendlich klein sei; allein es wird unter den n Wurzeln immer eine gewisse Anzahl geben, deren Quantität unendlich klein ist. Dies leuchtet ein, wenn man sich in die vorstehende Gleichung für $x = re^{\varphi\sqrt{-1}}$ nur Werthe von unendlich geringer Quantität r substituirt denkt, oder die für irgend einen Werth von φ entstehenden Kurven in ihren dem An-

Digitized by Google

fangspunkt A und dem unendlich benachbarten Nullpunkte O zunächst liegenden Anfangstheilen betrachtet. Zu dem vorliegenden Zwecke führe man statt des Winkels φ, welcher von der Einen Kurve zu der benachbarten variirt, aber für jede einzelne Kurve konstant ist, einen neuen Winkel ψ ein, welcher mit φ durch folgende Bedingung

$$\underset{m}{\alpha} + m\varphi = \underset{0}{\alpha} + m\psi + \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

oder

$$\varphi = \psi + \frac{\underset{0}{\alpha} - \underset{m}{\alpha} + \pi}{m} \quad \text{oder} \quad \psi = \varphi + \frac{\underset{m}{\alpha} - \underset{0}{\alpha} - \pi}{m}$$

verknüpft ist, wobei einer Variation des Winkels φ von 0 bis 2π eine gleichmässige Variation des Winkels ψ von $\frac{\underset{m}{\alpha} - \underset{0}{\alpha} - \pi}{m}$ bis $2\pi + \frac{\underset{m}{\alpha} - \underset{0}{\alpha} - \pi}{m}$ entspricht. Hierdurch erhält man aus der gegebenen Gleichung (45)

$$f_1 = \underset{0}{a}\cos\underset{0}{\alpha} - \underset{m}{a}r^m\cos(\underset{0}{\alpha} + m\psi) + r^{m+1}B_1 \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

$$f_2 = \underset{0}{a}\sin\underset{0}{\alpha} - \underset{m}{a}r^m\sin(\underset{0}{\alpha} + m\psi) + r^{m+1}B_2 \quad \ldots\ldots \quad (48),$$

worin die Glieder von der Höhe $(m+1)$, $(m+2)\ldots n$ der Kürze wegen nur durch ein einfaches Zeichen angedeutet sind. Insofern man für $m\psi$ nur Werthe einführt, welche sich unendlich wenig von 0, 2π, 4π...., oder für ψ Werthe, welche sich unendlich wenig von 0, $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{4\pi}{m}$, $\ldots\frac{(m-1)2\pi}{m}$ unterscheiden, indem man dieselben resp. mit $0+\partial\psi$, $\frac{2\pi}{m}+\partial\psi$, $\frac{4\pi}{m}+\partial\psi\ldots\frac{(m-1)2\pi}{m}+\partial\psi$ bezeichnet, kann man mit jedem Grade von Genauigkeit $\cos(m\psi)=1$ und $\sin(m\psi)=m\partial\psi$ setzen. Dies gibt die nur für solche Werthe gültigen Ausdrücke:

$$f_1 = \underset{0}{a}\cos\underset{0}{\alpha} - \underset{m}{a}r^m\cos\underset{0}{\alpha} + m\partial\psi\,\underset{m}{a}r^m\sin\underset{0}{\alpha} + r^{m+1}B_1,$$

$$f_2 = \underset{0}{a}\sin\underset{0}{\alpha} - \underset{m}{a}r^m\sin\underset{0}{\alpha} - m\partial\psi\,\underset{m}{a}r^m\cos\underset{0}{\alpha} + r^{m+1}B_2.$$

Der Voraussetzung gemäss ist a eine unendlich kleine Grösse, nimmt man nun auch r unendlich klein, und zwar so, dass $\underset{m}{a}r^m = \underset{0}{a}$, also $r = \sqrt[m]{\frac{\underset{0}{a}}{\underset{m}{a}}}$ ist; so werden die vortsehenden Ausdrücke, wenn man darin die in B_1 und B_2 multiplizirten Glieder gegen die unendlich überwiegenden Glieder von der Höhe m vernachlässigt,

$$f_1 = m\partial\psi\,\underset{0}{a}\sin\underset{0}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

$$f_2 = -m\partial\psi\,\underset{0}{a}\cos\underset{0}{\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (50).$$

Digitized by Google

Aus dem Vorstehenden erhellet, dass für $\partial\psi = 0$ oder für $\psi = 0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m} \ldots \frac{(m-1)\pi}{m}$ die Kurve, wenn auch nicht vollkommen durch den Nullpunkt, doch in einer solchen Nähe an demselben vorbeigehen muss, dass ihr Abstand von diesem Punkte im Vergleich zu dem Abstande $OA = A = ae^{\alpha\sqrt{-1}} = ar^m e^{\alpha\sqrt{-1}}$ unendlich klein ist. Für ein positives $\partial\psi$ geht dieselbe bei einem gleichen Werthe von r durch einen Punkt, welcher im Vergleich zu A in einem endlichen Abstande vom Nullpunkte in einem auf OA errichteten Perpendikel liegt. Für ein negatives $\partial\psi$ aber geht die Kurve durch einen auf entgegengesetzter Seite von OA ähnlich liegenden Punkt. Hieraus folgt, mit Bezugnahme auf die früheren Untersuchungen, dass es zwischen einem solchen positiven und negativen Werthe von $\partial\psi$, also für m Werthe von ψ, welche unendlich nahe resp. an $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m} \ldots \frac{(m-1)2\pi}{m}$ liegen, Wurzeln der Gleichung (45) gibt, deren Quantitäten nahezu den unendlich kleinen Werth $\sqrt[m]{\frac{a}{m}}$ haben. Dem Winkel φ entsprechen hierfür die m Werthe

$$\frac{\alpha - \alpha + \pi}{m}, \frac{\alpha - \alpha + 3\pi}{m}, \frac{\alpha - \alpha + 5\pi}{m}, \ldots \frac{\alpha - \alpha + (2m-1)\pi}{m} \quad \ldots (51).$$

Dieses Gesetz wird nun nicht im mindesten alterirt, wenn man sich das bekannte Glied A der gegebenen Gleichung immer kleiner und kleiner werdend denkt. Im Augenblicke des Verschwindens, wo man die Gleichung

$$Ax^m + Ax^{m+1} + \ldots Ax^{n-1} + x^n = 0 \quad \ldots\ldots (52)$$

erhält, reduziren sich die unendlich kleinen Quantitäten der eben betrachteten m Wurzeln selbst auf null. Es gibt also unter den n Wurzeln dieser Gleichung m, welche gleich null sind.

Eine Gleichung von der Form (51) enthält aber insofern eine Unbestimmtheit, als man sich den Winkel α des fehlenden Anfangsgliedes, welches für keinen Werth dieses Winkels, sondern nur für den annullirten Werth seiner Quantität a zu verschwinden vermag, von jeder beliebigen Grösse denken kann. Hierdurch werden denn auch, nicht die Quantitäten, sondern die Winkel (51) der eben untersuchten m Wurzeln in demselben Maasse unbestimmt. Die Analogie hierzu spricht sich bei der geometrischen Darstellung darin aus, dass jetzt die beiden Punkte O und A zusammenfallen, wodurch der Nullpunkt der Anfangspunkt jeder Kurve wird, sodass es, um die vorstehenden Gesetze zu bewahrheiten, willkührlich bleibt, welchen Winkel man sich unter der Grösse α denken wolle.

Digitized by Google

Alle bisherigen Untersuchungen haben wir auf die Bewegung der Kurve basirt, welche sich durch die Variation der Grösse r von 0 bis ∞ für ein konstant erhaltenes φ ergibt, indem nun auch dieses φ von 0 bis 2π variirt wurde. Dieselben Thatsachen und daneben verschiedene interessante Beziehungen stellen sich heraus, wenn man jetzt die Bewegung derjenigen Kurve betrachtet, welche sich durch die Variation der Grösse φ von 0 bis 2π für ein konstant erhaltenes r erhält, indem man nun r allmählig von 0 bis ∞ wachsen lässt.

Dass eine jede solche Kurve eine in sich geschlossene sein muss, welche dabei aber verschiedene ganze Umwindungen oder Schlingen bilden kann, leuchtet sofort ein, weil die Werthe von f_1 und f_2 für $\varphi = 2\pi$ dieselben sind, wie für $\varphi = 0$.

Für $r=0$ reduzirt sich diese Kurve auf den Punkt A, indem man hierfür $f_1 = a_0 \cos\alpha_0$ und $f_2 = a_0 \sin\alpha_0$ hat.

Bei dem jetzt beginnenden Wachsen von r kann man diese Grösse zuvörderst so ungemein klein denken, dass alle übrigen Glieder in den Ausdrücken für f_1 und f_2 gegen das bekannte und das nächstfolgende Glied von geringster Dimension verschwinden. Ist nun x^m die niedrigste Potenz von x in der gegebenen Gleichung; so hat man für solche sehr kleine Werthe von r

$$f_1 = a_0 \cos\alpha_0 + a_m r^m \cos(\alpha_m + m\varphi) \quad \ldots\ldots (53)$$

$$f_2 = a_0 \sin\alpha_0 + a_m r^m \sin(\alpha_m + m\varphi) \quad \ldots\ldots (54).$$

Hierdurch ist eine Kurve dargestellt, welche sich in m aufeinanderfallenden Kreisen von demselben Radius $a_m r^m$ um den Punkt A herumschlingt. Die wahre Gestalt der Kurve, unter strenger Berücksichtigung der vernachlässigten Glieder, wird eine geschlossene Spirale von m Windungen sein, welche sich nur unendlich wenig von der Kreisform entfernen. Innerhalb aller dieser Windungen liegt der Punkt A, und da der Radius dieser Windungen selbst unendlich klein ist; so liegt der Nullpunkt O nothwendig *ausserhalb* dieser ganzen Kurve.

Denkt man sich jetzt r unendlich gross; so verschwinden alle Glieder gegen das höchste x^n und man hat:

$$f_1 = r^n \cos(n\varphi), \quad f_2 = r^n \sin(n\varphi).$$

Hierdurch ist wiederum eine Spirale dargestellt, welche sich nun aber in n der Kreisform unendlich nahe kommenden Windungen um den Punkt A herumschlingt. Da der Radius r^n für diese Kreisform unendlich gross ist; so muss der Nullpunkt O *innerhalb* aller jener n Windungen liegen.

Bei dem Uebergange der ersteren unendlich kleinen kreisförmigen Spirale von m Windungen, welche den Nullpunkt O ausschliesst, in die letztere unendlich grosse kreisförmige Spirale von n Windungen, welche den Nullpunkt einschliesst, muss nun

Digitized by Google

dieser Punkt im Ganzen n Mal und auch nicht mehr Mal von der Kurve getroffen werden, was den n Wurzeln der gegebenen Gleichung entspricht.

Um dies nachzuweisen, kann man einen dem früheren ganz ähnlichen Gang einschlagen. Hierbei zeigt sich sofort, dass auch hier keine benachbarte Kurve für $r + \partial r$ weder mit der vorhergehenden für r einen korrespondirenden Punkt gemein haben, noch sich an irgend einer Stelle in der direkten Richtung ihres daselbst liegenden Elementes fortbewegen kann, dass sich also die erstgenannte Spirale in stets übereinander her laufenden Zügen erweitern muss. Hierbei können übrigens Spitzen- und Schlingenbildungen vorkommen. Diese stehen in ganz ähnlichen Beziehungen zu den unmittelbar vorangehenden und nachfolgenden Kurven wie die früher betrachteten Spitzen und Schlingen. Die Untersuchung hierüber wird wesentlich erleichtert, wenn man auf Grund der beiden Gleichungen (12) und (13) in Erwägung zieht, dass jede neue Kurve, wie etwa $\ldots D_1 M_1 N_1 P_1 E_1 \ldots$ in Taf. XII. Fig. 19. oder Fig. 20. auf allen früher betrachteten Kurven, wie AC_1, AC_2, AC_3 in den Punkten M_1, N_1, P_1, welchen Ein und derselbe Werth von r angehört, normal steht. Hierbei ist die direkte Richtung des von M_1 auslaufenden Elementes $M_1 N_1$ der neuen Kurve gegen die direkte Richtung des korrespondirenden Elementes der Kurve $A M_1 C_1$ stets so, dass das letztere Element um einen rechten Winkel nach der Seite der positiven Rotirung um den Punkt M_1 gedreht erscheint. Einer Spitze der Kurve AC_2 liegt stets eine Spitze der Kurve $E_2 D_2$ direkt gegenüber, wobei die eigentlichen Spitzenpunkte von beiden genau ineinanderfallen. Wie sich früher Spitzen nur aus den links herum schwenkenden Krümmungen der Kurve AC_1 unmittelbar erzeugen konnten; so können jetzt nur rechts herum laufende Krümmungen der Kurve $E_1 D_1$ unmittelbar in Spitzen übergehen. Bei den hieraus entstehenden Spitzen hat man den wiederkehrenden Schenkel stets zur Rechten, wenn man die neuen Kurven $D_1 E_1, D_2 E_2 \ldots$ stets von Ein und derselben früheren Kurve, z. B. von AC_1, also vom Punkte M_1 her in Richtung ihrer positiven Entstehung durchläuft. Jetzt geht jeder Spitze $D_2 E_2$ eine sich eng zusammenziehende Krümmung $D_1 E_1$ voran, und es folgt eine Schlinge $D_3 E_3$ nach, und es findet nie eine umgekehrte Erscheinung statt. Eine solche Schlinge erweitert sich nun bei der Bewegung der Kurve, also für immer grösser werdende r, mehr und mehr, ohne an irgend einer Stelle eine rückgängige Bewegung anzunehmen, und muss zuletzt den Ausgangspunkt A aller Kurven mit umschlingen (Taf. XII. Fig. 21). Nachdem dies geschehen, hat die Kurve eine ganze Windung um den Punkt A mehr bekommen. Das Verschwinden einer Schlinge oder ganzen Windung bei positiver Fortbewegung der neuen Kurve liegt nach den obigen Gesetzen in der Unmöglichkeit. Die Zahl derselben kann sich also nicht vermindern, sondern nur vermehren, bis diese Anzahl $= n$ geworden ist, welche den unendlich grossen Werthen von r angehört. Da eine jede dieser zusammenhängenden Schlingen oder Windungen sich zuletzt über jede Gränze hinaus erweitern muss und hierbei niemals rückwärts schreiten kann; so folgt, dass von jeder der schliesslich entstehenden n Windungen eine

jede den Nullpunkt, aber auch nur ein einziges Mal treffen muss. Hierdurch sind die n Wurzeln der Gleichung vom $n$ten Grade nachgewiesen.

Das Zusammenfallen eines Punktes der Kurve, worin sich zwei Windungen kreuzen, entspricht dem Falle, dass zwei Wurzeln vorhanden sind, welche bei verschiedenen Werthen von φ dieselbe Quantität r besitzen. Fällt ein Spitzenpunkt der neuen Kurve, welcher zugleich ein Spitzenpunkt der früheren Kurve ist, auf den Nullpunkt; so gibt es, insofern diese Spitze nur Eine auf null reduzirte Schlinge vertritt, zwei vollkommen gleiche Wurzeln.

Wenn das bekannte Glied A der gegebenen Gleichung gleich null, also eine Gleichung wie (52)^0 gegeben ist; so springt aus dem mit dem Nullpunkte zusammenfallenden Punkte A sofort für die kleinsten r eine Spirale mit m Windungen hervor. Dieser Punkt ist daher als die Reduktion von m solchen Windungen anzusehen. Es gibt also dann m Wurzeln gleich null. Die früher erwähnte Unbestimmtheit für diesen Fall, welche darin beruht, dass man nun den Winkel α des bekannten Gliedes^0 willkührlich annehmen kann, was eigentlich m Systeme von unendlich vielen Wurzeln von der Quantität null herbeiführen müsste, spricht sich jetzt darin aus, dass sofort m ganze Kreisumfänge aus dem Nullpunkte hervorgehen, und derselbe daher wie das $m$fache von unendlich vielen Kurvenpunkten zu betrachten ist.

Man findet leicht, dass sich die Spiralkurve niemals wie die früher betrachtete kurve in einer geraden Linie ausstrecken kann, indem der Werth der goniometrischen Tangente des Neigungswinkels β' der Berührungslinie an der neuen Kurve, nämlich

$$\operatorname{tang}\beta' = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}}{\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}} = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial r}}{\frac{\partial f_2}{\partial r}} = \operatorname{cotang}\beta \ldots\ldots (55)$$

mit Bezugnahme auf die Gl. (36) wohl für die Veränderliche r, nicht aber für die Veränderliche φ einen konstanten Werth annehmen kann. Da man es also jetzt immer mit wahrhaften Kurven zu thun hat; so sind derartige Erläuterungen, wie sie früher bei den Fällen der geradlinigen Kurven nothwendig erschienen, hier ganz überflüssig. Es werden sich demnach mittelst der Spiralkurven auch alle reellen Wurzeln der Gleichung mit reellen Koeffizienten auf eine ganz unzweideutige Weise darstellen.

Dagegen ist es jetzt möglich, dass die Spiralkurve in mehreren aufeinanderfallenden Kreislinien zusammenläuft. Wenn der vom Nullpunkte O nach dem Mittelpunkte dieser Kreislinie führende Strahl durch $ce^{\gamma\sqrt{-1}} = c\cos\gamma + c\sin\gamma.\sqrt{-1}$, also die rechtwinkligen Koordinaten des letzteren Mittelpunktes resp. durch $c\cos\gamma$ und $c\sin\gamma$ dargestellt werden; so würde der Radius R des fraglichen Kreises

Digitized by Google

$$R=\sqrt{(f_1-c\cos\gamma)^2+(f_2-c\sin\gamma)^2} \quad \ldots\ldots (56)$$

sein, und wenn der erwähnte Fall überhaupt eintreten sollte, müsste

$$(f_1-c\cos\gamma)^2+(f_2-c\sin\gamma)^2$$

ein Ausdruck sein, welcher fähig wäre, für einen gewissen Werth von r einen von φ ganz unabhängigen Werth anzunehmen. Entwickelt man nach geschehener Substitution der Funktionen für f_1 und f_2 aus Gl. (3) den vorstehenden Ausdruck und ordnet denselben gehörig nach der Grösse φ; so findet man leicht, dass

$$c=a_0,\ \gamma=\alpha_0,\ a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0,\ldots\ldots a_{n-1}=0 \quad \ldots\ldots (57)$$

die nothwendigen Bedingungen für die Möglichkeit des vorstehenden Falles sind.

Hieraus folgt, dass bei jeder binomischen Gleichung $A+x^n=0$, oder $ae^{\alpha_0\sqrt{-1}}+r^ne^{n\varphi\sqrt{-1}}=0$, also auch bei jeder Gleichung ersten Grades, aber auch nur bei einer solchen Gleichung, die in Rede stehende Kurve einen Spiralkreis um den Punkt A als Mittelpunkt bildet. Dieselbe geht sofort als ein n facher Kreis aus dem Punkte A hervor, und bleibt stets ein solcher Kreis vom Halbmesser $R=r^n$. Die früher betrachteten Kurven werden für diesen Fall bekanntlich zu lauter geraden Linien, welche von dem Mittelpunkte A jenes Kreises auslaufen.

XX.

Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

Von dem

Herrn Hofrath Oettinger

zu Freiburg i. B.

Bekanntlich ist ein Integral mit positivem Exponenten gleich einem Differenziale mit demselben negativen Exponenten und umgekehrt, oder

$$1) \qquad \int^n fx(\partial x)^n = \frac{\partial^{-n}}{(\partial x)^n} fx,$$

$$2) \qquad \frac{\partial^n fx}{(\partial x)^n} = \int^{-n} (fx)(\partial x)^{-n}.$$

Hieraus hat man folgende Beziehungen:

$$3) \qquad \int^{m-n} fx\,(\partial x)^{m-n} = \frac{\partial^{n-m} fx}{(\partial x)^{n-m}},$$

$$4) \qquad \int^m \left(\frac{\partial^n fx}{(\partial x)^n}\right)(\partial x)^m = \frac{\partial^n}{(\partial x)^n}\left(\int^m fx(\partial x)^m\right).$$

Die Darstellungen 3) und 4) dienen zur Werthbestimmung des oben vorgelegten Integrals und zwar dadurch, dass man es auf ein Integral mit ganzem Exponenten (hier die gewöhnliche Integralform) zurückführt. Man erhält sofort folgende zwei Uebergangsformen:

Digitized by Google

5) $$\int^{\frac{1}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\int\left(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\right)\partial x=\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\left(\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}}\right).$$

Um den Werth von 5) zu bestimmen, hat man folgende Darstellungen für Differenziale mit gebrochenen Exponenten nöthig, deren Entwickelung keiner weitern Schwierigkeit unterliegt:

6) $$\frac{\partial^{\frac{p}{q}}x^{\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}=\frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,x^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}}}{1^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}|1}}=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)x^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}}}{\Gamma\left(\frac{n}{m}-\frac{p}{q}+1\right)},$$

7) $$\frac{\partial^{\frac{p}{q}}x^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}=\frac{(-)^{\frac{p}{q}}1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{n}{m}-1|1}\,x^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}=\frac{(-)^{\frac{p}{q}}\Gamma\left(\frac{p}{q}+\frac{n}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)x^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}.$$

In diesen Darstellungen ist neben der Kramp'schen Bezeichnung der Fakultäten $1^{x|1}=1.2.3....x$ auch die von Legendre $\Gamma(x+1)=1.2.3....x$ aufgeführt, weil diese in Deutschland mehr gekannt zu sein scheint, als die Kramp'sche; obgleich die Legendre'sche dem Begriff von Fakultät in keiner Weise entspricht und sich auch zur weitern Benutzung in der Theorie der Fakultäten ganz unbrauchbar zeigt.

Behandelt man nun die erste Form in 5) nach 7), so wird

$$\frac{\partial^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(-)^{\frac{1}{2}}}{1^{-\frac{1}{2}|1}x}=\frac{\sqrt{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})x}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}.x},$$

da $1^{-\frac{1}{2}|1}=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ist.

Durch Einführung dieses Werthes in 5) entsteht

8) $$\int^{\frac{1}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\int\frac{\partial x}{x}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\lg x.$$

Aus der zweiten Form in 5) hat man nach den bekannten Regeln:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pi}}=2\sqrt{x}.$$

Wird dieser Werth in die zweite Form von 5) eingeführt und wird dann die Gleichung 6) angewendet, se entsteht

9) $$\int^{1}_{0}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=2.\frac{\partial^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}=2.1^{\frac{1}{2}}.x^{0}=\frac{2.\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}=\sqrt{\pi},$$

weil $1^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\Gamma(\frac{1}{2}+1)$ ist.

Hiernach hat man, wie aus 8) und 9) hervorgeht, durch verschiedene Behandlung des Integrals

$$\int\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}$$

zwei unter sich vergchiedene Werthe fur dasselbe, einen imaginären in Verbindung mit Logarithmen und einen reellen.

Diese verschiedene Werthbestimmung beruht nach dem Vorliegenden darauf, dass man nach 5) zuerst differenzirt und dann integrirt und andererseits zuerst integrirt und dann differenzirt, also auf einer veränderten Ordnung und Ausführung der vorgeschriebenen Geschäfte.

Setzt man nun die hier begonnene Behandlungsweise fort, so erhält man folgende Integrale mit gebrochenen Exponenten aus 8):

10) $$\int^{1}_{0}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}(x\lg x-x),$$

$$\int^{1}_{0}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x^{2}\lg x}{2}-\frac{3x}{4}\right),$$

$$\int^{1}_{0}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x^{3}\lg x}{6}-\frac{11x^{3}}{36}\right),$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\int^{1}_{0}\frac{(\partial x)^{\frac{2r+1}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x^{r}\lg x}{1.2.3\ldots r}-\frac{C(1,2,3,\ldots r)^{r-1}x^{r}}{1.2^{2}.3^{2}\ldots r^{2}}\right).$$

Aus 9) aber erhält man:

11) $$\int^{1}_{0}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=x\sqrt{\pi},$$

$$\int^{1}_{0}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{x^{2}\sqrt{\pi}}{1.2},$$

$$\int^{1}_{0}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{x^{3}\sqrt{\pi}}{1.2.3},$$

$$\vdots$$

Digitized by Google

$$\vdots$$

$$\int^{\frac{2r+1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{2r+1}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{x^r\sqrt{\pi}}{1.2.3....r}.$$

Beide Darstellungen (10) und (11) sind besondere Fälle von folgenden allgemeinern:

$$12)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{(-)^{1-\frac{p}{q}}}{]^{\frac{p}{q}-1|1}} \left(\frac{x^r \lg x}{1.2.3..r} - \frac{C(1,2,....r)^{r-1}x^r}{1.2^2.3^2....r^2} \right),$$

$$13)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}x^r}{1.2.3...r}.$$

Liouville hat das Integral $\int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}$ im Journ. d. l'école polyt. T. XIII. Cah. 21. Pg. 161 und 162 behandelt und nur die Gleichung 8) und den ersten Ausdruck von 10) gefunden. Diess kommt daher, dass er nur nach einer Ansicht die vorstehende Aufgabe untersucht hat, und zwar dadurch, dass er zuerst differenzirt und dann integrirt. Die Möglichkeit der zweiten Behandlungsweise scheint er übersehen zu haben. Das allgemeine Gesetz, das hier in 10) und 12) angegeben ist, hat er nicht entwickelt, denn er blieb bei den zwei ersten Integralausdrücken stehen. Die Ausdrücke 11), 12), und 13) finden sich in dem angeführten Werke aus dem angeregten Grunde nicht vor.

Sind nun die hier gefundenen Resultate, wie nicht zu bezweifeln ist und wie sich noch auf andere Weise darthun lässt, richtig, so werden die in 3) und 4) aufgestellten Gesetze nicht ohne alle Beschränkung hinzunehmen sein, denn es kann, wie hier vorliegt, der Fall eintreten, dass die Anwendung des in ihnen liegenden Gesetzes auf verschiedene Resultate führt. Hiedurch wird Folgendes gerechtfertigt sein.

Die Ordnung im Differenziren und Integriren ist nicht immer gleichgültig. Sie kann auf verschiedene Resultate führen. Die in 3) und 4) liegenden Gesetze sind daher mit Vorsicht zu gebrauchen.

Die Angabe der Zahlenwerthe des Ausdrucks

$$C(1,\ 2,\ 3....r)^{r-1} = A_r$$

in der Gleichung 13) und der Fakultät $1^{r|1}$ verursacht bei etwas höhern Zahlen viele Mühe. Wir geben hierüber folgende Zusammenstellung:

Digitized by Google

$A_1 = 1$	$1^{1\|1} = 1$
$A_2 = 3$	$1^{2\|1} = 2$
$A_3 = 11$	$1^{3\|1} = 6$
$A_4 = 50$	$1^{4\|1} = 24$
$A_5 = 274$	$1^{5\|1} = 120$
$A_6 = 1764$	$1^{6\|1} = 720$
$A_7 = 13068$	$1^{7\|1} = 5040$
$A_8 = 109584$	$1^{8\|1} = 40320$
$A_9 = 1026576$	$1^{9\|1} = 362880$
$A_{10} = 10628640$	$1^{10\|1} = 3628800$
$A_{11} = 120543840$	$1^{11\|1} = 39916800$
$A_{12} = 1486442880$	$1^{12\|1} = 479001600$
$A_{13} = 19802759040$	$1^{13\|1} = 6227020800$
$A_{14} = 283465647360$	$1^{14\|1} = 871178291200$
$A_{15} = 4339163001600$	$1^{15\|1} = 1307674368000$
$A_{16} = 70734282393600$	$1^{16\|1} = 20922789888000$
$A_{17} = 1223405590579200$	$1^{17\|1} = 355687428096000$
$A_{18} = 22376988058521600$	$1^{18\|1} = 6402373705728000$
$A_{19} = 431565146817638400$	$1^{19\|1} = 121645100408832000$
$A_{20} = 8752948036761600000,$	$1^{20\|1} = 2432902008176640000.$

Diese Zahlenwerthe wurden auf zwei verschiedene Weisen berechnet und richtig befunden.

Digitized by Google

XXI.

Beiträge zur Theorie der quadratischen Formen.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Die in meiner Abhandlung „Beitrag zur Theorie der quadratischen Formen" (Grunert Archiv XIII. pag. 105 ff.) entwickelten Resultate führen zunächst zur Auflösung dreier Hauptprobleme über die Transformabilität der quadratischen Formen, welche in den Disquisitionibus Arithmeticis nicht zur Sprache gebracht werden.

Erste Aufgabe. Sämmtliche Klassen der quadratischen Formen von bestimmter Determinante zu finden, welche in das Produkt zweier gegebenen Formen transformabel sind.

Auflösung. Man bezeichne die gegebenen Formen durch

$$f=(a,b,c),\quad f'=(a',b',c');$$

ihre Determinanten durch d,d'; das grösste gemeinschaftliche Maass von a, $2b$, c sei m, und eine ähnliche Bedeutung habe m' in Bezug auf die Form f'; endlich sei D' die Determinante der gesuchten Formen, und D das grösste gemeinschaftliche Maass von $dm'm'$, $d'mm$. Soll nun die Aufgabe nicht unmöglich sein, so muss D durch D' theilbar, und der Quotient ein Quadrat sein, wesshalb wir $D=D'kk$ setzen, wo k eine positive ganze Zahl

bedeutet; dies vorausgesetzt, muss jede in das Produkt ff' tran formabele Form jede beliebige aus f, f' auf dieselbe Weise z sammengesetzte Form eigentlich einschliessen, und umgeke (Disq. Arithm. Art. 239. 238.), und daraus ergiebt sich folgen Lösung unserer Aufgabe.

Man suche eine beliebige aus f, f' in Bezug auf beide Fo men direct zusammengesetzte Form F, welche die Determinan $D=D'kk$ haben wird, und bestimme die Klassen aller Formen von der Determinante D', welche F eigentlich einschliessen; Aufgabe wird hiermit vollständig gelöst sein, wenn f, f' in Transformation aus F' in ff' beide direct genommen werden len. Will man beide invers nehmen, so legt man eine aus f, auf eben diese Weise zusammengesetzte Form zu Grunde, u auf ähnliche Art wird man sich verhalten, wenn eine der Form f, f' direct, die andere invers genommen werden soll.

Was aber die Aufgabe betrifft: „die Klassen aller Form von der Determinante D' zu finden, welche die gegebene For $F=(A,B,C)$ von der Determinante $D'kk$ eigentlich einschliessen so habe ich deren Lösung in der am Eingange erwähnten Abhand lung gegeben: Man findet zunächst eine endliche Menge von Fo men (A',B',C'), welcher alle die Form F eigentlich einschliessen den Formen eigentlich äquivalent sein müssen, und es bleibt dan bloss noch übrig, dieselben in Klassen zu bringen. Die Berech nung von A', B', C' wird nach folgenden Formeln geführt:

$$A'=\frac{A}{tt}, \quad uB'\equiv\frac{B}{t} \text{ (mod. } A'), \quad C'=\frac{B'B'-D'}{A'};$$

wo $k=tu$, t jedweden positiven Theiler von k bedeutet, dessen Quadrat A misst, der folglich wegen der Gleichung $BB-A$ $=D'kk$ in B aufgeht; wobei zu bemerken, dass diejenigen Zer legungen von k in tu zu verwerfen sind, für welche B', C' kein ganzen Zahlen werden.

Beispiel.

$$f=(9,\ 3,\ 29),\ f'=(8,\ 2,\ 32),\ d=d'=-252,\ D=-252.$$

$D'=-7$ misst D, der Quotient ein Quadrat, nämlich 36, also $k=6$. Man findet $F=(4,2,64)$; für $t=1$, $u=6$ wird

$$A'=4,\ CB'\equiv 2 \text{ (mod. 4)},\ B'=1,\ 3;\ C'=2,\ 4 \text{ resp.};$$

für $t=2$, $k=3$ wird

$$A'=1,\ 3B'\equiv 1 \text{ (mod. 1)},\ B'=0,\ C'=7$$

also erhält man die drei Formen

$$(4,1,2);\ (4,3,4);\ (1,0,7);$$

welche aber nur zwei Klassen bilden, deren Repräsentanten (1,0,7) (2,1,4) sind.

Zweite Aufgabe. Zu beurtheilen, ob eine gegebene Form F' in das Produkt zweier ebenfalls gegebener Formen f, f' transformabel ist.

Auflösung. Man bestimme eine beliebige aus f, f' direct zusammengesetzte Form F, so z. B., dass beide Formen direct in die Composition eingehen, und untersuche, ob F unter F' eigentlich enthalten ist; jenachdem dies der Fall ist, oder nicht, wird F' in ff' transformabel, oder nicht transformabel sein, unter der Voraussetzung, dass f, f' beide direct in dieser Transformation zu nehmen sind. Um zu finden, ob F' auf eine andere Weise in ff' transformabel ist, wird man wieder eine aus beiden Formen auf dieselbe Weise zusammengesetzte Form zu Grunde legen.

Dritte Aufgabe. Die Form F' ist in das Produkt ff' auf bekannte Weise transformabel; man sucht sämmtliche darauf Bezug habende Transformationen aus F' in ff'.

Auflösung. Man suche eine beliebige Form F, welche aus f, f' eben so zusammengesetzt ist, wie F' in ff' transformabel, und wird dabei zugleich eine Transformation aus F in ff' kennen lernen, welche durch p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''' bezeichnet werden mag (s. m. Abh. Mémoire sur la théorie des formes quadratiques, Archiv XIII.). Bestimmt man nun alle eigentlichen Transformationen aus F' in F, deren Inbegriff durch α, β, γ, δ bezeichnet werde (Archiv XIII. pag. 105 ff.), und macht

$$\mathfrak{p}=\alpha p+\beta q,\quad \mathfrak{p}'=\alpha p'+\beta q',\quad \mathfrak{p}''=\alpha p''+\beta q'',\quad \mathfrak{p}'''=\alpha p'''+\beta q'''$$

$$\mathfrak{q}=\gamma p+\delta q,\quad \mathfrak{q}'=\gamma p'+\delta q',\quad \mathfrak{q}''=\gamma p''+\delta q'',\quad \mathfrak{q}'''=\gamma p'''+\delta q'''$$

so wird $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}'''$; $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{q}'''$ der Inbegriff aller der Transformationen aus F' in ff' sein, für welche f, f' auf die bekannte Art genommen werden.

Der Beweis für dieses Verfahren folgt aus den im Art. 239. der Disq. Arithm. angestellten Betrachtungen, die hier nicht wiederholt werden sollen.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die Zerlegung einer quadratischen Form F in zwei andere f, f', deren eine gegeben ist, während die andere gesucht wird, wobei alle drei Formen dieselbe Determinante haben.

1. *Lehrsatz.* Wenn die drei Formen F, f, f' dieselbe Determinante D haben, und F in das Produkt ff' durch die Substitution p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''' transformabel ist, so wird f' in das Produkt aus F und

Digitized by Google

der Entgegengesetzten von f durch die Substitution $-q', p', q''', -p'''$; $q, -p, -q'', p''$ transformabel sein.*)

Beweis. Es sei

$$F=(A,B,C),\quad f=(a,b,c),\quad f'=(a',b',c').$$

Da F in ff' transformabel ist, und alle drei Formen dieselbe Determinante haben, so existiren die folgenden neun Gleichungen. (Disq. Arithm. Art. 235.):

$$pq'-qp'=a,\ pq''-qp''=a',\ pq'''-qp'''=b'+b,\ p'q''-q'p''=b'-b,$$
$$p'q'''-q'p'''=c',\quad p''q'''-q''p'''=c;\quad q'q''-qq'''=A,$$
$$pq'''+qp'''-p'q''-q'p''=2B,\quad p'p''-pp'''=C.$$

Nun folgt aus diesen Gleichungen:

$$q'p-qp'=a,\ q'q''-qq'''=A,\ -q'p''+qp'''=B-b,\ -p'q''+pq'''=B+b,\ p'p''-pp'''=C,\ q'''p''-q''p'''=c;\ pq''-qp''=a',$$
$$-q'p''-qp'''+p'q''+pq'''=2b',\quad p'q'''-q'p'''=c';$$

folglich ist (a', b', c') in das Produkt der Formen (A, B, C), $(a, -b, c)$ mittelst der im Lehrsatz gesagten Substitution transformabel (Disq. Arithm. art. 235.).

Umgekehrt, wenn (a', b', c') in $(A,B,C)\times(a,-b,c)$ transformabel ist, so wird (A, B, C) in $(a,b,c)\times(a',b',c')$ transformabel sein.

2. Es seien

$$F=(A,B,C),\quad f=(a,b,c),\quad f'=(a',b',c')$$

drei Formen von derselben Determinante D, M das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen A, $2B$, C und m, m' haben eine ähnliche Bedeutung in Bezug auf die Formen f, f'. Wenn nun F aus f, f' zusammengesetzt ist, so hat man bekanntlich $M=mm'$; ferner wird auch M gegen m' prim sein, da D, die Determinante der zusammengesetzten Form, das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen $Dm'm'$, Dmm sein muss. — Sind also F, f gegebene Formen von derselben Determinante D, und man will eine Form von eben dieser Determinante finden, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F resultirt, so muss M durch m theilbar, und der Quotient gegen m prim sein. Diese Bemerkung rechtfertigt die Beschränkung, welche wir in der nächsten Aufgabe machen werden.

---

*) Es wird von jetzt an nur der Hauptfall betrachtet, wo bei der Zusammensetzung oder Transformation die Formen direct genommen werden.

3. *Aufgabe.* $F=(A,B,C)$, $f=(a,b,c)$ sind zwei gegebene Formen von derselben Determinante D; M, m die grössten gemeinschaftlichen Maasse von A, $2B$, C; a, $2b$, c resp., und $\frac{M}{m}$ ist eine ganze Zahl, prim gegen m; man sucht die Klassen aller Formen f' der nämlichen Determinante D, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F resultirt.

Auflösung. Man bestimme die Klassen aller Formen $f'=(a', b', c')$ von der Determinante D, welche in das Produkt der Formen F, $(a, -b, c)$ transformabel sind (erste Aufgabe), und behalte nur diejenigen bei, für welche a', $2b'$, c' das grösste gemeinschaftliche Maass $\frac{M}{m}=m'$ haben; klassifizirt man die letzteren, so wird die Aufgabe gelöst sein.

Denn da f' in das Produkt $F\times(a, -b, c)$ transformabel ist, so muss F in $f'\times(a,b,c)=ff'$ transformabel sein (erster Lehrsatz); nun ist aber, da m' gegen m prim, die Determinante von F, nämlich D, das grösste gemeinschaftliche Maass von $Dm'm'$, Dmm, folglich F aus f, f' zusammengesetzt. — Umgekehrt, wenn f' mit f zusammengesetzt F hervorbringt, so muss f' in $F\times(a, -b, c)$ transformabel, und das gemeinschaftliche Maass von a', $2b'$, c' nothwendig gleich $\frac{M}{m}$ sein; folglich giebt es keine Klassen von Formen f', welche durch das gelehrte Verfahren nicht gefunden würden.

In Bezug auf die Anwendung dieser Regel werden noch folgende Bemerkungen von Nutzen sein.

Um die Formen f' von der Determinante D zu finden, welche in $F\times(a, -b, c)$ transformabel sind, hat man zunächst F und $(a, -b, c)$ zusammenzusetzen. Die resultirende Form, welche offenbar die Determinante Dmm haben wird, heisse $\mathfrak{F}=(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})$. Hierauf sind die die Form $\mathfrak{F}$ eigentlich einschliessenden Formen von der Determinante D zu bestimmen. Zu dem Ende hat man, $m=tu$ gesetzt,

$$a'=\frac{\mathfrak{A}}{tt},\quad ub'\equiv\frac{\mathfrak{B}}{t}\ (\text{mod. } a'),\quad b'b'-a'c'=D.$$

Das grösste gemeinschaftliche Maass von $\mathfrak{A}$, $2\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist bekanntlich $Mm=mmm'$, mithin sind $\mathfrak{A}$, $2\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sämmtlich durch mm

Digitized by Google

theilbar, also auch $\frac{\mathfrak{B}}{m}$ eine ganze Zahl*); hieraus ergiebt sich dass

$$\frac{\mathfrak{A}}{tt}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{tu}, \quad \frac{a'}{tu}, \quad \frac{\mathfrak{C}}{uu}, \quad \frac{2\mathfrak{B}}{mu}$$

ganze Zahlen sein werden, welche Zerlegung von m in tu angewandt werden möge. Nun hat man

$$b' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{m} \,(\text{mod.}\, \frac{a'}{u}),$$

folglich

$$b' = \frac{\mathfrak{B}}{m} + \varrho \frac{a'}{u},$$

wo für ϱ die Zahlen $0, 1, 2, \ldots u-1$, oder überhaupt alle nach u incongruenten Werthe zu nehmen sind, und man findet

$$c' = \frac{\mathfrak{C}}{uu} + \frac{2\varrho\mathfrak{B}}{mu} + \frac{\varrho\varrho\mathfrak{A}}{mm},$$

folglich sind a', b', c' für jedwede Zerlegung von m ganze Zahlen. Die Berechnung reducirt sich somit, nachdem die Form $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ gefunden worden, auf die folgenden Formeln:

$$m = tu, \; a' = \frac{\mathfrak{A}}{tt}, \; b' = \frac{\mathfrak{B}}{m} + \varrho \frac{a'}{u}, \; c' = \frac{\mathfrak{C}}{uu} + \frac{2\varrho\mathfrak{B}}{um} + \frac{\varrho\varrho\mathfrak{A}}{mu};$$

wobei zu bemerken, dass c' auch nach der Formel $c' = \frac{b'b' - D}{a'}$ gefunden wird, wenn nur a' nicht verschwindet.

Unter den auf diese Weise berechneten Formen (a', b', c') deren Menge offenbar der Summe aller Theiler von m gleich kommt, sind diejenigen auszuwerfen, für welche das grösste gemeinschaftliche Maass von a', $2b'$, c' nicht gleich $\frac{M}{m}$ ist, um die übrig bleibenden in Klassen zu bringen.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn $m = 1$, d. h. f eine eigentlich primitive Form ist, die Form $\mathfrak{F}$ die Determinante D erhält

---

*) $\frac{2\mathfrak{B}}{mm}$ ist eine ganze Zahl, folglich $\frac{\mathfrak{B}}{m}$ ebenfalls, wenn m ungerade wenn aber m gerade, so hat man $\frac{2\mathfrak{B}}{mm} = \frac{\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}mm}$, mithin $\frac{\mathfrak{B}}{m}$ wiederum eine ganze Zahl.

folglich mit f' eigentlich äquivalent ist, was auf folgenden im Art. 249. der Disq. Arithm. auf anderem Wege gefundenen Satz führt: „Wenn F, f zwei Formen von derselben Determinante sind, deren letztere eigentlich primitiv, so giebt es immer Formen der nämlichen Determinante, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F resultirt; aber sie gehören alle in eine Klasse, in welcher sich auch die aus F und der Entgegengesetzten von f zusammengesetzte Form befindet.

Beispiele.

1) $F=(12,\ 6,\ 24)$, $f=(3,\ 0,\ 84)$, $D=-252$.

Hier ist $M=12$, $m=3$, also $m'=4$. Man findet

$$\mathfrak{F}=(36,\ -54,\ 144),$$

daraus

$$(a',\ b',\ c')=(4,\ -18,\ 144);\ (36,\ -18,\ 16);\ (36,\ -6,\ 8);\ (36,\ 6,\ 8).$$

Für alle diese Formen ist $m'=4$; auch gehören sie in verschiedene Klassen, deren Repräsentanten

$$(4,\ 2,\ 64);\ (8,\ 2,\ 32);\ (8,\ -2,\ 32);\ (16,\ 2,\ 16)$$

sind.

2) $F=(20,\ 5,\ -30)$, $f=(6,\ -1,\ -104)$, $D=625$.

Hier ist $M=10$, $m=2$, also $m'=5$. Man findet

$$\mathfrak{F}=(120,\ -70,\ 20),$$

daraus

$$(a',\ b',\ c')=(30,\ -35,\ 20);\ (120,\ -35,\ 5);\ (120,\ 25,\ 0).$$

Die erste und dritte dieser Formen sind zu verwerfen, also bleibt $(120,\ -35,\ 5)$, welche mit $(5,\ 25,\ 0)$ eigentlich äquivalent ist.

4. *Lehrsatz.* Indem die in der vorigen Aufgabe angegebenen Bedingungen beibehalten werden, so giebt es immer mindestens *eine* Klasse von Formen, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F hervorgeht.

Beweis. Wenn die Form $\mathfrak{F}=(\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C})$ nicht schon so beschaffen ist, dass $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ relative Primzahlen sind, so behaupte ich, dass man immer eine mit $\mathfrak{F}$ eigentlich äquivalente Form finden kann, für welche diese Bedingung Statt hat. Es sind, um dies darzuthun, zwei Fälle zu unterscheiden.

Digitized by Google

I. $\mathfrak{F}$ sei aus einer eigentlich primitiven Form $(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \mathfrak{C}^0)$ abgeleitet. In diesem Falle ist

$$\mathfrak{A}^0 = \frac{\mathfrak{A}}{Mm}, \quad \mathfrak{B}^0 = \frac{\mathfrak{B}}{Mm}, \quad \mathfrak{C}^0 = \frac{\mathfrak{C}}{Mm};$$

$$\mathfrak{B}^0\mathfrak{B}^0 - \mathfrak{A}^0\mathfrak{C}^0 = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{(Mm)^2} = \frac{Dmm}{(Mm)^2} = \frac{D}{MM}.$$

Durch die eigentlich primitive Form

$$\mathfrak{A}^0 xx + 2\mathfrak{B}^0 xy + \mathfrak{C}^0 yy$$

können nun unendlich viele Zahlen dargestellt werden, welche gegen jede gegebene Zahl prim sind (Disq. Arithm. art. 228.), und man kann annehmen, dass die Werthe von x und y, mit Hülfe deren dies geschieht, relative Primzahlen sind*); es sei also

$$\mathfrak{A}^0\alpha\alpha + 2\mathfrak{B}^0\alpha\gamma + \mathfrak{C}^0\gamma\gamma = \mathfrak{A}^{0\prime} \text{ prim gegen } \frac{2Dm}{MM},$$

$$\alpha \text{ prim gegen } \gamma;$$

durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für welche $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, wird man $(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \mathfrak{C}^0)$ in eine eigentlich äquivalente Form $(\mathfrak{A}^{0\prime}, \mathfrak{B}^{0\prime}, \mathfrak{C}^{0\prime})$ verwandeln, und

$$(Mm\mathfrak{A}^0, Mm\mathfrak{B}^0, Mm\mathfrak{C}^0) = \mathfrak{F}, \quad (Mm\mathfrak{A}^{0\prime}, Mm\mathfrak{B}^{0\prime}, Mm\mathfrak{C}^{0\prime}) = \mathfrak{F}'$$

werden ebenfalls eigentlich äquivalente Formen sein. Jetzt müssen

$$\frac{Mm\mathfrak{A}^{0\prime}}{Mm} = \mathfrak{A}^{0\prime}, \quad \frac{2MmB^{0\prime}}{M} = 2mB^{0\prime}$$

relative Primzahlen sein. Denn hätten sie einen Primfactor gemein, so würde derselbe in

$$\frac{2Dm}{MM} = 2m(\mathfrak{B}^0\mathfrak{B}^0 - \mathfrak{A}^0\mathfrak{C}^0) = 2m(\mathfrak{B}^{0\prime}\mathfrak{B}^{0\prime} - \mathfrak{A}^{0\prime}\mathfrak{C}^{0\prime})$$

---

*) Wäre

$$\mathfrak{A}^0\alpha\alpha + 2\mathfrak{B}^0\alpha\gamma + \mathfrak{C}^0\gamma\gamma = \mathfrak{A}^{0\prime}$$

prim gegen die gegebene Zahl Z, so dass α und γ das gr. gem. Maass μ hätten, so würde, $\alpha = \mu\alpha^0$, $\gamma = \mu\gamma^0$ gesetzt,

$$\mathfrak{A}^0\alpha^0\alpha^0 + 2\mathfrak{B}^0\alpha^0\gamma^0 + \mathfrak{C}^0\gamma^0\gamma^0 = \frac{\mathfrak{A}^{0\prime}}{\mu\mu},$$

$\frac{\mathfrak{A}^{0\prime}}{\mu\mu}$ ebenfalls prim gegen Z, α^0 prim gegen γ^0 sein.

Digitized by Google

aufgehen, während $\mathfrak{A}^{\alpha'}$ prim gegen $\frac{2Dm}{MM}$ genommen wurde. Also ist $\mathfrak{F}'$ eine Form von der verlangten Eigenschaft.

II. $\mathfrak{F}$ sei aus einer uneigentlich primitiven Form $(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \mathfrak{C}^0)$ abgeleitet. In diesem Falle ist

$$\mathfrak{A}^0 = \frac{\mathfrak{A}}{\frac{1}{2}Mm}, \quad \mathfrak{B}^0 = \frac{\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}Mm}, \quad \mathfrak{C}^0 = \frac{\mathfrak{C}}{\frac{1}{2}Mm};$$

$$\mathfrak{B}^0\mathfrak{B}^0 - \mathfrak{A}^0\mathfrak{C}^0 = \frac{4D}{MM}.$$

Durch die Form

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}^0xx + \mathfrak{B}^0xy + \frac{1}{2}\mathfrak{C}^0yy$$

werden Zahlen dargestellt, welche gegen $\frac{4Dm}{MM}$ prim sind, so dass $x=\alpha$, $y=\gamma$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben; eine solche Zahl sei $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{\alpha'}$. Transformirt man nun $(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \mathfrak{C}^0)$ durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für welche $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, in $(\mathfrak{A}^{\alpha'}, \mathfrak{B}^{0'}, \mathfrak{C}^{0'})$, so sind

$$\mathfrak{F} \text{ und } (\tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{A}^{\alpha'}, \ \tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{B}^{0'}, \ \tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{C}^{0'})$$

eigentlich äquivalente Formen, und

$$\frac{\frac{1}{2}Mm\mathfrak{A}^{0'}}{Mm} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{\alpha'}, \quad \frac{Mm\mathfrak{B}^{0'}}{M} = m\mathfrak{B}^{0'}$$

relative Primzahlen, da

$$\frac{4Dm}{MM} = m(\mathfrak{B}^0\mathfrak{B}^0 - \mathfrak{A}^0\mathfrak{C}^0) = m(\mathfrak{B}^{0'}\mathfrak{B}^{0'} - \mathfrak{A}^{0'}\mathfrak{C}^{0'})$$

ist. Die Form von der geforderten Eigenschaft ist also

$$(\tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{A}^{0'}, \ \tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{B}^{0'}, \ \tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{C}^{0'}).$$

Da nun jede mit $\mathfrak{F}$ eigentlich äquivalente Form, ebenso wie $\mathfrak{F}$ selbst, aus f, f' zusammengesetzt ist, und in der Aufgabe 3. jede beliebige aus f, f' zusammengesetzte Form zu Grunde ge-

Digitized by Google

legt werden durfte, so sei $\mathfrak{F}=(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ eine Form der Art, dass $\frac{\mathfrak{A}}{Mm'}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ keinen Faktor gemein haben.

Dies vorausgesetzt, wird unter den in 3. gefundenen Formen immer diejenige mit f zusammengesetzt F geben, welche durch die besonderen Werthe $t=m$, $u=1$, $\varrho=0$ hervorgeht, nämlich die Form $(\frac{\mathfrak{A}}{mm}, \frac{\mathfrak{B}}{m}, \mathfrak{C})$, da $\frac{\mathfrak{A}}{mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{m}$, $\mathfrak{C}$ das grösste gemeinschaftliche Maass m' haben.*)

Uebrigens ist zu bemerken, dass man solche Werthe von $x=\alpha$, $y=\gamma$, mit deren Hülfe die primitive Form

$$\mathfrak{A}^{\circ}xx+2\mathfrak{B}^{\circ}xy+\mathfrak{C}^{\circ}yy$$

einen Werth erlangt, welcher gegen eine gegebene Zahl, oder deren Hälfte prim ist, nach einer bestimmten Methode finden kann, worüber art. 228. der Disq. Arithm. zu vergleichen.

Beispiel. Ist

$$F=(120, -70, 20), \quad f=(6, -1, -104),$$

wo $D=625$, $M=10$, $m=2$, $m'=5$, so findet sich $\mathfrak{F}=(120, -70, 20)$ aus der uneigentlich primitiven Form $(12, -7, 2)$ abgeleitet; und da $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ den Factor 2 gemein haben, so ist $\mathfrak{F}$ zu transformiren. Zu dem Ende ist

$$6\alpha\alpha-7\alpha\gamma+\gamma\gamma=\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{\circ\prime}$$

prim gegen 50 zu nehmen. Dieser Bedingung genügen $\alpha=6$, $\gamma=5$; β, δ kann man resp. $=1, 1$ setzen; dadurch kommt

$$(\mathfrak{A}^{\circ\prime}, \mathfrak{B}^{\circ\prime}, \mathfrak{C}^{\circ\prime})=(62, 5, 0), \quad \mathfrak{F}'=(620, 50, 0);$$

folglich $f'=(155, 25, 0)$, wofür man die Reducirte $(5, 25, 0)$ anwenden kann.

---

*) Es ist

$$\frac{\mathfrak{A}}{mmm'}=\frac{\mathfrak{A}}{Mm}, \quad \frac{2\mathfrak{B}}{mm'}=\frac{2\mathfrak{B}}{M},$$

folglich m' das grösste gemeinschaftliche Maass von $\frac{\mathfrak{A}}{mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{m}$; und da dasselbe in $\mathfrak{C}$ aufgeht, indem $\mathfrak{C}$ durch $Mm=mmm'$ theilbar ist, so wird es auch das gr. gem. Maass von $\frac{\mathfrak{A}}{mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{m}$, $\mathfrak{C}$ sein; q. e. d.

5. Wenn man die Form $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ so wählt, dass $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ keinen Faktor gemein haben, so gewährt dies den Vortheil, dass man die Menge aller derjenigen in 3. aufgestellten Formen, welche, mit f zusammengesetzt, F geben, a priori bestimmen kann. Zur Abkürzung bezeichne man den Complex aller in 3. aufgestellten Formen durch Ω, den Complex derjenigen unter ihnen, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F resultirt, durch ω.

Ist $f' = (a', b', c')$ eine Form aus Ω, so hat man

$$\frac{a'}{m'} = \frac{\mathfrak{A}}{Mm} uu, \quad \frac{2b'}{m'} = \frac{2\mathfrak{B}}{M} + 2\varrho \frac{\mathfrak{A}}{Mm} u,$$

$$\frac{c'}{m'} = \frac{\mathfrak{A}}{Mm} \varrho\varrho + \frac{2\mathfrak{B}}{Mm} \varrho t + \frac{\mathfrak{C}}{Mm} tt,$$

und eine solche Form wird in ω gehören, sobald diese drei Glieder keinen Faktor gemein haben.

Diese Bedingung erfordert, dass u gegen das dritte Glied prim ist, da $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ den Faktor u enthält. — Umgekehrt, wenn u gegen das dritte Glied prim, so haben die drei Glieder keinen gemeinschaftlichen Faktor. Denn hätten sie einen Primfaktor p gemein, so könnte derselbe, da er $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ und $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$ nicht zugleich messen kann, in $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$ nicht aufgehen, müsste u messen, was unmöglich. Noch wird bemerkt, dass $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$, u keinen Faktor gemein haben, indem u ein Theiler von $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ ist.

Setzen wir also zur Abkürzung

$$\frac{\mathfrak{A}}{Mm} = \mathfrak{A}', \quad \frac{2\mathfrak{B}}{Mm} = \mathfrak{B}', \quad \frac{\mathfrak{C}}{Mm} = \mathfrak{C}',$$

und

$$\mathfrak{A}'\varrho\varrho + \mathfrak{B}'\varrho t + \mathfrak{C}'tt = Z,$$

so ist, damit f' in den Complex ω gehöre, nothwendig und ausreichend, dass Z und u, oder, was hier gleichviel gilt, $\mathfrak{A}'Z$ und u, keinen Faktor gemein haben.

6. Die Aufgabe, ϱ der vorhergehenden Bedingung gemäss zu bestimmen, lässt sich vereinfachen, wenn man von der Gleichung

Digitized by Google

$$\mathfrak{A}'Z=\frac{1}{4}\left[(2\mathfrak{A}'\varrho+\mathfrak{B}'t)^2-\frac{4Dt^2}{M^2}\right]$$

ausgeht, wo

$$\frac{4D}{M^2}=\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'-4\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$$

ist. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn $\mathfrak{B}'t$ gerade ist, so hat man

$$\mathfrak{A}'Z=(\mathfrak{A}'\varrho+\frac{1}{2}\mathfrak{B}'t)^2-\frac{Dt^2}{M^2},$$

und findet die sämmtlichen Werthe von ϱ unter k, welche Z prim gegen u machen, nach folgender Regel, deren Grund leicht erhellt. Man bestimme alle Werthe von z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$, für welche $z^2-\frac{Dt^2}{M^2}$ prim gegen u wird, hierauf für jeden derselben eine entsprechende Zahl ϱ mittelst der Congruenz

$$\mathfrak{A}'\varrho\equiv z-\frac{1}{2}\mathfrak{B}'t \pmod{u}$$

zwischen 0 und $u-1$ incl. Der Werthe von ϱ sind also eben so viele, als der von z.

2) Wenn $\mathfrak{B}'t$ ungerade, u ungerade, so suche man alle z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$, so dass $z^2-\frac{4Dt^2}{M^2}$ prim gegen u wird, und bestimme die jedem einzelnen z entsprechende Zahl ϱ aus der Congruenz

$$2\mathfrak{A}'\varrho\equiv z-\mathfrak{B}'t \pmod{u}$$

zwischen 0 und $u-1$ incl., welche Aufgabe immer möglich und bestimmt ist. Der Werthe von ϱ sind wiederum ebenso viele als der von z.

3) Wenn $\mathfrak{B}'t$ ungerade, u gerade, so kann Z für keinen Werth von ϱ prim gegen u werden, sobald $\frac{4D}{M^2}\equiv 1 \pmod{8}$, da dann Z stets den Faktor 2 enthält. — Ist aber $\frac{4D}{M^2}\equiv 5 \pmod{8}$ in welchem Falle Z für jedes ϱ ungerade wird, so bestimme man, $u=2^\mu u'$ gesetzt, wo u' ungerade, zunächst alle z zwischen $-\frac{1}{2}u'$ und $+\frac{1}{2}u'$, welche $z^2-\frac{4Dt^2}{M^2}$ prim gegen u' machen; diese Werthe seien z', z'', z''', etc., ihre Anzahl ξ. Sucht man hierauf den jedesmaligen Werth von z unter u, welcher je einem der

Digitized by Google

Werthe z', z'', z''' etc. nach dem mod. u' und je einer ungeraden Zahl unter 2^μ nach dem mod. 2^μ congruent ist, so hat man alle z unter u, für welche $\frac{1}{4}\left(z^2-\frac{4Dt^2}{M^2}\right)$ ganz und prim gegen u wird. Die Menge derselben ist $2^{\mu-1}\zeta$. Endlich wird man zu jedem z zwei Werthe von ϱ unter u mittelst der Congruenz

$$2\mathfrak{A}'\varrho\equiv z-\mathfrak{B}'t \pmod{u}$$

finden, so dass also die Gesammtmenge aller Werthe von ϱ in diesem Falle gleich $2^\mu\zeta$ ist.

7. Die drei vorhergehenden Fälle führen also nur auf eine Aufgabe zurück, nämlich alle Werthe von z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$ zu finden, für welche z^2-L prim gegen u wird.*) Die Auflösung derselben beruht auf dem leicht zu beweisenden Satze:

„Ist u das Produkt der Zahlen u', u'', u''' etc., welche paarweise prim gegen einander sind; bedeutet dann z' jedweden Werth von z zwischen $-\frac{1}{2}u'$ und $+\frac{1}{2}u'$, für welchen z^2-L prim gegen u' wird, z'' jedweden Werth von z zwischen $-\frac{1}{2}u''$ und $+\frac{1}{2}u''$, für welchen z^2-L prim gegen u'' wird, u. s. f., und nimmt man endlich z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$ so, dass es den Zahlen z', z'', etc. nach den Moduln u', u'', resp. congruent wird, so ist z der Inbegriff aller Werthe zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$, für welche z^2-L prim gegen u wird."

Hieraus folgt ferner: Ist ζ' die Menge der z', ζ'' die Menge der z'', ζ''' die Menge der z''' etc., so wird das Produkt $\zeta'\zeta''\zeta'''$ etc. die Menge der z sein.

Man denke sich nun statt u', u'', u''' etc. die Potenzen der Primfaktoren, in welche u aufgelöst werden kann; es sei $u'=p^\pi$. Ist $p=2$, so kann man, damit z^2-L prim gegen 2^π werde, für z nur gerade, oder nur ungerade Werthe setzen, je nachdem L resp. ungerade oder gerade ist, folglich $\zeta'=2^{\pi-1}$. Ist p ein ungerader Primfaktor, und L ein Nichtrest desselben, so darf für z jeder beliebige Werth zwischen den obigen Gränzen gesetzt werden, folglich $\zeta'=p^\pi$. Ist L durch p theilbar, so müssen alle

*) Im ersten Falle ist $L=\frac{Dt^2}{M^2}$, in den beiden andern $L=\frac{4Dt^2}{M^2}$, und im letzten Falle überdies u' an die Stelle von u zu setzen.

Digitized by Google

z prim gegen p sein, folglich $\zeta = p^{\pi-1}(p-1)$. Ist endlich L Rest von p (durch p nicht theilbar), so hat die Congruenz $z^2 - L \equiv 0 \pmod{p}$ zwei Wurzeln zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$, also $2p^{\pi-1}$ Wurzeln zwischen $-\frac{1}{2}p^\pi$ und $+\frac{1}{2}p^\pi$, folglich

$$\zeta' = p^\pi - 2p^{\pi-1} = p^{\pi-1}(p-2).$$

Hiermit ist die Menge aller z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$, folglich auch die Menge aller ϱ zwischen 0 und $u-1$, für welche Z prim gegen u wird, vollkommen bestimmt.

Beispiel. Man sucht alle ϱ unter 60, für welche

$$Z = 11\varrho\varrho - 11\varrho + 9$$

prim gegen 60 wird. Hier ist

$$11Z = \frac{1}{4}[(22\varrho - 11)^2 + 275], \quad -275 \equiv 5 \pmod{8.};$$

also hat man den dritten Fall des vorigen Paragraphen. Die Congruenz $z^2 + 275 \equiv 0 \pmod{3.}$ hat die Wurzel $z = -1, +1$; 275 durch 5 theilbar, folglich $z \equiv 0 \pmod{3.}$ und $\equiv -2, -1, +1, +2 \pmod{5.}$ und $\equiv 1, 3 \pmod{4.}$; mithin

$$z = \pm 3, \ \pm 9, \ \pm 21, \ \pm 27;$$

$22\varrho - 11 \equiv z \pmod{60.}$ giebt

$\varrho = 2, 5, 11, 14, 17, 20, 26, 29, 32, 35, 41, 44, 47, 50, 56, 59.$

8. Es sei nun $m = PQ$, wo P, Q relative Primzahlen sind. Wie leicht erhellt, findet man alle Theiler von m, wenn man jeden Theiler von P mit jedem Theiler von Q als Faktor verbindet. Die Theiler von P seien p, p', p'' etc.; die Theiler von Q: q, q', q'' etc.; ferner bezeichne man die Mengen der Formen im Complex ω, welche den Theilern p, q von m entsprechen, resp. durch ξ, η und lasse ξ', η'; ξ'', η'' etc. eine ähnliche Bedeutung haben in Bezug auf p', q'; p'', q'' etc. Die Menge aller Formen aus ω, welche durch Anwendung der Theiler qp, qp', qp'' etc. entstehen, ist offenbar $\eta(\xi + \xi' + \xi'' ..)$; eben so $\eta'(\xi + \xi' + \xi'' ..)$ die Menge aller Formen aus ω, welche durch Anwendung der Theiler $q'p$, $q'p'$, $q'p''$ etc. hervorgehen u. s. w., folglich die Menge der sämmtlichen Formen in ω

$$= (\eta + \eta' + \eta'' ...)(\xi + \xi' + \xi'' ...).$$

Eine ähnliche Formel erhält man, wenn m aus mehr, als zwei Faktoren, besteht, und wir gelangen zu dem Satze:

„Es sei m das Produkt beliebig vieler Faktoren P, Q, R etc., welche paarweise prim gegen einander sind. Bezeichnet man die

Digitized by Google

lengen der Formen aus ϖ, welche durch Anwendung der sämmtlichen Theiler von P, der von Q, der von R etc. resultiren, resp. urch Ξ, H, Θ etc., die Menge aller Formen in ϖ überhaupt urch μ, so ist $\mu = \Xi H \Theta$ etc.“

9. Man denke sich jetzt unter P, Q, R.... die Potenzen der Primfaktoren, in welche m aufgelöst werden kann, so dass $P = 2^\nu$ $\nu = 0$ gesetzt, wenn m ungerade), $Q = \mathfrak{a}^\alpha$, $R = \mathfrak{b}^\beta$, ..., und unterscheide folgende Fälle.

I. F, f seien beide eigentlich primitiven Formen derivirt, in welchem Falle $\frac{D}{M^2}$, $\frac{D}{m^2}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{B}'$ ganze Zahlen sind; die Formen in ω sind ebenfalls aus eigentlichen Formen derivirt.

II. F sei aus einer uneigentlichen, f aus einer eigentlichen Form derivirt. Dann sind die Formen in ω aus uneigentlichen Formen derivirt; ferner $\frac{D}{m^2}$, $\frac{4D}{M^2}$ ganze Zahlen, die letztere congruent 1 (mod. 4), $\mathfrak{B}'$ ungerade; da ferner $\frac{4D}{m^2} = \frac{4D}{M^2} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^2$, so muss $\frac{M}{m}$ gerade, also m, welches prim gegen $\frac{M}{m}$ ist, nothwendig ungerade sein.

III. Wenn f aus einer uneigentlichen Form abgeleitet ist, so wird Dasselbe für F gelten, weil, wenn $\frac{D}{M^2}$ eine ganze Zahl wäre, $\frac{D}{m^2} = \frac{D}{M^2} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^2$ es ebenfalls sein müsste. In diesem Falle ist $\mathfrak{B}'$ ungerade, m gerade, folglich m' ungerade, und die Formen aus ω aus eigentlichen Formen abgeleitet.

Um nun H zu bestimmen, sei zuerst $u = \mathfrak{a}^\lambda$, wo $\lambda < \alpha$; $t = 2^\nu \mathfrak{a}^{\alpha-\lambda} \mathfrak{b}^\beta \ldots$ wird den Faktor $\mathfrak{a}$ enthalten, folglich $\frac{Dt^2}{M^2}$, $\frac{4Dt^2}{M^2}$ ebenfalls; in den Fällen I. und III. ist $\mathfrak{B}'t$ gerade, in II. $\mathfrak{B}'t$ ungerade, u ungerade; daher die Menge der dem Theiler $\mathfrak{a}^\lambda$ entsprechenden Formen $= \mathfrak{a}^{\lambda-1}(\mathfrak{a}-1)$ (7.) — Ist $u = \mathfrak{a}^\alpha$, so enthält t den Faktor $\mathfrak{a}$ nicht, im Falle III. $\frac{Dt^2}{M^2} = \frac{4D}{M^2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2$ Rest, oder Nichtrest, oder Vielfaches von $\mathfrak{a}$ mit $\frac{4D}{M^2}$ zugleich; daher die Menge der dem Theiler $\mathfrak{a}^\alpha$ entsprechenden Formen $= \mathfrak{a}^{\alpha-1}(\mathfrak{a}-\varepsilon)$, $\varepsilon = 0, 1, 2$ gesetzt, je nachdem $\frac{D}{M^2}$ im Falle I., $\frac{4D}{M^2}$ in den Fällen II. und III. Nichtrest, Vielfaches oder Rest von $\mathfrak{a}$ ist. Hieraus folgt:

$$H = 1 + \mathfrak{a} - 1 + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1) + \mathfrak{a}^2(\mathfrak{a}-1) + \ldots + \mathfrak{a}^{\alpha-2}(\mathfrak{a}-1) + \mathfrak{a}^{\alpha-1}(\mathfrak{a}-\varepsilon)$$
$$= \mathfrak{a}^{\alpha-1}(\mathfrak{a} - \varepsilon + 1).$$

Um Ξ zu bestimmen, wobei nur die Fälle I. und III. in Betracht kommen, hat man in I. für jeden Theiler 2^λ die Menge der Formen $2^{\lambda-1}$, folglich

$$\Xi = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{\nu-1} = 2^\nu.$$

Im Falle III. hat man für jeden Theiler 2^λ, wo $\lambda < \nu$, ebenfalls die Menge $2^{\lambda-1}$ (da t gerade), folglich die dem Inbegriff der Theiler $1, 2, 2^2, \ldots 2^{\nu-1}$ entsprechende Menge $2^{\nu-1}$. — Dem Theiler 2^ν (für welchen $\mathfrak{B}'t$ ungerade) entsprechen keine Formen, wenn $\frac{4D}{M^2} \equiv 1 \pmod 8$. Wenn aber $\frac{4D}{M^2} \equiv 5 \pmod 8$, so kommt die Menge 2^ν hinzu (vergl. 6. und 7.). Es ist also im Falle III. $\Xi = 2^{\nu-1}$, oder $= 2^{\nu-1} + 2^\nu$, jenachdem $\frac{4D}{M^2} \equiv 1$ oder $5 \pmod 8$ ist.

Fasst man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Es ist μ (die Menge aller Formen in dem Complex ω)

$$= \frac{m \cdot \mathfrak{N} \cdot (a - \varepsilon + 1)(b - \varepsilon' + 1)(c - \varepsilon'' + 1) \text{ etc.}}{abc \text{ etc.}};$$

wo $\mathfrak{N} = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ zu setzen, je nachdem f aus einer eigentlich primitiven Form abgeleitet, oder f aus einer uneigentlich primitiven Form abgeleitet, und ausserdem $\frac{4D}{M^2} \equiv 1 \pmod 8$, oder f aus einer uneigentlich primitiven Form abgeleitet, und ausserdem $\frac{4D}{M^2} \equiv 5 \pmod 8$; wo ferner $\varepsilon = 0, 1, 2$ zu setzen, je nachdem $\frac{4D}{M^2}$ Nichtrest, Vielfaches, oder Rest von a ist; $\varepsilon', \varepsilon''$ u. s. w. aber ähnlichen Bestimmungen in Bezug auf b, c u. s. w. unterliegen.

Man bemerke, dass der Werth von μ bloss von den Zahlen D, m abhängig ist; denn in der vorhergehenden Regel kann man $\frac{4D}{m^2}$ an die Stelle von $\frac{4D}{M^2}$ setzen, wie aus der Gleichung $\frac{4D}{m^2} = \frac{4D}{M^2} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^2$, wo $\frac{M}{m}$ ganz und prim gegen m ist, leicht folgt.

10. Wir gehen zur Classificirung der im Complex ω enthaltenen Formen über.

Es seien

$$f' = (a', b', c'); \quad f'' = (a'', b'', c'')$$

zwei eigentlich äquivalente Formen in ω, deren erstere in die leztere durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ übergeht. Es erhellt,

Digitized by Google

dass, indem φ, φ' diejenigen primitiven Formen bedeuten, aus denen f', f'' abgeleitet sind, φ' vermittelst der nämlichen Substitution aus φ entstehen wird. In den Fällen I. und III. sind φ, φ' eigentlich primitiv, und man hat,

$$\varphi=(g,\ h,\ i),\ \varphi'=(g',\ h',\ i')$$

gesetzt,

$$g=\mathfrak{A}'u^2,\ h=\frac{\mathfrak{B}}{M}+\varrho\mathfrak{A}'u,\ h^2-gi=\frac{D}{m'^2};$$

$$g'=\mathfrak{A}'u'^2,\ h'=\frac{\mathfrak{B}}{M}+\varrho'\mathfrak{A}'u',\ h'^2-g'i'=\frac{D}{m'^2}.$$

Im Falle II. sind φ, φ' uneigentlich primitive Formen, und man hat

$$g=2\mathfrak{A}'u^2,\ h=\frac{2\mathfrak{B}}{M}+2\varrho\mathfrak{A}'u,\ h^2-gi=\frac{4D}{m'^2};$$

$$g'=2\mathfrak{A}'u'^2,\ h'=\frac{2\mathfrak{B}}{M}+2\varrho'\mathfrak{A}'u',\ h'^2-g'i'=\frac{4D}{m'^2}.$$

Nun hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&1)\ g'=g\alpha\alpha+2h\alpha\gamma+i\gamma\gamma,\\
&2)\ h'=g\alpha\beta+h(\alpha\delta+\beta\gamma)+i\gamma\delta,\\
&3)\ 1=\alpha\delta-\beta\gamma;
\end{aligned}$$

aus denen leicht noch diese folgen:

$$\begin{aligned}
&4)\ (h'-h)\alpha=g'\beta+i\gamma,\\
&5)\ (h'+h)\gamma=g'\delta-g\alpha.
\end{aligned}$$

Das grösste gemeinschaftliche Maass von u, u' werde durch ϑ bezeichnet. Da in den Fällen I. und III. ϑ in g und $2h$ aufgeht (ebenso wie u), g, $2h$, i aber keinen Faktor gemein haben, so ist ϑ prim gegen i; da ferner ϑ in $h'-h$, g' aufgeht, so ist es nach 4) ein Theiler von γ. Die Zahl $\mathfrak{A}'$ ist prim gegen $h'+h$ (da sie gegen $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ prim ist), misst $(h'+h)\gamma$ nach 5), folglich auch γ. Endlich ist ϑ gegen $\mathfrak{A}'$ prim (da es in $2h$ aufgeht, und $2h$, $\mathfrak{A}'$ keinen Faktor gemein haben), folglich $\vartheta\mathfrak{A}'$ ein Theiler von γ. Die Zahl m ist durch u, u', folglich durch deren kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus $\frac{uu'}{\vartheta}$ theilbar.

Im Falle II. geht ϑ in g, h auf, und da hier g, h, i keinen Faktor gemein haben, so ist ϑ prim gegen i, misst folglich nach 4) die Zahl γ. Die Zahl $\mathfrak{A}'$ geht in $\frac{1}{2}(h'+h)\gamma$ auf, und ist

prim gegen $\frac{1}{2}(h'+h)$, folglich γ durch $\mathfrak{A}'$ theilbar. ϑ ist gegen $\mathfrak{A}'$ prim, also wiederum $\vartheta\mathfrak{A}'$ ein Theiler von γ. Auch ist m ein Vielfaches von $\frac{uu'}{\vartheta}$.

Fall I. Ist F aus einer eigentlich primitiven Form derivirt, so ist $\frac{D}{m'^2}$ durch m^2 theilbar, und die sich aus 1) ergebende Gleichung

$$gg' = (g\alpha + h\gamma)^2 - \frac{D}{m'^2}\gamma^2$$

verwandelt sich, wenn man

$$\gamma = \vartheta\mathfrak{A}'\,q,\ g\alpha + h\gamma = \vartheta\mathfrak{A}'\,p,\ m = \frac{uu'}{\vartheta}\,\varkappa,\ \frac{D}{m'^2} = \lambda m^2$$

setzt, in die folgende:

$$\left(\frac{\vartheta p}{uu'}\right)^2 - \lambda\,(\varkappa q)^2 = 1.$$

Nun kann q ebenso wenig wie γ verschwinden; denn fände das Letztere Statt, so folgte aus den Gleichungen 1) bis 3) leicht

$$g' = g,\ h' \equiv h \pmod{g},\ \text{d. i. } \varrho' \equiv \varrho \pmod{u},\ \varrho' = \varrho,\ h' = h;$$

folglich wären φ, φ', und auch f', f'', identische Formen, gegen die Annahme.

Bei negativer Determinante kann also, soll der vorhergehenden Gleichung genügt werden, nur $\lambda = -1$, d. h. $D = -m^2 m'^2 = -M^2$ sein. — Bei quadratischer Determinante ist die vorhergehende Gleichung unmöglich, da die Differenz zweier Quadrate nur 1 sein kann, wenn das kleinere verschwindet.

Fall II. Hier ist $\frac{4D}{m'^2}$ durch m^2 theilbar, also $\frac{4D}{m'^2} = \lambda m^2$, wo $\lambda \equiv 1 \pmod 4$, und

$$gg' = (g\alpha + h\gamma)^2 - \frac{4D}{m'^2}\gamma^2,$$

folglich

$$\gamma = \vartheta\mathfrak{A}'q,\ g\alpha + h\gamma = \vartheta\mathfrak{A}'p,\ m = \frac{uu'}{\vartheta}\varkappa,\ 4 = \left(\frac{\vartheta p}{uu'}\right)^2 - \lambda(\varkappa q)^2.$$

Bei negativer Determinante erfordert die letzte Gleichung entweder $p = 0$, oder $\left(\frac{\vartheta p}{uu'}\right)^2 = 1$; der erste Fall ist aber unmöglich,

Digitized by Google

weil sonst $-\lambda.(\varkappa q)^2=4$, $-\lambda=1$, λ nicht $\equiv 1 \pmod 4$ wäre; folglich

$$-\lambda.(\varkappa q)^2=3,\ \lambda=-3,\ D=-\frac{3}{4}M^2.$$

Bei quadratischer Determinante ist die obige Gleichung überhaupt unmöglich, da die Differenz zweier Quadrate nur 4 sein kann, wenn das kleinere verschwindet.

Fall III. Hier ist $\frac{4D}{m^2}$ ebenfalls durch m^2 theilbar, $\frac{4D}{m^2}=\lambda m^2$, $\lambda\equiv 1 \pmod 4$,

$$gg'=(g\alpha+h\gamma)^2-\frac{D}{m^2}\gamma^2,$$

und wenn wir

$$\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'q,\ g\alpha+h\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'p,\ m=\frac{uu'}{\vartheta}\varkappa$$

setzen, so kommt

$$4=\left(\frac{2\vartheta p}{uu'}\right)^2-\lambda(\varkappa q)^2.$$

Bei negativer Determinante kann nur

$$\left(\frac{2\vartheta p}{uu'}\right)^2=1,\ -\lambda.(\varkappa q)^2=3,\ \lambda=-3$$

sein, folglich

$$D=-\frac{3}{4}M^2.$$

Bei quadratischer Determinante ist die vorhergehende Gleichung unmöglich. Hieraus folgt:

Die Formen in ω gehören bei quadratischer Determinante ohne Ausnahme, bei negativer Determinante mit Ausnahme der Fälle $D=-M^2$, $D=-\frac{3}{4}M^2$, sämmtlich in verschiedene Klassen, deren Anzahl folglich $=\mu$ ist (vergl. 9.).

11. Betrachtung des Ausnahmefalles $D=-M^2$.

Nach dem Vorhergehenden ist nothwendig

$$p=0,\ q^2=1,\ \varkappa=1;$$

Digitized by Google

d. h.

$$g\alpha + h\gamma = 0,\ \gamma^2 = \vartheta^2 \mathfrak{A}'^2,\ m = \frac{uu'}{\vartheta};$$

folglich

$$\gamma m = \pm \mathfrak{A}' uu'.$$

Umgekehrt, bestimmt man die relativen Primzahlen α und γ aus der Gleichung $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-h}{g}$, β und δ aus $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, macht $u' = \pm\frac{\gamma m}{\mathfrak{A}' u}$, und transformirt die Form $\varphi = (g, h, i)$ durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in $\varphi' = (g', h', i')$, so lässt sich Folgendes schliessen:

1°. Man erhält

$$g(g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2) = -\frac{D}{m^2}\gamma^2 = (\gamma m)^2 = \mathfrak{A}'^2 u^2 u'^2 = g \cdot \mathfrak{A}' u'^2;$$

$$g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2 = \mathfrak{A}' u'^2;\ g' = \mathfrak{A}' u'^2.$$

2°. Wegen $g\alpha + h\gamma = 0$ geht $\mathfrak{A}'$ in $h\gamma$, folglich in γ auf, da es gegen h prim ist, also $u' = \pm\frac{\gamma m}{\mathfrak{A}' u}$ eine ganze Zahl.

3°. Es ist $\frac{m}{u'} = \pm\frac{\mathfrak{A}' u}{\gamma}$; ferner $\mathfrak{A}' u\alpha + \frac{h}{u}\gamma = 0$, $\frac{\mathfrak{A}' u}{\gamma}$ eine ganze Zahl, folglich u' Theiler von m.

4°. Es ist

$$h' = (g\alpha + h\gamma)\beta + (h\alpha + i\gamma)\delta = (h\alpha + i\gamma)\delta \equiv h \pmod{\gamma \text{ oder } \mathfrak{A}'},$$

$$h \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M} \pmod{\mathfrak{A}'},\ \text{also } h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M} \pmod{\mathfrak{A}'}.$$

Ferner

$$ig' = (h\alpha + i\gamma)^2 + m^2\alpha^2,\ g',\ m^2$$

durch u'^2 theilbar, also $h\alpha + i\gamma$ durch u' theilbar, mithin auch h'; und da u' auch in $\frac{\mathfrak{B}}{M}$ aufgeht, so folgt $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M}$ (mod. u'). Da endlich $\mathfrak{A}'$ gegen u' prim, so kommt $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M}$ (mod. $\mathfrak{A}' u'$), oder $h' = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \sigma' \mathfrak{A}' u'$.

5°. Liegt σ' innerhalb der Grenzen 0 und $u' - 1$ incl., so folgt, dass die Form φ' sich im Complex ω befindet. Ist jenes nicht der Fall, so sei ϱ' der kleinste positive Rest von σ' nach dem

Digitized by Google

mod. u', und man erhält $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho' \mathfrak{A}' u'$ (mod. g'). Bekanntlich kann man nun für β und δ andere Werthe finden, so dass h' einen beliebigen, der Zahl $\frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho' \mathfrak{A}' u'$ nach g' congruenten Werth, folglich diesen Werth selbst erlangt, und dann wird sich φ' wiederum in ω befinden,

6°. φ und φ' sind nicht identisch.

Denn wäre $g=g'$, $h=h'$, so kommt nach 10. 4) $0 = u^2\beta + i\frac{\gamma}{\mathfrak{A}'}$, aber u^2 prim gegen i, folglich $\frac{\gamma}{\mathfrak{A}' u^2}$ eine ganze Zahl; aus der Gleichung $u' = \pm \frac{\gamma m}{\mathfrak{A}' u}$ folgt aber, da $u = u'$ ist, $\frac{\gamma}{\mathfrak{A}' u^2} = \pm \frac{1}{m}$, mithin $m=1$, welcher Fall stets ausgeschlossen wird *).

7°. Bezeichnet man den Werth des Bruchs $\frac{-h}{g}$, in den kleinsten Zahlen, durch $\frac{Z}{N}$, so ist entweder $\alpha = +Z$, $\gamma = +N$, oder $\alpha = -Z$, $\gamma = -N$.

Es verwandle sich φ in φ' durch die Substitution $+Z$, Z', $+N$, N'; in φ'' durch die Substitution $-Z$, Z'', $-N$, N'', so dass

$$ZN' - Z'N = 1, \quad -ZN'' + Z''N = 1$$

ist, und man denke sich Z', N', sowie Z'', N'', so bestimmt, dass φ', φ'' sich beide im Complex ω befinden, was nach dem Vorhergehenden möglich ist. Die Formen φ', φ'' werden identisch sein.

Bezeichnet man dieselben durch

$$(g', h', i'), (g'', h'', i'')^{**});$$

so hat man

$$\begin{aligned} h' &= gZZ' + h(ZN' + Z'N) + iNN', \\ h'' &= -gZZ'' + h(-ZN'' - Z''N) - iNN'', \\ ZN' - Z'N &= -ZN'' + Z''N = 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} Z(h' - h'') &= g'(Z' + Z'') \equiv 0 \pmod{g'}, \\ N(h' - h'') &= g'(N' + N'') \equiv 0 \pmod{g'}; \end{aligned}$$

---

*) Ist $m=1$, so enthält der Complex ω nur eine Form.

**) Dass die Anfangsglieder gleich werden, erhellt sogleich.

Digitized by Google

und da Z, N relative Primzahlen sind, so folgt $h'-h''\equiv 0 \pmod{g'}$. Nun ist

$$h'=\frac{\mathfrak{B}}{M}+\varrho'\mathfrak{A}'u', \quad h''=\frac{\mathfrak{B}}{M}+\varrho''\mathfrak{A}'u', \quad h'-h''=\mathfrak{A}'u'(\varrho'-\varrho'');$$

folglich $\varrho'-\varrho''\equiv 0 \pmod{u'}$, daher $\varrho'=\varrho''$, indem ϱ', ϱ'' beide zwischen den Grenzen 0 und $u'-1$ liegen.

8°. Jede Form φ ist also mit einer von ihr verschiedenen Form im Complex ω eigentlich aequivalent, folglich die Anzahl der Klassen in ω gleich $\frac{1}{2}\mu$.

12. Betrachtung des Ausnahmefalls $D=-\frac{3}{4}M^2$.

Beschäftigen wir uns zuvörderst mit dem Falle II., so ist

$$\left(\frac{p\vartheta}{uu'}\right)^2=1, \quad q^2=1, \quad \varkappa=1;$$

folglich

$$g\alpha+(h\mp m)\gamma=0, \quad u'=\pm\frac{\gamma m}{\mathfrak{A}'u}.$$

Umgekehrt, macht man $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{-h\pm m}{g}$, so dass α und γ relative Primzahlen sind,

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1, \quad u'=\pm\frac{\gamma m}{\mathfrak{A}'u};$$

und transformirt $\varphi=(g, h, i)$ in $\varphi'=(g' k', i')$ durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so lässt sich Folgendes schliessen:

1°. Man erhält

$$g(g\alpha^2+2h\alpha\gamma+i\gamma^2)=(g\alpha+h\gamma)^2+3m^2\gamma^2=4m^2\gamma^2=4\mathfrak{A}'^2u^2u'^2,$$

folglich

$$g\alpha^2+2h\alpha\gamma+i\gamma^2=2\mathfrak{A}'u'^2, \quad g'=2\mathfrak{A}'u'^2.$$

2°. Man findet leicht

$$\frac{h\mp m}{2}\equiv m\frac{\mathfrak{B}'\mp 1}{2} \pmod{\mathfrak{A}'},$$

Digitized by Google

$$\frac{\mathfrak{B}'+1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{B}'-1}{2}\equiv -1 \pmod{\mathfrak{A}'}^{*}),$$

und daraus folgt, dass $\mathfrak{A}'$ prim gegen $\frac{h\mp m}{2}$ ist. Nun war $g\alpha+(h\mp m)\gamma=0$, d. i. $\mathfrak{A}'u'^2\alpha+\frac{h\mp m}{2}\gamma=0$, folglich geht $\mathfrak{A}'$ in γ auf, und u' eine ganze Zahl**).

3°. Es ist $\frac{m}{u'}=\pm\frac{\mathfrak{A}'u}{\gamma}$; ferner $\mathfrak{A}'u\alpha+\frac{h\mp m}{2u}\gamma=0$ (weil h, m, u ungerade sind, so ist $\frac{h\mp m}{2u}$ ganz), folglich $\frac{\mathfrak{A}'u}{\gamma}$ eine ganze Zahl. u' Theiler von m.

4°. Es ist

$$h'-h=g\alpha\beta+2\beta\gamma h+i\gamma\delta,$$

i gerade (indem φ eine uneigentlich primitive Form), folglich $i\gamma$, sowie g, 2γ durch $2\mathfrak{A}'$ theilbar, also $h'-h\equiv 0 \pmod{2\mathfrak{A}'}$, $h'\equiv\frac{2\mathfrak{B}}{M} \pmod{2\mathfrak{A}'}$. — Ferner $ig'=(h\alpha+i\gamma)^2+3m^2\alpha^2$, $h\alpha+i\gamma$ durch u' theilbar, also auch h', welches den Werth $\pm m\beta\gamma+\delta(h\alpha+i\gamma)$ hat. Da endlich u' als ungerade Zahl prim gegen $2\mathfrak{A}'$, so kommt $h'\equiv\frac{2\mathfrak{B}}{M} \pmod{2\mathfrak{A}'u'}$. Man kann sich daher β, δ so bestimmt denken, dass $h'=\frac{2\mathfrak{B}}{M}+2\varrho'\mathfrak{A}'u'$ wird, wo ϱ' innerhalb der Grenzen 0 und $u'-1$ incl. liegt.

5°. Ist diese Bestimmung getroffen, so ist erwiesen, dass die Form φ' sich im Complex ω befindet.

6°. φ und φ' sind nicht identisch, was ebenso wie im vorigen Paragraphen erwiesen wird.

7°. Bezeichnet man den Werth des Bruchs $\frac{-h+m}{g}$ in den kleinsten Zahlen durch $\frac{Z}{N}$, so entspricht den Werthen $\alpha=Z$, $\gamma=N$ eine Form $\varphi'=(g', h', i')$, während die Annahme $\alpha=-Z$, $\gamma=-N$ zu einer mit φ' identischen Form führt (vergl. 11. 7°.).

Eine zweite Form $\varphi''=(g'', h'', i'')$ erhält man, von der

---

*) Aus $\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}=Dm^2$ folgt $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'-4\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'=\frac{4D}{M^2}\equiv -3$, und daraus diese Congruenz.

**) Man beachte, dass m, h, $\mathfrak{B}'$ ungerade sind (vergl. 9.)

Digitized by Google

Gleichung $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{-h-m}{g}$ ausgehend, und es ist zu untersuchen, ob φ', φ'' unter sich identisch sein können.

8°. φ gehe in φ', φ'' über resp. durch die Substitutionen α', β', γ', δ'; α'', β'', γ'', δ'', und es werde angenommen, dass φ', φ'' identisch sind, so dass $g'=g''$, $h'=h''$. Dann hat man wegen $g'=\frac{4\gamma'^2m^2}{g}$, $g''=\frac{4\gamma''^2m^2}{g}$ zunächst $\gamma'\mp\gamma''=0$. Aus

$$g\alpha'+h\gamma'=m\gamma',\ g\alpha''+h\gamma''=-m\gamma''$$

folgt ferner

$$g(\alpha'\mp\alpha'')+h(\gamma'\mp\gamma'')=m(\gamma'\pm\gamma''),$$

d. i.

$$g(\alpha'\mp\alpha'')=2m\gamma'\ldots[1].$$

Ferner nach 10. 5)

$$(h'+h)\gamma'=g'\delta'-g\alpha',\ (h'+h)\gamma''=g'\delta''-g\alpha'';$$

folglich

$$(h'+h)(\gamma'\mp\gamma'')=g'(\delta'\mp\delta'')-g(\alpha'\mp\alpha''),$$

d. i.

$$0=g'(\delta'\mp\delta'')-g(\alpha'\mp\alpha'')\ldots[2],$$

also nach [1] und [2]

$$g(\alpha'\mp\alpha'')=2m\gamma',$$
$$g'(\delta'\mp\delta'')=2m\gamma'.$$

Die Multiplication dieser Gleichungen giebt

$$gg'(\alpha\mp\alpha'')(\delta'\mp\delta'')=4m^2\gamma'^2=gg',$$

folglich

$$(\alpha'\mp\alpha'')(\delta'\mp\delta'')=1,\ \alpha'\mp\alpha''=\delta'\mp\delta''=\pm1;$$

also $g'=g$. Endlich nach 10. 4)

$$(h'-h)\alpha'=g\beta'+i\gamma',\ (h'-h)\alpha''=g\beta''+i\gamma'';$$

folglich durch Subtraction

$$(h'-h)(\alpha'\mp\alpha'')=g(\beta'\mp\beta''),$$

Digitized by

d. i.

$$\pm(h'-h)=g(\beta'\mp\beta''),$$

folglich

$$h'-h\equiv 0 \pmod{g},$$

der Faktor $\beta'\mp\beta''$ mag verschwinden, oder nicht. Nun ist

$$h'-h=2(\varrho'-\varrho)\mathfrak{A}'u,$$

also

$$\varrho'-\varrho\equiv 0 \pmod{u},\ \varrho'=\varrho.$$

Wenn also φ', φ'' identisch wären, so müssten es φ, φ' ebenfalls sein, gegen das vorher Bewiesene.

9°. Jede Form φ ist also mit zwei von ihr verschiedenen Formen φ', φ'', die auch unter sich verschieden sind, eigentlich aequivalent.

Zu demselben Resultat führt die Analyse des Falles III. Die beiden Formen φ', φ'' erhält man hier nach den Formeln

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{-h\pm\frac{1}{2}m}{g},\ \alpha\delta-\beta\gamma=1,\ u'=\pm\frac{\gamma m}{\mathfrak{A}'u},\ g'=\mathfrak{A}'u'^2,$$

$$h'=g\alpha\beta+h(\alpha\delta+\beta\gamma)+i\gamma\delta,\ i'=\frac{h'^2+\frac{3}{4}m^2}{g'}.$$

Hieraus schliessen wir: In dem Falle $D=-\frac{3}{4}M^2$ ist die Anzahl der Klassen, in welche die Formen in ω zerfallen, gleich $\frac{1}{3}\mu$.

13. Die positive Determinante, welche noch übrig ist, bietet schon mehr Schwierigkeiten dar, lässt indessen eine der vorhergehenden ähnliche Analyse zu.

Erster Hauptfall. Aus den Gleichungen

$$\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'q,\ g\alpha+h\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'p,\ m=\frac{uu'}{\vartheta}\varkappa,\ \frac{D}{m'^2}=\lambda m^2,$$

$$\left(\frac{\vartheta p}{uu'}\right)^2-\lambda(\varkappa q)^2=1$$

folgt, wenn man noch $\frac{\vartheta p}{uu'}=x$, $\varkappa q=y$ setzt,

Digitized by Google

$$xx - \lambda yy = 1, \quad g\alpha + h\gamma = \frac{m\gamma x}{y}, \quad \mathfrak{A}' uu' y = \gamma m.$$

Umgekehrt, macht man

$$xx - \lambda yy = 1, \text{ wo } \lambda = \frac{D}{M^2}, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{mx - hy}{gy},$$

so dass α, γ relative Primzahlen sind,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad u' = \frac{\gamma m}{\mathfrak{A}' uy},$$

und transformirt $\varphi = (g, h, i)$ durch die Substitution α, β, γ, δ in $\varphi' = (g', h', i')$, so lässt sich Folgendes schliessen.

I. Man findet

$$g(g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2) = (g\alpha + h\gamma)^2 - \lambda m^2\gamma^2$$

$$= \left(\frac{m\gamma}{y}\right)^2 (xx - \lambda yy) = (\mathfrak{A}' uu')^2 = g.\mathfrak{A}' u'^2,$$

folglich

$$g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2 = \mathfrak{A}' u'^2, \quad g' = \mathfrak{A}' u'^2.$$

II. Setzt man $h = uh^0$, $t = \vartheta t^0$, $y = \vartheta y^0$, wo h^0 eine ganze Zahl, ϑ das grösste gem. Maass von t und y; t^0, y^0 also relative Primzahlen sind, so kommt $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{t^0 x - h^0 y^0}{\mathfrak{A}' uy^0}$. Nun findet man leicht

$$t^0 x - h^0 y^0 \equiv (x - \frac{1}{2}\mathfrak{B}' y)\, t^0 \pmod{\mathfrak{A}' y^0},$$

$$(x - \frac{1}{2}\mathfrak{B}' y)(x + \frac{1}{2}\mathfrak{B}' y) + \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\vartheta^2 y^{0\,2} = 1;$$

folglich sind $t^0 x - h^0 y^0$, $\mathfrak{A}' y^0$ relative Primzahlen (Da $\mathfrak{A}'$ prim gegen m, so ist es auch prim gegen t^0, den Theiler von m). Bezeichnen wir also das grösste gem. Maass von $t^0 x - h^0 y^0$, u durch ψ, so folgt

$$t^0 x - h^0 y^0 = \pm\psi\alpha, \quad \mathfrak{A}' uy^0 = \pm\psi\gamma, \quad u' = \frac{\gamma t^0}{\mathfrak{A}' y^0} = \frac{u}{\psi} t^0,$$

u' eine ganze Zahl.

III. Es folgt ferner

Digitized by Google

$$\frac{m}{u'} = \frac{\mathfrak{A}' uy}{\gamma} = \vartheta\psi,$$

u' Theiler von m.

IV. Man hat

$$h' = \beta(g\alpha + h\gamma) + \delta(h\alpha + i\gamma) = \frac{m\beta\gamma x}{y} + \delta(h\alpha + i\gamma),$$

$$\frac{m\beta\gamma x}{\mathfrak{A}' y} = uu'\beta x,\ \gamma \equiv 0 \text{ (mod. } \mathfrak{A}'),\ \alpha\delta \equiv 1 \text{ (mod. } \gamma \text{ oder } \mathfrak{A}');$$

folglich

$$h' \equiv h \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M} \text{ (mod. } \mathfrak{A}').$$

Ferner

$$ig' = (h\alpha + i\gamma)^2 - \lambda m^2\alpha^2,$$

also $h\alpha + i\gamma$ durch u' theilbar; aber auch $\frac{m\beta\gamma x}{u'y} = \mathfrak{A}' u\beta x$ ganz, folglich $h' \equiv 0$ (mod. u'), ferner $\frac{\mathfrak{B}}{M} \equiv 0$ (mod. u'), folglich $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M}$ (mod. u'). Nun ist $\mathfrak{A}'$ gegen u' prim, also auch $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M}$ (mod. $\mathfrak{A}' u'$). Auch kann man β, δ so bestimmen, dass $h' = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho' \mathfrak{A}' u'$ wird, und ϱ' zwischen 0 und $u' - 1$ incl. liegt.

V. Ist diese Bestimmung getroffen, so ist erwiesen, dass φ' sich im Complex ω vorfindet, welche Wurzeln der Gleichung $xx - \lambda yy = 1$ zur Berechnung dieser Form auch angewandt werden mögen.

VI. Sind φ, φ' identisch, so folgt wie in II. 6°., dass $\frac{\gamma}{\mathfrak{A}' u^2}$ eine ganze Zahl ist; nach dem Vorhergehenden aber, wegen $u' = u$, $\frac{\gamma}{\mathfrak{A}' u^2} = \frac{y}{m}$, folglich können φ, φ' nicht identisch sein, wenn nicht y durch m theilbar.

Umgekehrt, wenn das Letztere der Fall ist, so sind φ, φ' identische Formen.

Denn nach II. ist $u' = \frac{u}{\psi} t^0$; ferner $\frac{y}{m} = \frac{y^0}{t^0 u}$, folglich $t^0 = 1$, da es prim gegen y^0, und u Theiler von y^0, daher auch ψ Theiler von y^0; nun erhellt leicht, dass ψ prim gegen y^0 ist, folglich

Digitized by Google

$\psi=1$, und $u'=u$, $g'=g$. — Man hat ferner $\gamma=\mathfrak{A}' u^2 \frac{y}{m}=g\frac{y}{m}$, also nach 10. 4) $(h'-h)\alpha=g\beta+ig\frac{y}{m}$, folglich $h'-h\equiv 0 \pmod{g}$, da g als Theiler von γ prim gegen α ist.*)

VII. Die Gleichung $xx-\lambda yy=1$ hat unendlich viele positive Wurzeln, welche, nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet, durch x_1, y_1; x_2, y_2: x_3, y_3, u. s. w. bezeichnet werden sollen, so dass x_1, y_1 die kleinsten Werthe, aber nicht 1 und 0 sind. Aus diesen kleinsten Wurzeln findet man bekanntlich alle übrigen nach den Formeln

$$2x_\tau=(x_1+y_1\sqrt{\lambda})^\tau+(x_1-y_1\sqrt{\lambda})^\tau,$$

$$2\sqrt{\lambda}y_\tau=(x_1+y_1\sqrt{\lambda})^\tau-(x_1-y_1\sqrt{\lambda})^\tau;$$

aus denen leicht noch diese folgen:

$$x_{\tau+\tau'}=x_\tau x_{\tau'}+\lambda y_\tau y_{\tau'},$$

$$y_{\tau+\tau'}=x_\tau y_{\tau'}+y_\tau x_{\tau'}.$$

Da nun die Gleichung $XX-\lambda m^2.YY=1$ immer lösbar ist, so folgt, dass X, mY der Gleichung $x^2-\lambda y^2=1$ genügen; also wird in der Progression y_1, y_2, y_3, u. s. w. jedenfalls ein durch m theilbares Glied vorkommen. Ist y_e das erste Glied dieser Art, so erhellt aus der letzten der beiden vorhergehenden Formeln, wenn man darin $\tau=e$, τ' succ.$=e, 2e, 3e,\ldots$ setzt, dass $y_{2e}, y_{3e}, y_{4e},\ldots$ sämmtlich durch m theilbar sind. — Umgekehrt ist y_τ durch m theilbar, so muss $\tau\equiv 0 \pmod{e}$ sein. Denn wäre dieses nicht der Fall, so sei $\tau=xe+\tau'$, wo $0<\tau'<e$; dann kommt $y_\tau=x_{\tau'}y_{xe}+y_{\tau'}x_{xe}$, folglich $y_{\tau'}x_{xe}$ durch m theilbar, aber m als Theiler von y_{xe} prim gegen x_{xe}, mithin $y_{\tau'}\equiv 0 \pmod{m}$, q. e. a.

Wird also die Form φ' und φ mittelst der Wurzeln $\pm x_\tau$, $\pm y_\tau$ hergeleitet, so ist sie mit φ identisch, oder nicht identisch, jenachdem $\tau\equiv 0$ oder nicht $\equiv 0 \pmod{e}$ ist.

VIII. Bezeichnet man den Werth des Bruchs $\frac{mx-hy}{gy}$ in den kleinsten Zahlen durch $\frac{Z}{N}$, so kann $\alpha=Z$, $\gamma=N$, und auch $x=-Z$, $\gamma=-N$ gesetzt werden; man wird aber nur eines dieser beiden Paare in Betracht ziehen, da die entsprechenden Formen φ', φ'' identisch werden (vergl. 11. 70.).

---

*) Wenn α verschwindet, so ist $mx-hy=0$, $x-h\frac{y}{m}=0$, $\frac{y}{m}$ prim gegen x (wegen $xx-\lambda yy=1$), mithin $y=\pm m$, $x=\pm h$, m und h durch u theilbar, also $u=1$, $h=h'=\frac{\mathfrak{B}}{M}$.

Digitized by Google

Was die Wurzeln der Gleichung $xx-\lambda yy=1$ betrifft, so gehören zu jedem positiven Paar x, y drei andere Paare: $-x$, $-y$; x, $-y$; $-x$, y. Es genügt aber, bloss das erste und vierte in Betracht zu ziehen; denn das zweite entsteht aus dem ersten, das dritte aus dem vierten durch gleichzeitige Aenderung der Zeichen von x und y, was in dem Werthe des Bruchs $\frac{mx-hy}{gy}$ keine Aenderung herbeiführt.

Dies vorausgesetzt, bezeichne man die aus φ mit Hülfe der Werthe x_τ, y_τ resultirende Form durch $\varphi_\tau=(g_\tau, h_\tau, i_\tau)$; die durch Anwendung der Werthe $-x_\tau$, y_τ resultirende Form durch

$$_\tau\varphi=({}_\tau g,\ {}_\tau h,\ {}_\tau i).$$

Die entsprechenden Werthe von α, β, γ, δ seien

$$\alpha_\tau,\ \beta_\tau,\ \gamma_\tau,\ \delta_\tau;\ {}_\tau\alpha,\ {}_\tau\beta,\ {}_\tau\gamma,\ {}_\tau\delta.$$

IX. Die Formen φ_τ, $\varphi_{\tau+e}$ werden identisch sein.

Ist nämlich ϑ das grösste gem. Maass von t und y_τ, $t=\vartheta t^0$, $y_\tau=\vartheta y^0{}_\tau$; ψ dass grösste gem. Maass von u und $t^0x_\tau-h'y^0{}_\tau$, so hat man $\frac{m}{u_\tau}=\vartheta\psi$. Ebenso kommt $\frac{m}{u_{\tau+e}}=\vartheta'\psi'$, wo ϑ', ψ' eine ähnliche Bedeutung wie ϑ, ψ haben.

Nun folgt aus den Formeln in VII.

$$x_\tau y_{\tau+\tau'}-y_\tau x_{\tau+\tau'}=(x_\tau{}^2-\lambda y_\tau{}^2)y_{\tau'},$$

oder, $\tau'=e$ gesetzt,

$$x_\tau y_{\tau+e}-y_\tau x_{\tau+e}=y_e;$$

ϑ misst y_e, weil y_e durch m, $m=\vartheta t^0u$ durch ϑ theilbar ist, ϑ prim gegen x_τ (da x_τ, y_τ relat. Primzahlen sind), folglich ϑ ein Theiler von $y_{\tau+e}$, also auch ein Theiler des grössten gem. Maasses von t und $y_{\tau+e}$, d. h. von ϑ'. Ebenso folgt, dass ϑ' ein Theiler von ϑ ist; mithin $\vartheta=\vartheta'$.

Setzt man ferner

$$K=t''x_\tau-h''y''_\tau,\quad K'=t''x_{\tau+e}-h''y''_{\tau+e},$$

so kommt

$$Ky''_{\tau+e}-K'y''_\tau=t''(x_\tau y^0{}_{\tau+e}-y^0{}_\tau x_{\tau+e})=\frac{t^0y_e}{\tau}=ut^{02}\frac{y_e}{m};$$

aus dieser Gleichung folgt, dass ψ in $K'y_\tau{}^0$, mithin in K' aufgeht (da ψ offenbar prim gegen $y_\tau{}^0$ ist); daher geht ψ in ψ' auf, und da ebenso bewiesen wird, dass ψ' in ψ aufgeht, so folgt $\psi=\psi'$.

Digitized by Google

Hiermit ist erwiesen, dass $u_\tau = u_{\tau+e}$, also auch $g_\tau = g_{\tau+e}$ ist.

Um zu zeigen, dass $h_\tau \equiv h_{\tau+e} \pmod{g_\tau}$, benutze man die Gleichungen

$$\psi\alpha_\tau = t^0 x_\tau - h^0 y_\tau{}^0, \qquad \psi\gamma_\tau = \mathfrak{A}' u y_\tau{}^0,$$

$$\psi\alpha_{\tau+e} = t^0 x_{\tau+e} - h^0 y^0{}_{\tau+e}, \quad \psi\gamma_{\tau+e} = \mathfrak{A}' u y^0{}_{\tau+e};$$

aus denen sich ergiebt:

$$\alpha_\tau\gamma_{\tau+e} - \gamma_\tau\alpha_{\tau+e} = \frac{\mathfrak{A}' u t^0 y_e}{\vartheta\psi^2} = \frac{ut^0}{\psi}\cdot\frac{\mathfrak{A}' m}{\vartheta\psi}\cdot\frac{y_e}{m} = g_\tau\cdot\frac{y_e}{m}.$$

Nun hat man

$$(h_\tau - h)\alpha_\tau = g_\tau\beta_\tau + i\gamma_\tau,$$

$$(h_{\tau+e} - h)\alpha_{\tau+e} = g_\tau\beta_{\tau+e} + i\gamma_{\tau+e};$$

woraus folgt

$$(h_\tau - h_{\tau+e})\alpha_\tau\alpha_{\tau+e} = g_\tau(\alpha_{\tau+e}\beta_\tau - \beta_{\tau+e}\alpha_\tau) - ig_\tau\cdot\frac{y_e}{m},$$

folglich

$$(h_\tau - h_{\tau+e})\alpha_\tau\alpha_{\tau+e} \equiv 0 \pmod{g_\tau}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen

$$(h_\tau + h)\gamma_\tau = g_\tau\delta_\tau - g\alpha_\tau,$$

$$(h_{\tau+e} + h)\gamma_{\tau+e} = g_\tau\delta_{\tau+e} - g\alpha_{\tau+e}$$

gelangt man auf ähnliche Art zu der Congruenz

$$(h_\tau - h_{\tau+e})\gamma_\tau\gamma_{\tau+e} \equiv 0 \pmod{g_\tau}.$$

Bezeichnet man also das grösste gem. Maass von $\alpha_\tau\ \alpha_{\tau+e}$, $\gamma_\tau\ \gamma_{\tau+e}$ durch $\mathfrak{r}$, so ist auch

$$(h_\tau - h_{\tau+e})\mathfrak{r} \equiv 0 \pmod{g_\tau},$$

und wenn erwiesen werden kann, dass $\mathfrak{r}$ gegen g_τ prim ist, so wird folgen $h_\tau - h_{\tau+e} \equiv 0 \pmod{g_\tau}$, und φ_τ, $\varphi_{\tau+e}$ werden identisch sein.

In der That, bezeichnet man das grösste gem. Maass von α_τ, $\gamma_{\tau+e}$ mit $\mathfrak{r}'$, das von $\alpha_{\tau+e}$, γ_τ mit $\mathfrak{r}''$, so ist ersichtlich, dass $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'\mathfrak{r}''$ ist.

Digitized by Google

$\mathfrak{r}'$ ist zunächst prim gegen $\mathfrak{A}'$, denn $\mathfrak{A}'$ misst γ_τ, welches prim gegen α_τ. — Man nehme ferner an, dass $\mathfrak{r}'$ und u_τ einen Primfactor p gemein haben, und ziehe folgende Gleichungen in Betracht:

$$[1]\; g_\tau = g\alpha_\tau^2 + 2h\alpha_\tau\gamma_\tau + i\gamma_\tau^2,$$

$$[2]\; u_\tau\psi = ut^0,$$

$$[3]\; h_\tau = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho'\mathfrak{A}' u_\tau,$$

$$[4]\; h_\tau + h = g\alpha_\tau\beta_\tau + 2h\alpha_\tau\delta_\tau + i\gamma_\tau\delta_\tau,$$

$$[5]\; t^0 x_{\tau+e} - h^0 y^0{}_{\tau+e} = \psi\alpha_{\tau+e}.$$

Nach [1] geht p in i auf, folglich, da i gegen u prim, nach [2] in t^0, folglich nach [3] in h_τ, nach [4] also in h, folglich in h^0, da $h = uh^0$, und p als in i aufgehend in u nicht aufgehen kann; nach [5] daher wird p in $\psi\alpha_{\tau+e}$ aufgehen. Dies ist unmöglich, denn p kann in $\alpha_{\tau+e}$ nicht aufgehen, weil es $\gamma_{\tau+e}$ misst, und in ψ deshalb nicht, weil ψ in u aufgeht, u aber, wie schon vorher erwiesen worden, durch p nicht theilbar ist. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{r}'$ prim gegen $\mathfrak{A}' u_\tau^2 = g_\tau$ ist. — Auf ähnliche Art zeigt man, dass $\mathfrak{r}''$ prim gegen $g_{\tau+e} = g_\tau$ ist, folglich $\mathfrak{r}'\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}$ prim gegen g_τ, q. e. d.

X. Die vorhergehende Schlüsse erleiden keine Aenderung, wenn man x_τ, $x_{\tau+e}$ mit den entgegengesetzten Zeichen nimmt, während die Zeichen von y_τ, $y_{\tau+e}$ beibehalten werden, und es folgt daher, dass ${}_\tau\varphi$, ${}_{\tau+e}\varphi$ ebenfalls identische Formen sind.

XI. Nach dem Vorhergehenden ist jede aus φ abgeleitete Form mit einer der folgenden

$$_{e-1}\varphi;\; _{e-2}\varphi;\; _{e-3}\varphi;\; \cdots\cdots {}_1\varphi;\; \varphi;\; \varphi_1 \cdots \varphi_{e-3};\; \varphi_{e-2};\; \varphi_{e-1}$$

nothwendig identisch.

Keine der Formen

$$_{e-1}\varphi;\; _{e-2}\varphi;\; \cdots {}_2\varphi;\; {}_1\varphi;\; \varphi_1;\; \varphi_2;\; \cdots \varphi_{e-2};\; \varphi_{e-1}$$

ist mit φ identisch; es fragt sich aber, ob einige unter sich identisch sein können.

Ich behaupte zunächst, dass ${}_{e-\tau}\varphi;\; \varphi_\tau$, wo τ zwischen 1 und $e-1$ incl. liegt, identische Formen seien.

Nach VII. hat man $x_\tau y_{\tau'} + y_\tau x_{\tau'} = y_e$, wenn $\tau + \tau' = e$ ist.

Da diese Gleichung der in IX., von welcher die dortigen Schlüsse hauptsächlich abhingen, ganz ähnlich ist, so bleiben die Betrachtungen auch fast wörtlich dieselben, und die obige Behauptung ist erwiesen.

XII. Endlich soll gezeigt werden, dass die Formen φ_1; φ_2; φ_3; .... φ_{e-1} sämmtlich unter einander verschieden sind.

Es seien μ, μ' zwei unterschiedene Zahlen zwischen 1 und $e-1$ incl.; und es werde angenommen, dass φ_μ, $\varphi_{\mu'}$ identische Formen seien, welche aus φ resp. durch die Substitutionen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'$$

entstehen. Die entsprechenden Werthe von x, y werden durch x_μ, y_μ; $x_{\mu'}$, $y_{\mu'}$ bezeichnet.

Dies vorausgesetzt, geht φ durch die erwähnten Substitutionen (welche beide eigentlich sind) in dieselbe Form über, und man hat nach den Formeln Disq. Arithm. p. 181.:

$$\alpha' = \alpha X - (h\alpha + i\gamma)\, Y,$$

$$\beta' = \beta X - (h\beta + i\delta)\, Y,$$

$$\gamma' = \gamma X + (g\alpha + h\gamma)\, Y,$$

$$\delta' = \delta X + (g\beta + h\delta)\, Y;$$

indem X, Y Werthe bedeuten, welche der Gleichung $X^2 - \lambda m^2 Y^2 = 1$ Genüge leisten.

Substituirt man nun in der dritten Gleichung für $g\alpha + h\gamma$ seinen Werth $\frac{m\gamma x_\mu}{y_\mu}$, und beachtet $\gamma y_{\mu'} = \gamma' y_\mu$, welche Gleichung aus $g_\mu = g_{\mu'}$ folgt, so erhält man

$$y_{\mu'} = X y_\mu + m\, Y x_\mu \ldots\ldots [1].$$

Berechnet man ferner nach der ersten und dritten Gleichung die Grösse $g\alpha' + h\gamma'$, und berücksichtigt den Werth von $g\alpha + h\gamma$ und die Gleichung $h^2 - gi = \lambda m^2$, so kommt

$$g\alpha' + h\gamma' = \frac{m\gamma' x_{\mu'}}{y_{\mu'}} = \frac{m\gamma x_\mu}{y_\mu} X + \lambda m^2 \gamma Y,$$

folglich

$$x_{\mu'} = X x_\mu + \lambda m\, Y . y_\mu \ldots\ldots [2].$$

Verbindet man endlich [1] und [2] mit den Gleichungen

$$y_{\mu'} = x_{\mu'-\mu} y_\mu + y_{\mu'-\mu} x_\mu,\quad x_{\mu'} = x_{\mu'-\mu} x_\mu + \lambda y_{\mu'-\mu} y_\mu;$$

so folgt

$$X = x_{\mu'-\mu},\quad m\, Y = y_{\mu'-\mu};$$

folglich $y_{\mu'-\mu}$ durch m theilbar, was unmöglich, da y_e das erste durch m theilbare Glied der Progression y_1, y_2, y_3 u. s. w. sein soll.

Digitized by Google

XIII. Aus Allem, was vorhergeht, folgt, dass jede beliebige Form φ mit $e-1$ und nicht mehr Formen, welche sowohl von φ selbst, als unter einander verschieden sind, eigentlich aequivalent ist.

14. Die Betrachtung der beiden anderen Hauptfälle ist der des ersten so ähnlich, dass es genügen wird, nur auf diejenigen Punkte aufmerksam zu machen, wo Differenzen hervortreten.

Zweiter Hauptfall. Hier ist

$$g=2\mathfrak{A}'u^2,\quad h=\frac{2\mathfrak{B}}{M}+2\varrho\mathfrak{A}'u,\quad \lambda=\frac{4D}{M^2},\quad h^2-gi=\lambda m^2,$$

$$\lambda\equiv 1 \pmod 4,$$

m ungerade, $xx-\lambda yy=4$. Der Bruch $\frac{\alpha}{\gamma}$ erhält den Werth

$$\frac{\frac{1}{2}(t^0x-h^0y^0)}{\mathfrak{A}'uy^0},$$

und man findet

$$\frac{1}{2}(t^0x-h^0y^0)\equiv\frac{1}{2}(x-\mathfrak{B}'y)t_0 \pmod{\mathfrak{A}'y^0},$$

$$\frac{1}{2}(x-\mathfrak{B}'y).\frac{1}{2}(x+\mathfrak{B}'y)+\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\vartheta^2y^{0\,2}=1;$$

$\mathfrak{A}'y^0$ prim gegen $\frac{1}{2}(t^0x-h^0y^0)$, $\frac{u}{\psi}=\frac{\gamma}{\mathfrak{A}'y^0}$ eine ganze Zahl, indem ψ das grösste gemeinsch. Maass von u und $\frac{1}{2}(t^0x-h^0y^0)$ bedeutet; $u'=\frac{u}{\psi}t^0$.

Die Differenz $h'-h$ ist hier durch $2\mathfrak{A}'$ theilbar*), und u' als ungerade Zahl gegen $2\mathfrak{A}'$ prim, weshalb $h'=\frac{2\mathfrak{B}}{M}+2\varrho'\mathfrak{A}'u'$ wird.

Die Gleichung $xx-\lambda yy=4$ erfordert offenbar, dass x, y beide gerade, oder beide ungerade sind; ist sie in relativen Primzahlen nicht lösbar, so kann sie wenigstens mit Hülfe solcher Werthe, welche den Factor 2 haben, gelöst werden, da die Gleichung $xx-\lambda yy=1$ immer möglich.

Bezeichnet man die kleinsten positiven Wurzeln ($x=\pm 2$, $y=0$ ausgeschlossen) mit x_1, y_1, so sind alle übrigen positiven Wurzeln in folgenden Formeln enthalten:

---

*) Man hat hiebei zu beachten, dass g und f gerade Zahlen sind.

$$x_r = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1\sqrt{\lambda})^r + (\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\sqrt{\lambda})^r,$$

$$\sqrt{\lambda}y_r = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1\sqrt{\lambda})^r - (\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\sqrt{\lambda})^r;$$

worüber art. 200. Disq. arithm. zu vergleichen. Hieraus folgt

$$2x_{r+r'} = x_r x_{r'} + \lambda y_r y_{r'},$$

$$2y_{r+r'} = x_r y_{r'} + y_r x_{r'}.$$

Die in 13. VII. folgenden Schlüsse behalten Kraft, da m ungerade ist. Statt der Gleichung

$$x_r y_{r+e} - y_r x_{r+e} = y_e$$

in IX. kommt

$$x_r y_{r+e} - y_r x_{r+e} = 2y_e,$$

überhaupt aber bleiben die in IX. gemachten Schlüsse mit Ausnahme von geringen Modificationen dieselben.

Statt der Gleichungen in XII. hat man die folgenden:

$$2\alpha' = \alpha X - (h\alpha + i\gamma)Y,$$

$$2\beta' = \beta X - (h\beta + i\delta)Y,$$

$$2\gamma' = \gamma X + (g\alpha + h\gamma)Y,$$

$$2\delta' = \delta X + (g\beta + h\delta)Y;$$

wo X, Y Werthe bedeuten, welche der Gleichung

$$XX - \lambda m^2 . YY = 4$$

genügen.

15. Dritter Hauptfall. Die Gleichung, aus welcher α, γ zu bestimmen, ist hier

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{mx - 2hy}{2gy},$$

ferner

$$\lambda = \frac{4D}{M^2} \equiv 1 \pmod 4, \quad h^2 - gi = \frac{1}{4}\lambda m^2, \quad x^2 - \lambda y^2 = 4, \quad 2h = uh^0,$$

$\mathfrak{A}'y^0$ prim gegen $\frac{1}{2}(t^0x - h^0y^0)$, wie im vorigen Falle, ψ das grösste gemeinschaftliche Maass von u und $\frac{1}{2}(t^0x - h^0y^0)$, $u' = \frac{u}{\psi}t^0$.

Digitized by Google

Dass ψ und y^0 keinen ungeraden Factor gemein haben, erhellt sogleich. Hätten sie den Factor 2 gemein, so wäre

$$K = t^0 . \frac{1}{2} x - h^0 . \frac{1}{2} y^0$$

gerade; t^0 wird ungerade sein, da es prim gegen y^0, $\frac{1}{2} x$ wird ebenfalls ungerade sein, wegen der Gleichung

$$\left(\frac{1}{2} x\right)^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} y\right)^2 = 1 \text{ und } \lambda \equiv 1 \pmod 4,$$

folglich $t^0 . \frac{1}{2} x$ ungerade. Ist nun $\frac{1}{2} y^0$ gerade, so ist K ungerade. Ist $\frac{1}{2} y^0$ aber ungerade, so muss, weil $\frac{1}{2} y = \frac{1}{2} \vartheta y^0$ gerade ist, ϑ gerade sein, $t = \vartheta t^0$ ebenfalls, und auch $h' = \mathfrak{B}' t + 2\varrho \mathfrak{A}'$, folglich K wiederum ungerade. Es ist also ψ gegen y^0 prim.

Was über die Wurzeln der Gleichung $xx - \lambda yy = 4$ in 14. gesagt worden, gilt hier ebenfalls. — Statt der am Ende in 14. betrachteten Gleichungen hat man die in 13. XII., wo dann

$$XX - \frac{1}{4} \lambda m^2 Y^2 = 1$$

ist.

16. Die vorhergehenden Betrachtungen führen uns also zu dem schönen Satze:

Sind bei positiver, nicht quadratischer, Determinante (D) x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; etc. die nach ihrer Grösse aufsteigend geordneten positiven Werthe der Gleichung

$$xx - \frac{D}{MM} yy = 1,$$

oder der Gleichung

$$xx - \frac{4D}{MM} yy = 4,$$

$\frac{4D}{MM} \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$, so dass x_1, y_1 die *kleinsten* Werthe mit Ausnahme von $x = 1$, $y = 0$; $x = 2$, $y = 0$ im einen oder andern Falle bedeuten; ist ferner y_e das *erste* durch m theilbare Glied in der Progression y_1, y_2, y_3, etc.; so beträgt die Anzahl der Klassen, welche mit f zusammengesetzt F geben, den $e$ten Theil von der in 9. bestimmten Anzahl aller im Complex ω enthaltenen Formen.

Digitized by Google

17. Die positiven Wurzeln der Gleichung

$$xx - \frac{D}{MM} yy = 1$$

findet man succ. nach den Formeln

$$x_2 = 2x_1 . x_1 - 1, \quad x_3 = 2x_1 . x_2 - x_1, \quad x_4 = 2x_1 . x_3 - x_2, \text{ etc.:}$$

$$y_2 = 2x_1 . y_1, \quad y_3 = 2x_1 . y_2 - y_1, \quad y_4 = 2x_1 . y_3 - y_2, \text{ etc.;}$$

die positiven Wurzeln der Gleichung

$$xx - \frac{4D}{MM} yy = 4$$

nach den folgenden:

$$x_2 = x_1 . x_1 - 2, \quad x_3 = x_1 . x_2 - x_1, \quad x_4 = x_1 . x_3 - x_2, \text{ etc.;}$$

$$y_2 = x_1 . y_1, \quad y_3 = x_1 . y_2 - y_1, \quad y_4 = x_1 . y_3 - y_2, \text{ etc.}$$

Zu bemerken ist, dass man indessen nur die zweite Progression in Bezug auf den vorliegenden Zweck zu berechnen braucht, dass es sogar nicht auf die absoluten Werthe der Glieder $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ankommt, sondern nur auf die Reste derselben nach dem mod. m, weshalb sich mancherlei Abkürzungen anbringen lassen.

Die Gleichung

$$xx - \frac{4D}{MM} yy = 4$$

lässt sich in allen Fällen nach der von Gauss entdeckten Methode (art. 198.), und, wenn $\sqrt{\frac{4D}{MM}} > 4$, auch mit Hülfe der Kettenbrüche lösen. In unserm Falle ist immer

$$\lambda = \frac{4D}{MM} \equiv 1 \pmod 4.$$

Ist $\lambda \equiv 1 \pmod 8$, so ist die Gleichung $xx - \lambda yy = 4$ in relativen Primzahlen nicht lösbar; denn da x, y beide ungerade sein müssten, so wäre das erste Glied durch 8 theilbar. Ist $\lambda \equiv 5 \pmod 8$, so sind die kleinsten Wurzeln bald ungerade, bald gerade.

Wenn x_1, y_1 gerade sind, so folgt aus dem Bildungsgesetz der Progressionen $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots y_1, y_2, y_3, \ldots$, dass alle Wurzeln gerade sind. Sind x_1, y_1 ungerade, so folgt ebenso, dass x_τ, y_τ gerade, wenn $\tau \equiv 0 \pmod 3$, in allen übrigen Fällen ungerade sind.

18. Die vorhergehenden Untersuchungen stehen mit dem Verhältniss, welches die Mengen der Klassen in zwei verschiedenen Ordnungen zu einander haben, in einem merkwürdigen Zusammenhange.

Es seien O, O', O'' drei beliebige Ordnungen für dieselbe Determinante D, welche resp. die Formen

$$F=(A,B,C);\ f=(a,b,c);\ f'=(a',b',c')$$

enthalten; M sei das grösste gemeinschaftliche Maass von $A, 2B, C$, und m, m' haben eine ähnliche Bedeutung in Bezug auf die Formen f, f'; auch sei $M=mm'$, und m prim gegen m'. Die Mengen der Klassen in den Ordnungen O, O'' werden respect. durch L, L'' bezeichnet. Endlich sei K' eine beliebige Klasse der Ordnung O'.

Dies vorausgesetzt, giebt es nach dem Vorhergehenden stets Klassen aus der Ordnung O'', welche mit K' zusammengesetzt eine beliebige Klasse K der Ordnung O hervorbringen; diese Klassen seien K'', K''_1, K''_2, ... K''_{r-1}, ihre Anzahl also r; den Complex derselben bezeichne man durch W.

Es sei nun K_1 eine von K verschiedene Klasse der Ordnung O, $K_1=\varphi+K$, wo φ eine eigentlich primitive Klasse bedeutet*), und W' der Complex der Klassen

$$\varphi+K'',\ \varphi+K''_1,\ \varphi+K''_2,\ .... \varphi+K''_{r-1};$$

welche offenbar sämmtlich in die Ordnung O'' gehören, und unter einander verschieden sind. Jegliche Klasse aus W' wird mit K' zusammengesetzt K_1 geben, woraus folgt, dass W, W' keine Klasse gemein haben (indem jede Klasse aus W mit K' zusammengesetzt die von K_1 verschiedene Klasse K erzeugt). — Ueberdiess muss jede Klasse, welche mit K' zusammengesetzt K_1 hervorbringt, in W' enthalten sein. Denn es sei $K_1=K'+L$, L aus der Ordnung O'', $L=\varphi+L'$, also L' ebenfalls aus der Ordnung O'', dann ist

$$K_1=\varphi+K'+L'=\varphi+K,$$

folglich $K'+L'$ mit K identisch; da also K aus der Zusammensetzung von K' mit der Klasse L' entsteht, so muss L' mit einer der Klassen K'', K''_1, ... K''_{r-1}, folglich L mit einer Klasse aus W' identisch sein.

Ist ferner K_2 eine von K, K_1 verschiedene Klasse aus O, so erhält man ebenso r neue Klassen der Ordnung O'', welche mit

---

*) Ueber die Anwendung des Additionszeichens, um die Zusammensetzung der Formen oder Klassen zu bezeichnen, s. m. Disq. Arithm. art. 249.

K' zusammengesetzt K_2 geben, und sowohl unter sich, als von den Klassen in W, W' verschieden sind.

Schliesst man so fort, bis alle Klassen in O erschöpft sind, so hat man rL Klassen aus O'' erhalten, und ausser diesen kann keine mehr übrig sein, da jede Klasse aus O'' mit K' zusammengesetzt eine Klasse aus O hervorbringt. Daher folgt $L''=rL$.

Setzt man $M=m$, so erhält man den besondern in den Disq. arithm. Art. 253. betrachteten Fall; nämlich, wenn r die Menge der eigentlich primitiven Klassen bedeutet, welche mit einer beliebigen Klasse der Ordnung O zusammengesetzt eine beliebige Klasse derselben Ordnung hervorbringen, so beträgt die Menge aller Klassen der Ordnung O den $r$ten Theil von der Menge aller Klassen der eigentlich primitiven Ordnung. Die Zahl r kann man für jede Determinante nach dem Vorhergehenden bestimmen, folglich lässt sich die Menge der Klassen in jeder Ordnung finden, wenn man die Menge der eigentlich primitiven Klassen kennt.

Versucht man z. B. die Menge der Klassen in der uneigentlich primit. Ordnung zu bestimmen, so findet man nach 9. zunächst ($m=2$, $\mathfrak{M}=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ zu setzen) $\mu=1$ oder 3, jenachdem $D\equiv 1$ oder 5 (mod. 8) ist; daher $r=1$ im ersten Falle. Im anderen Falle ist bei negativer Determinante $r=3$, ausgenommen $D=-3$, wo $r=\frac{1}{3}\mu=1$ ist. Wenn endlich $D\equiv 5$ (mod. 8.) und positiv, so hat man $e=1, 3$, also $r=3, 1$ resp., jenachdem die kleinsten Wurzeln der Gleichung $xx-Dyy=4$ gerade, oder ungerade sind. Hieraus folgt:

Bezeichnet man die Menge der Klassen in der eigentlich primitiven Ordnung durch L, die in der uneigentlich primitiven Ordnung durch L', so ist $L'=L$, wenn $D\equiv 1$ (mod. 8.); oder wenn $D=-3$; oder wenn D positiv, $\equiv 5$ (mod. 8.) und die kleinsten Wurzeln der Gleichung $xx-Dyy=4$ ungerade sind. Dagegen ist $L'=\frac{1}{3}L$ in allen übrigen Fällen.*)

19. Die Theorie der Zerlegung der quadratischen Formen, welche wir hier mitgetheilt haben, ist völlig allgemein. In den Disq. Arithm. wird nur der specielle Fall zur Sprache gebracht, wo die gegebenen Formen aus derselben Ordnung sind, und dieser wiederum auf einen noch einfachern Fall zurückgeführt (cf. art. 251). Hierauf wendet sich Gauss zur Auflösung der Aufgabe: „Die sämmtlichen eigentlich primitiven Klassen zu bestimmen, welche mit der einfachsten Form einer Ordnung zusammengesetzt, diese Form selbst geben, und findet zunächst eine endliche Menge von Formen, welche in Bezug auf diesen besondern Fall mit unseren Formen im Complex ω übereinkommen. Was endlich die Classification dieser Formen betrifft, so wird art. 256. V. gezeigt, dass sie in verschiedene Klassen gehören bei negativer und quadratischer Determinante, ausgenommen

*) Die uneigentlich primitive Ordnung existirt nur, wenn $D\equiv 1$ (mod. 4.) ist.

Digitized by Google

$$D=-m^2,\quad D=-\frac{3}{4}m^2,$$

und ohne Beweis angemerkt, dass im ersten dieser Ausnahmefälle immer je zwei, im andern immer je drei Formen eine Klasse bilden. Die positive Determinante betreffend sagt Gauss*): „Pro casu tertio autem, ubi D est numerus positivus, non quadratus, regulam generalem pro comparanda multitudine formarum pr. primit. in V, V', V'',..... cum multitudine classium diversarum inde resultantium hucusque non habemus. Id quidem asserere possumus, hanc vel illi aequalem, vel ipsius partem aliquotam esse; quin etiam nexum singularem inter quotientem horum numerorum et valores minimos ipsorum t,u aequationi $tt-Duu=AA$ satisfacientes deteximus, quem hic explicare nimis prolixum foret; an vero possibile sit, illum quotientem in omnibus casibus ex sola inspectione numerorum D, A cognoscere, de hac re nihil certi pronunciare possumus."

Der unbekannte Quotient, von welchem hier die Rede, ist die im Vorhergehenden mit e bezeichnete Zahl, deren Bestimmung lediglich darauf zurückkommt, das erste durch m theilbare Glied der Progression y_1, y_2, y_3,... zu ermitteln. Es scheint, als wenn Gauss mit dem Ausdruck „nexus singularis" diese Beziehung der Zahl e zu den Wurzeln der Gleichung $xx-\lambda yy=1$, oder $xx-\lambda yy=4$ nicht gemeint haben kann; denn sonst würde er nicht gesagt haben: „regulam generalem non habemus."

20. Da man bei den vorhergehenden Untersuchungen die kleinsten Wurzeln der Gleichung $xx-Dyy=4$ kennen muss, und dieselbe in der Zahlentheorie überhaupt von mannichfachem Nutzen sein kann, so mag darüber noch einiges beigebracht werden, wobei wir auch die Gleichung $xx-Dyy=-4$ berücksichtigen.**)

Die Gleichung $xx-Dyy=\pm 4$ gestattet zunächst eine Reduction auf die einfachere Gleichung $xx-D'yy=\pm 1$, für welche bereits Tafeln vorhanden sind, in folgenden Fällen.

Wenn $D\equiv 0 \pmod 4$, und t, u alle Werthe der Gleichung

$$tt-\frac{1}{4}D.uu=\pm 1$$

bedeuten, so sind $x=2t$, $y=u$ alle Werthe der Gleichung

$$xx-Dyy=\pm 4.$$

In den Fällen $D\equiv 2$ oder $3 \pmod 4$, $D\equiv 1 \pmod 8$ können x und y nur beide gerade sein, und $x=2t$, $y=2u$ sind alle Werthe der Gleichung

---

*) pag. 398.

**) D ist positiv und nicht quadratisch.

$$xx - Dyy = \pm 4,$$

wenn t, u alle Werthe der Gleichung

$$tt - Duu = \pm 1$$

bedeuten.

Es bleibt also nur der Fall $D \equiv 5 \pmod 8$ übrig. Alle Determinanten D von der Form $8n+5$ zerfallen in zwei Klassen. In die eine gehören diejenigen, für welche die kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$xx - Dyy = \pm 4$$

doppelt so gross als die kleinsten Werthe der Gleichung

$$tt - Duu = \pm 1$$

sind (wenn die letztere Gleichung für das untere Zeichen überhaupt lösbar ist); in der andern Klasse sind diejenigen Determinanten, für welche die Gleichung

$$xx - Dyy = \pm 4$$

in relativen Primzahlen lösbar ist. Zwischen 5 und 1005 giebt es 126 Werthe $D = 8n+5$, von denen die folgenden 32 von der ersten Art sind: 37, 101, 141, 189, 197, 269, 325, 333, 349, 373, 381, 389, 397, 405, 485, 557, 573, 677, 701, 709, 757, 781, 813, 829, 877, 885, 901, 909, 925, 933, 973, 997.

Um zu entscheiden, ob die Gleichung

$$xx - Dyy = \pm 4$$

in relativen Primzahlen lösbar ist, oder nicht, verwandelt man $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch. Findet sich kein vollständiger Quotient mit dem Nenner 4, so ist die Gleichung nach einem bekannten Theorem, vorausgesetzt, dass $D > 16$, in relativen Primzahlen nicht lösbar. Findet sich der Nenner 4, so merke man Folgendes:

1) Wenn die ungeraden Werthe x, y die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

befriedigen, so ist

$$(xx+2)^2 - D(xy)^2 = = +4,$$

wo $xx+2$, xy ebenfalls ungerade sind, d. h. wenn die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

in relativen Primzahlen lösbar, so ist auch

Digitized by Google

$$XX - DYY = +4$$

in relativen Primzahlen lösbar.

2) Sind x, y die kleinsten positiven Werthe der ersten Gleichung, so wird behauptet, dass $X = xx + 2$, $Y = xy$ die kleinsten positiven Werthe der anderen Gleichung sein werden.

Wäre dies nicht der Fall, so bezeichne man die kleinsten (positiven) Werthe der Gleichung

$$tt - Duu = +4$$

durch t, u, so dass also $t < X$, $u < Y$ ist. Die Multiplication der Gleichungen

$$xx - Dyy = -4,$$
$$tt - Duu = +4$$

giebt

$$\left(\frac{tx - Duy}{2}\right)^2 - D\left(\frac{ty - ux}{2}\right)^2 = -4,$$

wo $\frac{tx - Duy}{2}$, $\frac{ty - ux}{2}$ ganze Zahlen sein werden, da x und y, ebenso t und u, beide gerade, oder beide ungerade sind. Die Zahl $\frac{1}{2}(ty - ux)$ ist positiv, da $\frac{t}{u}$ offenbar $> \frac{x}{y}$. Die andere Zahl $\frac{1}{2}(tx - Duy)$ anlangend, nehme man zuvörderst an, dass $y > u$ sei. Demnach folgt durch Multiplication der Gleichungen

$$xx = Dyy - 4, \quad tt = Duu + 4, \quad (tx)^2 - (Duy)^2 = 4(Dyy - Duu - 4),$$

welcher Werth positiv sein muss, indem $yy - uu > \frac{4}{D}$ ist, folglich $tx - Duy > 0$. Setzen wir also

$$\frac{1}{2}(tx - Duy) = T, \quad \frac{1}{2}(ty - ux) = U;$$

so sind T, U positive Zahlen, welche der Gleichung

$$TT - DUU = -4$$

genügen, mithin nicht kleiner sein können als x, y resp. Nun erhält man mit Hülfe der vorhergehenden Relationen aus der Gleichung

$$tt - Duu = +4, \quad 2x = Tt + DUu, \quad 2y = Tu + Ut,$$

folglich

$$2y \gtreqless xu + yt, \quad (2-t)y \gtreqless xu,$$

und dies ist unmöglich, da die Werthe $t=2$, $u=0$ ausgeschlossen sind, und t nicht kleiner als 2 sein kann.

Hieraus folgt $u \gtreqless y$, $t > x$. Nachdem dies bewiesen worden, hat man

$$(Duy)^2 - (tx)^2 = 4(Duu - Dyy + 4),$$

folglich

$$Duy - tx > 0, \quad T = \frac{1}{2}(Duy - tx), \quad U = \frac{1}{2}(ty - ux)$$

positive ganze Zahlen, welche die Gleichung

$$TT - DUU = -4$$

befriedigen, also nicht kleiner sein können als x, y resp. Es folgt ferner

$$2t = Tx + DUy,$$

$$2u = Ty + Ux;$$

mithin

$$2t \gtreqless xx + Dyy, \quad 2u \gtreqless xy + yx,$$

d. h. $t \gtreqless xx + 2$, $u \gtreqless xy$, was der obigen Annahme widerspricht. Wir schliessen also, dass $X = xx + 2$, $Y = xy$ die kleinsten Werthe der Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

sind.

3) Vorausgesetzt, dass in der Entwickelung von $\sqrt{D}$ ein vollständiger Quotient mit dem Nenner 4 vorkommt, setze man dieselbe soweit fort, bis dieser Nenner zum erstenmal erscheint, und berechne den vorletzten Näherungsbruch $\frac{p}{q}$. Es lässt sich sogleich erkennen, ob $pp - Dqq = +4$, oder $pp - Dqq = -4$ ist. Trifft der erste Fall ein, so sind $x = p$, $y = q$ die kleinsten positiven Werthe der Gleichung

$$xx - Dyy = +4,$$

Digitized by Google

und man kann sicher schliessen, dass die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

in ungeraden Zahlen nicht lösbar ist; denn wäre dies der Fall, so müssten ihre kleinsten Wurzeln p', q' offenbar $>$ als resp. p, q sein, was wegen $p = p'p' + 2$, $q = p'q'$ (vergl. 2)) unmöglich ist. — Findet sich aber $pp - Dqq = -4$, so sind $x = p$, $y = q$ die kleinsten (positiven) Werthe der Gleichung

$$xx - Dyy = -4;$$

die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

ist dann ebenfalls in relativen Primzahlen lösbar, und $x = pp + 2$, $y = pq$ ihre kleinsten Wurzeln.

Nach diesen Principien ist die dieser Abhandlung beigefügte Tafel berechnet. Man findet in der ersten Columne alle Zahlen D von der Form $8n + 5$ zwischen 5 und 1005 mit Ausnahme der 32 vorhin aufgestellten Werthe, für welche keine Auflösung in ungeraden Zahlen möglich ist. In der zweiten Columne stehen die kleinsten positiven Wurzeln, welche sich auf die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

beziehen, sobald D mit dem Zeichen * versehen ist, in den übrigen Fällen der Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

genügen.

4) Mehrerer Vollständigkeit wegen bemerke ich noch Folgendes. Wenn die Determinante das Zeichen * nicht führt, die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

also in relativen Primzahlen nicht lösbar ist, so lässt die Gleichung

$$tt - Duu = -1$$

keine Auflösung zu, ist also $xx - Dyy = -4$ überhaupt nicht lösbar. Denn die Multiplication der Gleichungen

$$xx - Dyy = +4, \quad tt - Duu = -1$$

gäbe

$$(tx + Duy)^2 - D(ty + ux)^2 = -4,$$

wo $tx + Duy$, $ty + ux$ offenbar ungerade Zahlen wären, welche der Gleichung

Digitized by Google

$$xx - Dyy = -4$$

nach der Voraussetzung nicht genügen können. — Wenn die Determinante das Zeichen * führt, die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

also in relativen Primzahlen lösbar ist, so lässt die Gleichung

$$tt - Duu = -1$$

Auflösungen zu, ist die vorhergehende Gleichung also auch in geraden Zahlen lösbar.

Um das letztere zu erweisen, bemerke ich zuvörderst, dass in der Entwickelung von $\sqrt{D}$ der Nenner 4 höchstens in zwei vollständigen Quotienten vorkommen kann. In der That, es sei $\frac{\sqrt{D}+J}{4}$ ein vollständiger Quotient, welchem $\frac{\sqrt{D}+J^{\circ}}{N^{\circ}}$ vorhergeht; dann ist bekanntlich

$$4N^{\circ} = D - JJ, \quad \sqrt{D} - 4 < J < \sqrt{D},$$

daher, wenn wir die grösste in $\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl durch a bezeichnen, J gleich einer der Zahlen $a-3$, $a-2$, $a-1$, a; von diesen vier Werthen werden aber nur zwei so beschaffen sein, dass $D-JJ$ durch 4 theilbar ist, wie es nach der ersten Gleichung sein soll, nämlich die Werthe $J=a$, $a-2$, oder die Werthe $J=a-1$, $a-3$, jenachdem a ungerade, oder gerade ist, folglich können in einer Periode (welche nicht zwei identische vollständige Quotienten enthalten kann) nicht mehr als zwei vollständige Quotienten mit dem Nenner 4 vorkommen.

Wäre nun die Gleichung

$$tt - Duu = -1$$

nicht lösbar, so müsste die Periode des Kettenbruchs von $\sqrt{D}$ bekanntlich geradgliedrig sein, und wenn wir die auf einander folgenden vollständigen Quotienten mit dem Nenner 4 in der unendlichen Entwickelung von $\sqrt{D}$ durch

$$\frac{\sqrt{D}+J}{4}, \frac{\sqrt{D}+J'}{4}; \frac{\sqrt{D}+J''}{4}, \frac{\sqrt{D}+J'''}{4}, \text{ etc.}$$

bezeichnen, so erhellt leicht, dass die denselben vorangehenden Näherungsbrüche sämmtlich die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

lösen würden, woraus folgt, dass die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

in relativen Primzahlen nicht lösbar wäre, gegen 1).

Digitized by Google

5) Ist die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

in relativen Primzahlen lösbar, sind x, y die kleinsten Wurzeln, und macht man

$$x'' = xx - 2,\ y'' = xy;\quad x''' = xx'' - x,\ y''' = xy'' - y;$$

so sind (17.) x''', y''' die kleinsten geraden Wurzeln dieser Gleichung, folglich $\frac{1}{2}x'''$, $\frac{1}{2}y'''$ die kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$XX - DYY = +1.$$

Man findet

$$x''' = x^3 - 3x,\quad y''' = Dy^3 + 3y.$$

Wenn also die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

in ungeraden Zahlen lösbar ist, so müssen die kleinsten Wurzeln den cubischen Gleichungen

$$x^3 - 3x - 2X = 0,$$

$$Dy^3 + 3y - 2Y = 0$$

genügen, wo X, Y die kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$XX - DYY = 1$$

bedeuten. Die cardanische Formel giebt folgende Werthe:

$$x = \sqrt[3]{(X + Y\sqrt{D})} + \sqrt[3]{(X - Y\sqrt{D})},$$

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{Y}{D} + \frac{X}{D}\sqrt{\frac{1}{D}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{Y}{D} - \frac{X}{D}\sqrt{\frac{1}{D}}\right)};$$

welche unter einer irrationalen Form erscheinen. Dieses Umstandes wegen hat man x und y durch eine andere Betrachtung auszumitteln.

Die Gleichung

$$x^3 - 3x - 2X = 0$$

hat nur eine reelle Wurzel, von der wir schon wissen, dass sie eine ganze Zahl sein muss. Die Funktion $x^3 - 3x - 2X$ wird negativ für $x = \sqrt[3]{2X}$. Ich behaupte ferner, dass sie für $x = \sqrt[3]{2X} + 1$ positiv wird. Für diesen Werth findet man nämlich

$$x^3 - 3x - 2X = 3(\sqrt[3]{2X})^2 - 2,$$

welcher Ausdruck positiv ist. Setzen wir also $\sqrt[3]{2X} = a - \varepsilon$, wo ε einen positiven ächten Bruch bedeutet, so liegt x zwischen $a-\varepsilon$ und $a-\varepsilon+1$, folglich $x=a$.

Die andere Gleichung betreffend, wird die Funktion

$$f(y) = Dy^3 + 3y - 2Y$$

positiv für $y = \sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}$. Für $y = \sqrt[3]{\frac{2Y}{D}} - 1$ wird sie negativ; denn für diesen Werth kommt

$$f(y) = -D - 3\left(\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}} - 1\right)\left(D\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}} - 1\right),$$

welcher Ausdruck negativ ist, sobald $\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}} - 1$ positiv. Ist aber $\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}} - 1$ negativ, d. h. der angenommene Werth von y negativ, so erhellet von selbst, dass $Dy^3 + 3y - 2Y < 0$ ist. Die Funktion

$$Dy^3 + 3y - 2Y$$

muss also zwischen den Werthen

$$y = \sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{2Y}{D}} - 1$$

verschwinden; und wenn wir $\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}} = b + \varepsilon$ setzen, wo ε ein positiver ächter Bruch, so erhellet, dass $y = b$ sein muss.

Daher folgt: Wenn die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

in relativen Primzahlen lösbar ist, so findet man ihre kleinsten Wurzeln x, y, indem man für x die nächste ganze Zahl an $\sqrt[3]{2X}$ über dieser Grösse, für y die nächste ganze Zahl an $\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}$ unter dieser Grösse nimmt, wo X, Y die kleinsten Werthe der Gleichung

$$XX - DYY = +1$$

bedeuten.

6) Umgekehrt, wenn die Wurzeln der kubischen Gleichungen

$$x^3 - 3x - 2X = 0, \quad Dy^3 + 3y - 2Y = 0$$

beide ganze Zahlen sind, so ist die Gleichung

Digitized by Google

$$xx - Dyy = +4$$

in relativen Primzahlen lösbar.

Denn berechnet man den Ausdruck $xx - Dyy$ mit Hülfe der in 5) gefundenen Werthe von x und y, so erhält man $xx - Dyy = +4$, beachtend, dass $XX - DYY = +1$ ist.

Eine ähnliche Beziehung findet zwischen den kleinsten Wurzeln der Gleichungen

$$xx - Dyy = -4, \quad XX - DYY = -1$$

statt, deren Auffindung wir dem Leser überlassen.

Da nun Legendre eine Tafel der kleinsten Werthe der Gleichung

$$xx - Dyy = 1,$$

oder der Gleichung

$$xx - Dyy = -1$$

gegeben hat, so würde sich die Berechnung unserer Tafel nach dem vorhergehenden Theorem auf eine blosse Kubikwurzelausziehung reduciren. Da ich aber erst nach der Berechnung der Tafel auf diese Methode verfiel, so blieb nur übrig, nach derselben die schon berechnete Tafel zu revidiren, was mit möglichster Sorgfalt geschehen ist.*)

Z. B. Die Gleichung

$$XX - 501\,YY = +1$$

hat die kleinsten Wurzeln

$$X = 11242731902975, \quad Y = 502288218432 \quad \text{(Legendre's Tafel)}.$$

Nun ist

$$\sqrt[3]{2X} = 28224 + \ldots., \quad \frac{2Y}{D} = 2005142628 + \ldots, \quad \sqrt[3]{\frac{2Y}{D}} = 1261 + \ldots.;$$

folglich $x = 28225$, $y = 1261$ die kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$xx - 501yy = 4.$$

---

*) Mit Hülfe von Kubiktafeln lassen sich selbst aus sehr grossen Zahlen die Kubikwurzeln mit Leichtigkeit ausziehen.

Digitized by Google

Tafel

der kleinsten Wurzeln der Gleichung $xx - Dyy = \pm 1$ für die Werthe von $D = 8n + 5$ zwischen 5 und 1005, bei welchen die Gleichung in relativen Primzahlen lösbar ist.

D	$x;y$	D	$x;y$	D	$x;y$
*5	1;1	133	173;15	*277	2613;157
*13	3;1	*149	61;5	285	17;1
21	5;1	*157	213;17	*293	17;1
*29	5;1	165	13;1	301	22745;1311
45	7;1	*173	13;1	309	5045;287
*53	7;1	*181	1305;97	*317	89;5
*61	39;5	205	43;3	341	277;15
69	25;3	213	73;5	357	19;1
77	9;1	221	15;1	*365	19;1
*85	9;1	*229	15;1	413	61;3
93	29;3	237	77;5	*421	444939;21685
*109	261;25	245	47;3	429	145;7
117	11;1	253	1861;117	437	21;1
*125	11;1	261	727;45	*445	21;1

D	$x;y$	D	$x;y$
453	149;7	589	4359377;179625
*461	365;17	597	9749;399
469	65;3	605	123;5
477	2599;119	*613	98763;3989
*493	111;5	621	25;1
501	28225;1261	*629	25;1
*509	925;41	637	14159;561
517	10573;465	645	127;5
525	23;1	*653	1661;65
*533	23;1	*661	1789539;69605
*541	1396425;60037	669	305285;11803
549	1523;65	*685	759;29
*565	309;13	693	79;3
581	6725;279	717	241;9
725	27;1	893	2301;77
*733	27;1	917	1181;39
741	245;9	*941	1135;37
749	12945;473	*949	32685;1061
*65	83;3	957	31;1
*773	139;5	*965	31;1
789	31825;1133	981	68123;2175

D	$x;y$	D	$x:y$
*797	367;13	989	103245;3283
805	1447;51	1005	1807;57
*821	16189;565		Finis.
837	29;1		
*845	29;1		
*853	27483;941		
861	1027;35		
869	49377;1675		

Digitized by Google

XXII.

Miscellen.

In einem älteren englischen Schifffahrtslehrbuche, nämlich in The complete Navigator. By Andrew Mackay. London. 1804., finde ich folgenden Beweis des bekannten trigonometrischen Satzes, dass die Summe zweier Seiten eines ebenen Dreiecks sich zu deren Differenz verhält, wie die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zu der Tangente der halben Differenz dieser Winkel, der wenigstens mir neu gewesen ist, und, weil er wohl auch noch manchem anderen Leser dieser Zeitschrift unbekannt sein dürfte, deshalb hier mitgetheilt werden soll.

In Taf. XI. Fig. 11. sei ABC das gegebene Dreieck, und von den beiden Seiten AB und AC sei AB die grössere. Man verlängere AC über A hinaus und mache $AD=AB$, ziehe BD, mache $AE=AC$, und ziehe CE, welche, verlängert, BD in F schneidet. Nun ist die Summe der gleichen Winkel ACE und AEC der Summe der beiden Winkel ACB und ABC gleich, also ist

$$\angle DCF=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC),$$

und daher

$$\angle BCF=\angle ACB-\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC),$$

d. i.

$$\angle BCF=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle ABC):$$

Nun ist aber

$$\angle BEF = \angle AEC = \angle DCF,$$

$$\angle EBF = \angle CDF.$$

Also sind die Dreiecke CDF und BEF einander ähnlich, und es ist folglich auch

$$\angle CFD = \angle CFB,$$

d. h. CF steht auf BD senkrecht. Wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke CDF und BEF ist aber

$$CD : BE = DF : BF,$$

oder nach der Construction

$$AB + AC : AB - AC = \frac{DF}{CF} : \frac{BF}{CF},$$

d. i.

$$AB + AC : AB - AC = \text{tang} DCF : \text{tang} BCF,$$

also nach dem Obigen:

$$AB + AC : AB - AC$$
$$= \text{tang}\frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC) : \text{tang}\frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC),$$

welches der zu beweisende Satz ist.

Mir scheint diese Beweisart sehr einfach zu sein, und ist deshalb von mir hier mitgetheilt worden. G.

Digitized by Google

LVII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik.

In dem Journal des Savants. Février. 1850. findet sich ein Aufsatz des trefflichen hochbejahrten Biot, der in so hohem Grade interessant ist, dass ich nicht unterlassen darf, diese Nummer des Literar. Berichts zu benutzen, denselben den Lesern des Archivs ganz mitzutheilen, und bin versichert, mir dadurch einigen Dank zu verdienen.

G.

Une anecdote relative a M. Laplace.

Lu à l'Académie française, dans sa séance particulière du 5 février 1850, par M. J. B. Biot.

Messieurs,

Quand un homme d'ordre s'apprête à partir pour un grand voyage, il met ses affaires en règle, et prend soin d'acquitter toutes les dettes qu'il peut avoir contractées. Voilà pourquoi je vais vous raconter comment, il y a quelques cinquante ans, un de nos savants les plus illustres accueillit et encouragea un jeune débutant, qui était venu lui montrer ses premiers essais.

Ce jeune débutant, c'était moi, ne vous déplaise. Notez, pour excuser l'épithète, que ceci remonte au mois de bru-

maire an VIII de la République française, 1re édition. Quelques mois plus tard, on me fit l'insigne honneur de me nommer associé de l'Institut national; mais, à cette date, et surtout à l'époque un peu antérieure où mon récit commence, je me trouvais complétement inconnu. J'étais alors un tout petit professeur de mathématiques, à l'École centrale de Beauvais. Sorti nouvellement de l'École polytechnique, j'avais beaucoup de zèle et peu de science. Dans ce temps-là, on ne demandait guère aux jeunes gens que de l'ardeur. J'étais passionné pour la géométrie et pour beaucoup de choses. La fortune, plutôt que la raison, me préserva de céder à des goûts trop divers. Fixé, dès lors, par les noeuds les plus doux, à l'intérieur de la famille qui m'avait adopté, heureux du présent, comptant sur l'avenir, je ne songeais qu'à suivre, avec délices, les penchants de mon esprit vers toutes sortes d'études scientifiques; et à faire, par plaisir, ce que l'intérêt de ma carrière m'aurait prescrit comme un devoir. J'avais surtout une ambition démesurée de pénétrer dans les hautes régions des mathématiques, où l'on découvre les lois du ciel. Mais ces grandes théories, encore éparses dans les collections académiques, n'étaient presque abordables que pour le petit nombre d'hommes supérieurs qui avaient concouru à les établir; et s'y lancer sans guide, sur leurs traces, c'était une entreprise où l'on avait toute chance de s'égarer pendant bien du temps avant de les rejoindre. Je savais que M. Laplace travaillait à réunir ce magnifique ensemble de découvertes, dans l'ouvrage qu'il a très-justement appelé: *la Mécanique céleste*. Le premier volume était sous presse; les autres suivraient, à de bien longs intervalles, au gré de mes désirs. Une démarche, qui pouvait paraître fort risquée, m'ouvrit un accès privilégié dans ce sanctuaire du génie. J'osai écrire directement à l'illustre auteur, pour le prier de permettre que son libraire m'envoyât les feuilles de son livre, à mesure qu'elles s'imprimaient. M. Laplace me répondit, avec autant de cérémonie que si j'eusse été un savant véritable. Toutefois, en fin de compte, il écartait ma demande, ne voulant pas, disait-il, que son ouvrage fût présenté au public avant d'être terminé, afin qu'on le jugeât d'après son ensemble. Ce déclinatoire poli, était sans doute très-obligeant dans ses formes. Mais, au fond, il accommodait mal mon affaire. Je ne voulus pas l'accepter sans appel. Je récrivis immédiatement à M. Laplace, pour lui représenter qu'il me faisait beaucoup plus d'honneur que je n'en méritais, et que je n'en désirais. Je ne suis pas, lui disais-je, du public qui juge, mais du public qui étudie. J'ajoutais que, voulant suivre et refaire tous les calculs en entier pour mon instru-

Digitized by Google

tion, je pourrais, s'il se rendait à ma prière, découvrir et signaler les fautes d'impression qui s'y seraient glissées. Ma respectueuse insistance désarma sa réserve. Il m'envoya toutes les feuilles déjà imprimées, en y joignant une lettre charmante, cette fois nullement cérémonieuse, mais remplie des plus vifs et des plus précieux encouragements. Je n'ai pas besoin de dire avec quelle ardeur je dévorai ce trésor. Je pouvais bien m'appliquer la maxime: *violenti rapiunt illud.* Depuis, chaque fois que j'allais à Paris, j'apportais mon travail de révision typographique, et je le présentais personnellement à M. Laplace. Il l'accueillait toujours avec bonté, l'examinait, le discutait; et cela me donnait l'occasion de lui soumettre les difficultés qui arrêtaient trop souvent ma faiblesse. Sa condescendance à les lever était sans bornes. Mais lui-même ne pouvait pas toujours le faire, sans y donner une attention quelquefois assez longue. Cela arrivait d'ordinaire aux endroits, où, pour s'épargner des détails d'exposition trop étendus, il avait employé la formule expéditive: *il est aisé de voir.* La chose, en effet, avait paru, dans le moment, très-claire à ses yeux. Mais elle ne l'était pas toujours, même pour lui, à quelque temps de là. Alors, si vous lui en demandiez l'explication, il la cherchait patiemment, par diverses voies, pour son compte comme pour le vôtre; et c'était là, sans doute, le plus instructif des commentaires. Une fois, je le vis passer ainsi près d'une heure, à tâcher de ressaisir la chaîne de raisonnements qu'il avait cachée sous ce mystérieux symbole: *il est aisé de voir.* On doit dire, à sa décharge, que s'il avait voulu être complétement explicite, son ouvrage aurait dû avoir huit ou dix volumes in-4° au lieu de cinq; et peut-être, n'aurait-il pas vécu assez de temps pour l'achever.

Tout le monde comprendra le prix que devaient avoir pour un jeune homme ces communications familières et intimes, avec un génie si puissant et si étendu. Mais ce que l'on ne saurait bien se figurer, à moins d'en avoir été l'objet, ce sont les sentiments de délicatesse affectueuse, et comme paternelle, dont il les accompagnait. Ceci m'amène naturellement à l'anecdote que j'ai voulu raconter. Car elle en offre un exemple aussi parfait que rare.

Peu de temps après qu'il m'eut été permis de l'approcher, j'eus la bonne fortune de faire un pas, qui me sembla nouveau et imprévu, dans une partie des mathématiques, où l'on était à peine entré jusqu'alors. J'avais remarqué, dans les commentaires de Pétersbourg, une classe de questions géométriques fort

singulières, qu'Euler avait traitées par des méthodes indirectes, dans un mémoire intitulé: *De insigni promotione methodi tangentium inversae.* Il s'était proposé aussi une question de ce genre, encore plus difficile, sur laquelle il était revenu à plusieurs reprises dans les *Acta eruditorum*, en la résolvant chaque fois par des voies différentes, mais toujours indirectement. La singularité de ces problèmes consistait en ce qu'il fallait découvrir la nature d'une courbe, d'après certaines relations assignées, dont les caractères géométriques étaient d'ordres dissemblables: les unes devant avoir lieu entre des points infiniment voisins, les autres entre des points distants, séparés, par des différences finies et données, d'abscisses. Or, la première classe de conditions, relative aux points voisins, étant considérée isolément, sous le point de vue abstrait, dépend du calcul différentiel ordinaire: la deuxième, relative aux points distants, dépend d'un autre genre de calcul, qui s'adapte spécialement aux différences finies. L'idée me vint que, pour bien faire, il fallait écrire d'abord l'énonce complet du problème dans le langage analytique, en appliquant à chacune de ses parties leurs symboles propres. Cela conduirait à un genre d'équations, dit, *aux différences mêlées*, peu étudié jusqu'alors, qui exprimerait ainsi, avec une entière généralité, l'ensemble des conditions mixtes auxquelles on devrait satisfaire; après quoi, on n'aurait plus qu'à se tirer, comme on pourrait, de ce dernier pas. La réalisation de cette idée surpassa mes espérances. Toutes les questions de ce genre, qui avaient été traitées indirectement par Euler, et par d'autres géomètres, étant exprimées ainsi en symboles généraux, se résolvaient sans difficulté, comme par enchantement. Lorsque j'eus trouvé cette clef qui les ouvrait, j'apportai mon travail à Paris, et j'en parlai à M. Laplace. Il m'écouta avec une attention, qui me sembla mêlée de quelque surprise. Il me questionna sur la nature de mon procédé, sur les détails de mes solutions. Quand il m'eut examiné sur tous ces points, „Cela me paraît fort bien, „dit-il, venez demain matin m'apporter votre mémoire. Je „serai bien aise de le voir.“ On comprend que je fus exact au rendez-vous. Il parcourut fort attentivement tout mon manuscrit; l'exposé de la méthode, les applications, les considérations ultérieures que j'y avais annexées. Puis, il me dit: „Voilà un très-bon travail; vous avez pris la véritable „voie qu'il faut suivre pour résoudre directement ce genre „de questions. Mais les aperçus que vous présentez, à la „fin, sont trop éloignés. N'allez pas au delà des résultats „que vous avez obtenus. Vous rencontreriez probablement „des difficultés plus sérieuses que vous ne paraissez le

Digitized by Google

„croire; et l'état actuel de l'analyse pourrait bien ne pas „vous fournir les moyens de les surmonter.“ Après m'être défendu quelque temps, car jamais il ne lui est arrivé d'interdire aux jeunes gens qui l'approchaient la liberté d'une respectueuse controverse, je cedai à ses conseils, et je rayai toute cette fin hasardeuse. „Comme cela, me dit-il, le reste „sera fort bien. Présentez demain votre mémoire à la classe „(on appelait alors ainsi l'Académie): et, après la séance, „vous reviendrez dîner avec moi. Maintenant, allons déjeu„ner.“ Ici, je ne craindrai pas de placer un tableau d'intérieur, qui le fera voir tel qu'il était, tel qu'il fut toujours, dans la simplicité de ses rapports avec les jeunes gens qui avaient le bonheur de l'approcher, et qui, devenus des hommes, sont restés groupés autour de lui pendant sa longue carrière, comme autant d'enfants adoptifs de sa pensée. C'était dans ces instants de loisir, après son travail du matin, qu'il aimait le plus habituellement à nous recevoir. Le déjeuner était d'une simplicité pythagorique: du lait, du café, des fruits. On servait dans l'appartement de Mme Laplace, laquelle, alors jeune et belle, nous accueillait tous indistinctement, avec la bonté d'une mère, qui aurait pu être notre soeur. Là, on pouvait causer de science avec lui pendant des heures. Sa conversation bienveillante se portait tour à tour, sur les sujets de nos études, sur le progrès des travaux que nous avions commencés, sur ceux qu'il désirait nous voir entreprendre. Il s'occupait aussi des particularités qui concernaient notre avenir; s'informait des opportunités qui pouvaient nous être favorables; et nous y servait si activement, que nous n'avions pas besoin d'y songer nous-mêmes. En retour de tout cela, il ne nous demandait que du zèle, des efforts, et la passion du travail. Voilà ce que nous avons tous vu de lui. Mais le trait que je vais vous raconter, vous fera mieux connaître encore, ce qu'il a été pour nous.

Le lendemain du jour où je lui avais présenté mon mémoire, je me rendis de bonne heure à l'Académie, où, avec la permission du président, je me mis à tracer, sur le grand tableau noir, les figures et les formules que je voulais exposer. Monge, arrivé un des premiers, m'aperçut, s'approcha de moi, et me parla de mon travail. Je compris que M. Laplace l'avait prévenu. A l'École potytechnique, j'avais été un des élèves auxquels il témoignait le plus d'affection; et je savais, combien le succès que j'espérais lui causerait de plaisir. On est heureux d'avoir de pareils maîtres! Quand la parole me fut accordée, tous les géomètres, c'était alors l'usage, vinrent s'asseoir autour du tableau. Le général Bonaparte, récemment revenu d'Égypte, assistait ce jour-là à

Digitized by Google

la séance, comme membre de la section de mécanique. Il vint avec les autres; soit de lui-même, à titre de mathématicien, dont il se faisait fort; ou, parce que Monge l'amena, pour lui faire les honneurs d'un travail issu de sa chère École polytechnique; à quoi le général répondit: „Je reconnais bien cela aux figures.“ Je pensai qu'il était bien habile de les reconnaître, puisque, hormis M. Laplace, personne encore ne les avait vues. Mais, préoccupé comme je l'étais, de toute autre chose que de sa gloire militaire, et de son importance politique, sa présence ne me troubla pas le moins du monde. J'aurais eu bien plus peur de M. Lagrange, si l'approbation antérieure de M. Laplace ne m'avait donné toute sécurité. J'exposai donc très-librement, et je crois aussi très-clairement, la nature, le but, les résultats de mes recherches. Tout le monde me félicita sur leur originalité. On me donna pour commissaires les *citoyens* Laplace, Bonaparte, et Lacroix. La séance finie, j'accompagnai M. Laplace rue Christine, où il demeurait alors. Dans le chemin, il me témoigna son contentement de la netteté avec laquelle j'avais présenté mes démonstrations, et aussi, de ce que, suivant son conseil, je ne me fusse pas hasardé au delà. Nous arrivons. Après que j'eus salué madame Laplace: „Venez, me dit il, un moment dans mon cabinet; „j'ai quelque chose à vous faire voir.“ Je le suivis. Nous étant assis, et moi prêt à l'écouter, il sort une clef de sa poche, ouvre une petite armoire placée à droite de sa cheminée, je la vois encore...; puis il en tire un cahier de papier jauni par les années, où il me montre tous mes problèmes, les problèmes d'Euler, traités et résolus par cette méthode, dont je croyais m'être le premier avisé. Il l'avait trouvée aussi depuis longtemps; mais il s'était arrêté devant ce même obstacle qu'il m'avait signalé. Espérant le surmonter plus tard, il n'avait rien dit de tout cela à personne, pas même à moi, quand j'étais venu lui apporter son propre travail comme une nouveauté. Je ne puis peindre ce que j'éprouvai alors. C'était un mélange, de joie à voir que je m'étais rencontré avec lui; peut-être aussi de quelque regret à me savoir prévenu; mais surtout, d'une profonde et infinie reconnaissance pour un trait si noble et si touchant. Cette découverte, la première que j'eusse faite, était tout pour moi. Elle était sans doute peu pour lui, qui en avait fait tant d'autres, et de si considérables, dans toutes les parties des mathématiques abstraites, comme dans leurs plus sublimes applications. Mais l'abnégation scientifique est difficile et rare, même en de petites choses. Et puis! cette délicatesse à ne me vouloir découvrir ce mystère qu'après le succès, le succès public, auquel il m'avait conduit comme

Digitized by Google

par la main, ne se servant de ce qu'il avait vu que pour me détourner des écueils où mon inexpérience allait m'engager! M'eût-il montré ce papier avant la séance, il ne m'était plus possible de présenter mon travail, sachant que le sien existait auparavant. La distance de lui à moi, ne m'aurait permis que le silence. Et s'il avait exigé que je profitasse du secret qu'il avait gardé, quel embarras n'aurais-je pas dû éprouver, quand j'aurais lu ce mémoire, ayant la conscience que je n'étais que l'écho d'un autre esprit! Mais sa réserve me laissait toute la force que son approbation m'avait donnée. Paraîtrai-je trop présomptueux, si je me persuade, que tous ces raffinements de bonté, n'auraient pas pu lui être suggérés par un intérêt seulement abstrait, et scientifique, mais qu'ils ont dû lui être inspirés aussi, par un sentiment personnel d'affection? Au reste, en récompense de sa noble conduite, je me figure qu'il devait éprouver un vif plaisir, et une jouissance bien pure, à m'entendre, grâce à lui, débiter en pleine assurance, à la satisfaction de mon savant auditoire, ces nouveaux calculs dont je me croyais l'inventeur, et qu'il aurait pu m'enlever d'un seul mot. Aurait-il été aussi généreux pour un rival? Aurait-il même été alors, toujours juste? C'est ce que je n'ai nullement ici à examiner. Il fut tout cela pour moi et pour bien d'autres, qui commençaient aussi leur carrière. Je n'ai rien de plus à dire, ni à voir. Son influence sur le progrès des sciences physiques et mathématiques a été immense. Depuis cinquante ans, presque tous ceux qui les ont cultivées, se sont instruits dans ses ouvrages, éclairés par ses découvertes, appuyés sur ses travaux. Mais nous, aujourd'hui en bien petit nombre, qui l'avons connu intimement, et qui avons pu nous inspirer de son esprit et de ses conseils, ajoutons encore, à ces titres glorieux, le souvenir de l'affabilité, de la bonté, qu'il nous a montrées. Efforçons-nous de rendre, à ceux qui vont nous suivre, ce ce qu'il fit pour nous; et imitons, s'il se peut, à leur égard, cette noble abnégation, dont je viens de vous rapporter un si bel exemple. Voilà Messieurs, le trait que j'ai voulu vous raconter. M. Laplace a été votre collègue dans cette Académie. Vous connaissiez son grand génie dans les sciences; vous aviez apprécié l'élévation de son talent comme écrivain. Je viens de vous le montrer sous un aspect nouveau, avec des qualités peut-être plus rares. En rendant cet hommage à sa mémoire je lui désobéis. Car il m'avait imposé un silence absolu sur ce qu'il avait fait pour moi, dans cette rencontre. Le rapport académique, auquel il prit part, n'en porte aucune trace; et il ne me permit pas d'y faire la moindre

allusion quand je publiai mon travail[1]). Mais un intervalle d'un demi-siècle amène fatalement la prescription de tous les engagements humains; et je suis convaincu que vous m'absoudrez unanimement d'avoir manqué aujourd'hui à celui-là, pour acquitter la seule dette que le temps ne doive pas éteindre, celle de la reconnaissance.

BIOT.

---

1) Recueil des mémoires présentés à la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut national par divers savants étrangers, t. I, p. 296, date de la présentation, 8 brumaire an VIII. Le rapport, rédigé par M. Lacroix, au nom de la commission, fut lu à la classe le 21 du même mois, trois jours après la grande révolution politique, qui avait porté le général Bonaparte au consulat. Il vint encore à cette séance, et y assista aussi tranquillement que s'il n'avait pas eu d'autre affaire en tête. L'original du rapport existe dans les archives de l'Académie, signé par lui et par les deux autres commissaires Laplace et Lacroix.

Digitized by Google

LVIII.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Georg Freiherrn von Vega, Vorlesungen über die Mathematik. Erster Band. Rechenkunst und Algebra. Siebente Auflage. Nochmals durchgesehen, verbessert und vermehrt von Wilhelm Matzka, ö. o. Professor der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag. 1850. 8. 3 Thlr.

Es ist sehr erfreulich, die nachhaltige Wirksamkeit eines schon vor so langer Zeit, wie die Vega'schen Vorlesungen, erschienenen Werks zu sehen. Wie viele Offiziere des k. k. Artillerie-Corps mögen wohl schon diesem Werke ihre mathematische Bildung verdanken! Der Herr Herausgeber verdient gewiss allen Dank, dass er sich der neuen Bearbeitung dieses verdienstlichen Werkes mit so viel Umsicht unterzogen hat. Die meisten Zusätze scheint die Lehre von den Gleichungen erhalten zu haben, und namentlich ist es sehr verdienstlich, dass der Herr Herausgeber das Wichtigste von Fourier's Vervollkommnung der Newton'schen Annäherungsmethode an die irrationalen Wurzeln der Zahlengleichungen ohne Differenzialrechnung und ohne geometrische Betrachtungen dargestellt hat. Möge das Werk in seiner neuen wirklich vervollkommneten Gestalt noch lange zur Verbreitung gründlichen mathematischen Wissens fortwirken!

Elementarlehre von den Logarithmen, auf einen neuen, verständlicheren und umfassenderen Begriff dieser Hilfszahlen gegründet, blos die Kenntniss der gewöhnlichsten Zifferrechnungen voraussetzend, ohne

Algebra gemeinfasslich zergliedert von Wilhelm Matzka, Professor der Mathematik. Vorzugsweise bestimmt zur Verbreitung dieser im Zifferrechnen sovielseitig nützlichen Lehre im Kreise der praktischen Rechner, in Untergymnasien, Real-, Gewerbs- und Bürgerschulen. Prag. 1850. 8.

Es ist gewiss immer, namentlich aber in jetziger Zeit, höchst verdienstlich, die Ergebnisse und Hülfsmittel der strengen und höheren Wissenschaft einem grösseren Kreise von Gebildeten zugänglich zu machen, überhaupt in das Leben einzuführen. Wie grosse Vortheile und Erleichterungen die Logarithmen bei der Ausführung der verschiedenartigsten Rechnungen darbieten, weiss jeder Mathematiker; wer aber einen Blick in das praktische Leben gethan hat, weiss auch, dass diese Lehre bei Weitem noch nicht allgemein genug verbreitet ist, dass die von ihr dargebotenen Vortheile, ausser von den eigentlichen Mathematikern, noch lange nicht allgemein genug anerkannt sind und benutzt werden. Die Lehre von den Logarithmen möglichst allgemein in das praktische Leben einzuführen, ist der Hauptzweck der vorliegenden Schrift. Sogenannte praktische Anleitungen zur Logarithmenrechnung giebt es schon genug, mit denen aber die vorliegende Schrift keineswegs in eine Kategorie gestellt werden darf, indem dem Herrn Vf. vielmehr daran lag, neben einer wahrhaft praktischen Anleitung zur Ausführung der betreffenden Rechnungen, namentlich auch durch eine einfache völlig naturgemässe Darstellung der Theorie der Logarithmen ein wirkliches inneres Verständniss derselben herbeizuführen, wobei er von dem gewiss völlig richtigen Gesichtspunkte ausging, dass nur erst durch ein solches inneres Verständniss der Theorie der wahren Praxis der Weg gebahnt werde. Wir würden es uns nicht versagen, mehr über dieses gewiss recht sehr verdienstliche Schriftchen zu sagen, wenn wir uns nicht in der glücklichen Lage befänden, die Leser des Archivs auf eine in dem vorliegenden Hefte dieser Zeitschrift, welchem diese Nummer des literarischen Berichts zur Begleitung dient, abgedruckte streng wissenschaftliche Abhandlung Nr. III. desselben Herrn Vfs. über die Logarithmen verweisen zu können. Was in dieser vorzüglichen Abhandlung streng wissenschaftlich entwickelt worden ist, bildet in mehr allgemein verständlicher Darstellung wenigstens zum Theil auch den Inhalt der vorliegenden Schrift, und namentlich ist es die im Archiv. Thl. XV. Heft II. S. 150. gegebene Definition der Logarithmen, von welcher der Herr Vf. auch in der vorliegenden Schrift seinen Auslauf nimmt. Wir sind der Meinung, dass diese Definition in vorliegender Schrift sehr geschickt zu einer möglichst allgemein verständlichen Entwickelung der Theorie der Logarithmen benutzt worden ist, und was die mehr praktische von vollständiger Sachkenntniss deutlich zeugende Anleitung zur Logarithmenrechnung betrifft, so wird gewiss Niemand über irgend einen dabei in Frage kommenden Fall hier vergeblich Belehrung suchen. Wir empfehlen daher diese Schrift allen denen, welchen es daran liegt, sich eine gehörig theoretisch begründete Kenntniss der Lehre von den Logarithmen zunächst Behufs praktischer Zwecke zu verschaffen, ohne andere mathematische Kenntnisse als die Kenntniss der gewöhnlichen

Digitized by Google

Rechenkunst zu besitzen, besonders aber auch allen Lehrern an den auf dem Titel genannten Lehranstalten, aus vollkommenster Ueberzeugung zu sorgfältigster Beachtung.

Trigonometrie.

Compendium der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von F. Schaub, Adjunct der k. k. Sternwarte zu Wien. Mit einer Figurentafel. Wien. 1849. 8.

Eine kurze, recht deutliche Darstellung der beiden Trigonometrieen. Die meisten Aufgaben sind zweckmässig durch numerische Beispiele erläutert, was Anerkennung verdient, da jeden Lehrer gewiss die Erfahrung gelehrt hat, dass Anfänger, wenn sie auch die theoretischen Lehren der Trigonometrie und auch die Lehre von den Logarithmen gut im Kopfe haben, doch schon dadurch keineswegs befähigt sind, eine trigonometrische Rechnung zweckmässig und mit einer gewissen Eleganz zu führen. Für solche, die praktische Anwendungen der Trigonometrie zu machen beabsichtigen, wird namentlich auch der vierte Abschnitt: Relationen zwischen kleinen Aenderungen der Bestimmungsstücke eines Dreiecks, lehrreich sein. Von diesen Relationen wird zum Schluss auch eine Anwendung auf die Fehler bei der Bestimmung des Stundenwinkels aus Polhöhe, Polardistanz und Zenithdistanz eines Gestirns gemacht.

Geodäsie.

Handbuch der niedern Geodäsie nebst einem Anhange über die Elemente der Markscheidekunst. Zum Gebrauche für technische Lehranstalten, so wie für das Selbststudium bearbeitet von Friedrich Hartner, Professor der höhern Mathematik und praktischen Geometrie am steierm. ständ. Joanneum zu Gratz. Wien. 1850. 8.

Wenn uns auch von diesem neuen Handbuche der niedern Geodäsie bis jetzt nur die erste Lieferung vorliegt, so haben wir uns doch schon aus dieser Lieferung von dem gediegenen Inhalte desselben überzeugt. Die Darstellung ist im höchsten Grade deutlich und leicht verständlich, die gegebene Anleitung überall eine wahrhaft praktische, und stets ist auf die neueren Erfindungen und die mehrfachen neueren Verbesserungen der gebräuchlichen Instru-

Digitized by Google

mente gebührend Rücksicht genommen. Besonders hat uns der schon in dieser ersten Lieferung deutlich hervortretende systematische, sehr sorgfältig von dem Einfacheren zum Zusammengesetzteren fortschreitende Gang in der Beschreibung und Beurtheilung der Instrumente angesprochen, und auch die nothwendigsten optischen Hülfslehren fehlen, wie billig, nicht. Auch nicht sehr allgemein gebräuchliche Instrumente, wie z. B. die verschiedenen, bis jetzt bekannten Distanzmesser, sind deutlich beschrieben und ihrem praktischen Werthe nach richtig gewürdigt. Die aus der Teubners'chen Officin in Leipzig hervorgegangene äussere Ausstattung ist in jeder Beziehung vortrefflich. Wenn wir nun auch späterhin, wenn erst die sämmtlichen Lieferungen erschienen sind, noch weiter auf dieses Buch zurückkommen werden, so haben wir es doch für unsere Pflicht gehalten, dasselbe schon jetzt allen Geometern und allen Lehrern an den Unterrichtsanstalten, wo die Geodäsie einen besondern Theil des Unterrichts ausmacht, zur Beachtung zu empfehlen.

Kurzgefasstes Lehrbuch der Geodäsie oder Vermessungskunde von Heinrich Westberg, Lehrer an der Kreisschule zu Mitau. Mit 14 Figurentafeln. Mitau 1850. 8. 15 Ngr.

Dieses kleine Buch enthält eine deutliche Anleitung zu den einfachsten Arbeiten der Feldmesskunst und des Nivellirens. Es werden darin nur die gewöhnlichen geometrischen Elementarkenntnisse vorausgesetzt, trigonometrische Rechnungen nicht zu Hülfe genommen, also Alles, selbst auch die Resultate der Höhenmessungen, nur auf geometrische Constructionen mit Lineal, Zirkel und verjüngtem Maassstabe zurückgeführt. Von Instrumenten sind beschrieben und zu gebrauchen gelehrt der Messtisch nebst Zubehör, das halbkreisförmige Astrolabium und die Boussole. Besonders als Grundlage für den Unterricht in der Feldmesskunst auf landwirthschaftlichen Lehranstalten scheint dieses Büchlein wohl geeignet zu sein. Nur hätten wir gewünscht, dass bei dem Nivelliren ausser der gewöhnlichen Kanalwage doch auch ein Nivellirinstrument mit Fernrohr beschrieben und zu berichtigen und zu gebrauchen gelehrt worden wäre, weil man namentlich bei dem für die Landwirthschaft jetzt so höchst wichtigen Bau der Rieselwiesen doch mit jenem sehr mangelhaften Instrumente nicht ganz ausreichen möchte, und in der That auch bei den genaueren Arbeiten dieser Art jetzt meistens schon der Nivellirinstrumente mit Fernröhren fast allgemein sich bedient, denen man zu diesem Zwecke übrigens eine möglichst einfache und der zu erreichen beabsichtigten Genauigkeit entsprechende Einrichtung giebt.

Digitized by Google

Mechanik.

Die Theorie der bifilaren Aufhängung von Franz Dietzel, Lehrer der Mathematik. Einladungsschrift zur öffentlichen Prüfung der Königl. Gewerbschule und Baugewerkschule zu Zittau am 21. und 22. März 1850. Zittau 1850. 8.

Der Herr Vf. hat in diesem Programm die Theorie der sogenannten bifilaren Aufhängung im Allgemeinen, ohne Rücksicht auf eine besondere Anwendung vollständig entwickelt, und wir müssen sagen, dass wir diese allen, welche von der bifilaren Aufhängung Anwendungen zu machen beabsichtigen, sehr zu empfehlende Schrift mit grossem Interesse gelesen haben. Die Vollständigkeit der Behandlung wird man aus der folgenden kurzen Inhaltsangabe von selbst ersehen: Einleitung. Die bifilare Aufhängung. Bestimmung der Gleichgewichtslage. Bestimmung des Drehungsmoments und der Schwingungsdauer der bifilaren Aufhängung. Correction I, wenn die Fäden ungleiche Spannung haben. Correction II, wenn die Fäden ungleich lang sind. Correction III, die Berücksichtigung der Elasticität der Fäden oder Drähte. Correction IV, Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Bestimmung der Schwingungsdauer, wenn die Schwingungsbogen einen endlichen Werth haben. Bestimmung des Trägheitsmomentes nicht homogener Körper mit Hilfe der bifilaren Aufhängung. Besonders dieser letzte Abschnitt, aber auch noch vieles Andere in dieser verdienstlichen Schrift, ist auch im Allgemeinen für die Statik und Mechanik von Interesse.

Optik.

Als Beilage ist der Nr. 719. der Astronomischen Nachrichten ein Auszug aus einer in der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig am 12. Juni 1850 gelesenen interessanten Abhandlung des Herrn Professor Anger zu Danzig beigegeben worden, welche den Titel führt: „Zur Theorie der Perspective für krumme Bildflächen mit besonderer Berücksichtigung einer genauen Construction der Panoramen. Wir halten es für unsere Pflicht, die Leser des Archivs auf diese einfache und genaue Construction der Panoramen aufmerksam zu machen, und sehen dem Erscheinen der vollständigen Abhandlung mit Verlangen entgegen.

Astronomie.

Storia celeste del R. Osservatorio di Palermo dal 1792 al 1813. Parte seconda 1803—1813. Tomo ottavo 1807—1810. Vienna. 1849. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte und o. ö. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w. und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 31. Theil. Neuer Folge 11r Band. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1807 bis 1810. Wien 1849. 4. (M. vergl. Litterar. Ber. Nr. XLIX. S. 685.)

Der Zweck dieses höchst verdienstlichen Werks ist aus unsern Anzeigen der früheren Bände in diesen literarischen Berichten bekannt. Wir können daher nur auch jetzt wieder unsere Freude darüber ausdrücken, dass dasselbe seiner Beendigung mit so schnellen Schritten entgegen eilet, da ja jetzt nur noch drei Jahrgänge der Piazzi'schen Beobachtungen zurück sind, und wünschen den Herren Herausgebern von Herzen Glück zu diesen ausgezeichneten Erfolgen. Da mit dem vorliegenden Bande zugleich auch der gleich nachher angezeigte 33ste Theil der Annalen der k. k. Sternwarte in Wien erschienen ist, so werden die Piazzi'schen Beobachtungen wahrscheinlich mit dem 9ten Theile (Theil 32 der Annalen) geschlossen werden.

Annalen der k. k. Strernwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte etc. etc. und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 33ster Theil. Neuer Folge 13ter Band. Wien. 1849. 4.

Der Inhalt dieses Theils der Annalen ist nicht bloss astronomisch, sondern von mehrfachem allgemeinen Interesse, wie die folgende Angabe desselben von selbst zeigen wird.

Heft I. und III. Trigonometrische Vermessungen im Kirchenstaate und in Toscana, ausgeführt von dem Ingenieur Johann Marieni, unter der Direction des k. k. militärisch-geographischen Institutes in den Jahren 1841, 1842 und 1843. — In einem Vorworte zu diesen Heften sind nach einigen historischen Bemerkungen über die früheren in Italien ausgeführten Messungen von Boscovich und Maire, Moynet, Oriani, Reggio, Cesaris, von Zach, Inghirami, und dem neapolitanischen General Visconti, die Instrumente angegeben, welcher sich Herr Marieni bei seinen Messungen bediente, und die Formeln zusammengestellt, nach denen die Berechnung der Breiten, Längen und Azimuthe und der Höhen über der Meeresfläche geführt wurde. Die Messung ward auf die im Jahre 1788 von den Mailänder Astromen Oriani, Reggio und Cesaris auf der Ebene von Gallarate und Soma längs

Digitized by Google

des Ticino gemessene Basis gegründet, diese Basis dabei nach Carlini's Angabe zu 9999, 245 Metres angenommen, und vermittelst des additiven Logarithmen 9,7220213, der im k. k. militärisch-geographischen Institute zur Verwandlung der Meter in Klaftern gebraucht wird, in Wiener Klaftern verwandelt. Die an den gemessenen Winkeln anzubringenden Correctionen waren immer sehr klein. Ein schönes und für Jeden, der solche Messungen auszuführen beabsichtigt, sehr instructives „Uebersichts-Skelett trigonometrischer Vermessungen in Italien" ist beigegeben. Astronomische Ortsbestimmungen von Bologna, Florenz, Neapel, Padua, Pisa, Rimini, Ripatransone, S. Salvatore, Venedig, und lehrreiche Vergleichungen derselben mit den auf trigonometrischem Wege erhaltenen, ferner die Längen verschiedener Meridianbögen, Höhen über der Meeresfläche u. s. w. sind gleichfalls beigefügt und ein Relations-Auszug des Ingenieurs Marieni über die trigonometrischen Arbeiten, die von demselben in den Jahren 1841, 1842 und 1843 im Kirchenstaate und in Toscana ausgeführt worden sind, bildet den Schluss der in vielen Beziehungen wichtigen und interessanten Arbeit.

Heft II. Resultate funfzehnjähriger an der k. k. Sternwarte zu Wien angestellter Hygrometer-Beobachtungen, zusammengestellt von Dr. C. Jelinek.

Heft III. Cometen-Beobachtungen an der Wiener Sternwarte, reducirt von Dr. C. Jelinek und C. Hornstein.

Wir würden namentlich über die letztere sehr verdienstliche Arbeit hier mehr sagen, wenn dieselbe nicht schon besonders in dem Literar. Ber. Nr. LIII. S. 739. von uns angezeigt worden wäre, worauf wir daher uns zu verweisen erlauben.

In dem Augenblicke, wo wir diese Anzeige schliessen, geht uns die höchst erfreuliche Nachricht zu, dass in Wien zu dem Bau einer neuen Sternwarte geschritten werden soll. Wenn der österreichische Staat neben so vielen andern grossen wissenschaftlichen Unternehmungen, auf die schon früher in diesen Literarischen Berichten öfters gebührend hingewiesen worden ist, in einer so bewegten Zeit, wie die unsrige ist, auch noch zu dem Bau einer grossartigen, allen jetzigen Anforderungen der Wissenschaft entsprechenden Sternwarte schreitet: so muss derselbe in der That grosse innere Kräfte besitzen, und einen Eifer haben, die Wissenschaft zu einem grossartigen neuen Aufschwunge zu bringen, der namentlich in der jetzigen Zeit mit Recht in Erstaunen setzt, und die wärmste Anerkennung aller wahren Verehrer der Wissenschaften lebhaft in Anspruch nimmt.

Tellurium und Lunarium, construirt von Gustav Grimm, zu beziehen durch jede Buchhandlung von Hermann Kanitz in Gera.

Dieses nur 18 Rtlr. kostende, sauber gearbeitete Tellurium und Lunarium scheint, so viel sich für jetzt nach dem uns vor-

liegenden Prospectus urtheilen lässt, seines niedrigen Preises und seiner im Ganzen zweckmässigen Einrichtung wegen, zu verdienen, Lehranstalten zur Anschaffung empfohlen zu werden.

Physik.

Anfangsgründe der Physik für den Unterricht in den obern Klassen der Gymnasien und Realschulen, sowie zum Selbstunterricht, von Karl Koppe, Professor und Oberlehrer am Gymnasium zu Soest. Mit 195 in den Text eingedruckten Holzschnitten und einer Karte. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Essen. 1850. 8.

Die 1847 und 1848 erschienene erste Auflage dieses Buchs ist im Literar. Ber. Nr. XL. S. 579. und Nr. XLIV. S. 627. von uns angezeigt worden. Wir freuen uns, unsere damalige Empfehlung, welche wir jetzt wiederholen, durch das baldige Erscheinen dieser neuen Auflage bestätigt zu sehen, welche mit Recht den Namen einer verbesserten und vermehrten verdient. Rücksichtlich der äusseren Einrichtung unterscheidet sich diese neue Auflage von der älteren nur dadurch, dass die zwei Theile dieser letzteren jetzt in einem Theile vereinigt worden sind, was dem Herrn Vf. doch zweckmässig geschienen haben muss. Möge das Buch auch in seiner neuen Gestalt fortfahren, dem so wichtigen Studium der Physik in einem möglichst grossen Kreise immer mehr Liebhaber zu gewinnen!

Digitized by Google

LIX.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Gesetze in den höheren Zahlengleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten. Von Simon Spitzer. Mit einem Vorworte von Dr. Leopold Carl Schulz von Strassnitzki, Prof. der Math. am k. k. polytechnischen Institute in Wien. Wien. 1849. 4°.

Diese Abhandlung des Herrn Simon Spitzer, welcher schon früher eine im Literar. Ber. Nr. LII. S. 717. angezeigte sehr verdienstliche Arbeit über die Gleichungen lieferte, hat im Allgemeinen den Zweck, die bekannten Ideen von Gauss über die imaginären Grössen in der Theorie der Gleichungen, namentlich bei deren Auflösung, zur Anwendung und Geltung zu bringen. Herr Prof. Dr. Schulz von Strassnitzki hat die vorliegende neue Abhandlung mit einem Vorworte begleitet, welches wir in vielen Beziehungen für so lehrreich halten, dass wir uns nicht versagen können, dasselbe unsern Lesern, so weit es ohne Figuren verständlich ist, im Folgenden ganz mitzutheilen, weil es zugleich den sichersten Maassstab für die sehr verdienstlichen Leistungen des Herrn Simon Spitzer abgiebt. Herr Professor Dr. Schulz von Strassnitzki spricht sich nämlich in diesem Vorworte folgendermassen aus:

„Gauss hat die reelle und anschauliche Bedeutung der imaginären Ausdrücke, und ihre Zulässigkeit in der Rechnung in den Göttinger Anzeigen Stück 64 vom Jahre 1831 nachgewiesen; allein dieser grossartige Gedanke Gauss's spielte in der Wissenschaft bloss die Rolle eines geistreichen Einfalls, ohne dass von ihm weiter greifende Anwendungen, namentlich in

der Geometrie gemacht wurden. Der von ihm vorgeschlagene Namen laterale (seitliche) Grösse statt des unpassenden imaginäre ist noch wenig durchgedrungen.

So wie Descartes die negativen Wurzeln einer Gleichung, von ihm noch falsche Wurzeln genannt, zuerst geometrisch erläutert, und dadurch einer umfassendern Gestaltung der Geometrie den Weg gebahnt, so sind wir auch der Meinung, dass die Gauss'sche Anschauungsweise der sogenannten imaginären Grössen durch das Gesammtgebiet der Mathematik durchgeführt, nicht nur lichtvolle Klarheit in die bisherigen Kenntnisse bringen wird, sondern sehen auch umfassenderen Erweiterungen der Wissenschaft entgegen. In dem Vorworte zu Hrn. Spitzer's Methode, die imaginären Wurzeln einer numerischen Gleichung zu finden, habe ich gezeigt, wie man imaginäre Werthe angeben kann, die in eine Gleichung mit durchgängig reellen Coefficienten substituirt, reelle Resultate geben. Auf diesen Gedanken fussend, hat es Herr Spitzer unternommen, die geometrische Bedeutung dieser reellen Resultate zu ermitteln, und so gelang ihm die geometrische Construction der imaginären Wurzeln einer numerischen Gleichung; wodurch sich neuerdings mit voller Evidenz ergibt, dass die lateralen (seitlichen) Grössen — bisher imaginär genannt — nicht leere Zeichenformen sind, sondern dass sie in die Wissenschaft vollkommen eingebürgert zu werden verdienen.

Descartes nimmt zur geometrischen Deutung einer algebraischen Function $f(x)$, die Werthe der unbekannten x als Abscissen, und die daraus sich ergebenden Resultate der Substitution als Ordinaten an, wodurch das geometrische Bild der Function $f(x)$ eine ebene Krumme wird, und die Punkte, wo die Abscissenaxe diese Krumme schneidet, die positiven und negativen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ geben, weil in diesen Punkten $y=f(x)$ gleich Null wird. — Spitzer nimmt zur geometrischen Veranschaulichung der Function $f(x+y\sqrt{-1})$ als Constructionsfeld die Ebene der xy und zwar so, dass die x auf die Achse der x und senkrecht darauf die Werthe der y verzeichnet werden, ganz im Sinne Gauss's; die reellen Resultate, falls sich solche ergeben, werden in der Richtung der z angebracht. Das geometrische Bild, welches dadurch entsteht, gibt nicht nur die ebene Curve des Descartes, nämlich für die Werthe, wo $y=0$ ist, sondern auch mehrere damit verbundene krumme Linien von doppelter Krümmung, und durch den Platz, wo diese Krummen die Ebene der xy schneiden, erhalten die imaginären Wurzeln ihre geometrische Interpretation. Es sei u eine Function von x mit reellen Coefficienten, setzen wir statt x, $x+y\sqrt{-1}$, so dass:

$$u=f(x+y\sqrt{-1}),$$

so hat man:

$$u=f(x)-y^2.\frac{f_2(x)}{2!}+y^4.\frac{f_4(x)}{4!}-\text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

$$+y\sqrt{-1}\{f_1(x)-y^2.\frac{f_3(x)}{3!}+y^4\frac{f_5(x)}{5!}-\text{u. s. w.}\}.$$

Da wir nur die reellen Werthe von u in Betrachtung ziehen wollen, und selbe z nennen, so haben wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$z=f(x)-y^2.\frac{f_2(x)}{2!}+y^4.\frac{f_4(x)}{4!}-\text{u. s. w.},$$

$$y\{f_1(x)-y^2.\frac{f_3(x)}{3!}+y^4.\frac{f_5(x)}{5!}-\text{u. s. w.}\}=0:$$

Eine Auflösung liegt auf der Hand, nämlich

$$z=f(x),\ y=0;$$

das ist nun die ebene Curve nach der Verzeichnung Descartes, welche die positiven und negativen Wurzeln durch ihre Durchschnitte mit der Achse der x darbietet. Das System der andern Curven ergibt sich aus den Gleichungen:

$$z=f(x)-y^2.\frac{f_2(x)}{2!}+y^4.\frac{f_4(x)}{4!}-\text{u. s. w.},$$

$$f_1(x)-y^2.\frac{f_3(x)}{3!}+y^4.\frac{f_5(x)}{5!}-\text{u. s. w.}=0;$$

die wir kurz durch

$$z=\varphi(x,\ y);\ \psi(x,\ y)=0$$

darstellen wollen, wobei, wie man leicht sieht, der höchste Exponent von y in $\psi(x, y)=0$ stets gerade, und um zwei oder wenigstens um einen Grad niederer ist, als der höchste Exponent von x in der Gleichung $f(x)=0$.

Wenn wir nun nach einander dem x in der Gleichung $\psi(x,y)=0$ verschiedene willkührliche Werthe geben, und den dieser Gleichung entsprechenden Werth von y bestimmen, und diese Werthe von x und y in die Gleichung $z=\varphi(x,\ y)$ substituiren; so hat man einen Punkt dieses Curvensystems. Es sei so m ein willkührlicher Werth von x, und die Gleichung $\psi(m,\ y)=0$ gebe für y die Werthe $a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots$ so erhält man für z die Werthe

$$\varphi(m,\ a);\ \varphi(m,\ b);\ \varphi(m,\ c);\ \varphi(m,\ d);\ \ldots\ldots;$$

geben wir nun dem x einen von m sehr wenig verschiedenen Werth m', so werden die Werthe von y aus der Gleichung $\psi(m',\ y)=0$ von den Werthen $a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots$ nur wenig verschieden sein. Es seien dieselben $a',\ b',\ c',\ d',\ \ldots$ und daher die resultirenden Werthe von z:

$$\varphi(m',\ a');\ \varphi(m',\ b');\ \varphi(m',\ c');\ \ldots\ldots$$

Ist eben so m'' von m' nur sehr wenig verschieden, so werden die Wurzeln der Gleichung $\psi(m'', y)=0$, d. i. a'', b'', c'', d'',... von a', b', c', d',.... ebenfalls nur wenig sich unterscheiden, welche uns für z die Resultate

$$\varphi(m'', a''); \varphi(m'', b''); \varphi(m'', c''); \ldots .$$

geben.

Je näher nun m, m', m'', folglich auch

$$a, a', a'', \ldots b, b', b'', \ldots c, c', c'', \ldots .$$

an einander liegen, um so mehr bilden

$$\varphi(m, a), \varphi(m', a'), \varphi(m'', a''), \ldots$$

eine stätige Reihe von Punkten einer Curve, eben so

$$\varphi(m, b), \quad \varphi(m', b'), \quad \varphi(m'', b''), \ldots$$

und ebenso

$$\varphi(m, c), \quad \varphi(m', c'), \quad \varphi(m'', c''), \ldots .$$

Diese Curven im Allgemeinen von doppelter Krümmung wollen wir conjugirte Curven nennen.

Es sei z. B. die Gleichung

$$x^3-6x^2+11x-6=0 \text{ oder } (x-1)(x-2)(x-3)=0;$$

setzet man hier statt x, $x+y\sqrt{-1}$, so hat man:

$$u=f(x+y\sqrt{-1})=f(x)-\frac{1}{2}f_2(x).y^2+\{f_1(x)-\frac{1}{6}f_3(x)y^2\}y\sqrt{-1}.$$

Damit nun u reell werde, muss der Factor des zweiten Gliedes sich auf Null reduciren, und man hat:

$$z=f(x)-\frac{1}{2}f_2(x).y^2; \; f_1(x)-\frac{1}{6}f_3(x)y^2=0,$$

d. h.

$$z=x^3-6x^2+11x-6-(3x-6)y^2; \; 3x^2-12x+11-y^2=0,$$

woraus:

$$y^2=3x^3-12x+11; \; z=-(8x^3-48x^2+94x-60)$$

als Gleichungen der conjugirten Curven, während die Gleichungen der Hauptcurve $y=0$ und $z=x^3-6x^2+11x-6$ sind.

Die Projection auf die Ebene xy wird durch $y^2=3x^2-12x+11$ gegeben, welche, wie man sieht, die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Centrum $x=2$, $y=0$, und die Scheitel derselben

$$x=2-\frac{1}{\sqrt{3}},\ z=\frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ und } x=2+\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ und } z=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

zu ihren Coordinaten haben. Diese zwei Scheitel treffen mit dem Maximum- oder Minimumpunkt der Hauptcurve zusammen "

„Als zweites Beispiel diene uns die Gleichung

$$x^4-6x^3+18x^2-30x+25=0,$$

welche die vier imaginären Wurzeln $1\pm 2\sqrt{-1}$ und $2\pm\sqrt{-1}$ hat. Man hat:

$$z=x^4-6x^3+18x^2-30x+25-(6x^3-18x+18)y^2+y^4,$$

$$4x^3-18x^2+36x-30-(4x-6)y^2=0.$$

Man erhält hier

für $x=1$; $y=\pm 2$; $z=0$

für $x=2$, $y=\pm 1$; $z=0$."

Herr Prof Dr. Schulz von Strassnitzki erläutert nun die beiden vorhergehenden Beispiele sehr deutlich und lehrreich durch zwei vollständig ausgeführte Constructionen, und leitet daraus die Eigenschaften der beiden als Beispiele gebrauchten Gleichungen rücksicksichtlich ihrer reellen und imaginären, gleichen oder ungleichen, Wurzeln ab, wobei wir nur bedauern müssen, dass wir diese Constructionen hier den Lesern des Archivs nicht mittheilen können, weil den Literarischen Berichten Figuren nicht beigegeben werden können, und fährt dann auf folgende Art fort:

„Herr Spitzer hat vorstehende Betrachtungen zunächst zur Grenzenbestimmung der imaginären Wurzeln benutzt, wodurch die Berechnung derselben wesentlich erleichtert wird: er erläutert ferner die Fälle, in welchen eine Function durch imaginäre Werthe einen Maximum- oder Minimumwerth erreicht. Zum Schlusse dehnt er seine Betrachtungen und Methoden auch auf die Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten aus. Hoffentlich werden die Mathematiker das hier Dargebrachte ihrer Aufmerksamkeit nicht für unwürdig halten, und die hier entwickelten Gedanken zur weitern Durchführung in der Wissenschaft bringen."

Die nun folgende Arbeit des Herrn S. Spitzer zerfällt in die folgenden Abschnitte:

1. Bestimmung der Grenzen der reellen und imaginären Wurzeln einer Zahlengleichung höheren Grades. — 2. Betrachtungen

über die imaginären Maximum- und Minimumwerthe einer Function. — 3. Aufsuchung der reellen und imaginären Wurzeln höherer numerischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten. — Note über die imaginären Maxima- und Minimawerthe einer Function.

Alle hier gegebenen Betrachtungen zeichnen sich durch eine vorzügliche Klarheit aus, welche durch die stets beigegebenen, mit grosser Mühe vollständig ausgerechneten Beispiele noch sehr erhöhet wird, so dass wir diese Abhandlung allen Lesern des Archivs dringend zur Beachtung empfehlen.

Herr S. Spitzer schliesst seine Arbeit mit den bescheidenen Worten: „Sollte irgend Gutes dieser Aufsatz enthalten, so gebührt der Dank hierfür einzig und allein meinem Lehrer Herrn Prof. Schulz. Er war es, der mich stets in dieser Wissenschaft leitetete, und mit seinem Rathe unterstützte. Ohne ihn hätte ich diese Arbeit wohl nie zu Stande gebracht."

Vergleichen wir demnach den Anfang und das Ende dieser vorzüglichen Schrift, so haben wir das höchst erfreuliche Bild eines ausgezeichneten Lehrers und trefflichen Schülers vor uns, von denen jeder die Verdienste des andern auf das Freudigste und Innigste anzuerkennen sich bestrebt, ein Beispiel der Anerkennung gegenseitigen Werthes, das in unserer Zeit nicht eben sehr häufig ist.

Der vorhergehenden Abhandlung hat Herr S. Spitzer sehr bald eine zweite folgen lassen, unter dem Titel:

Skizzen aus dem Gebiete der höheren Gleichungen. Von Simon Spitzer, Assistenten der Elementar- und Höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute. Wien. 1850. 4.

die sich den beiden vorhergehenden in würdiger Weise anreihet, und von der er selbst sagt, dass er in derselben Manches allgemeiner, Manches strenger aufgefasst habe, als in den früheren Aufsätzen, und dass zugleich manches Neue von ihm beigefügt worden sei. Bei der Ausdehnung, welche diese Anzeige schon erhalten hat, müssen wir uns leider mit der folgenden blossen Angabe des Hauptinhaltes begnügen:

1. Geometrisches Bild der binomischen Gleichungen $z=u^n-1$. — 2. Geometrischer Ort der symmetrischen Functionen der Wurzeln. — 3. Erweiterung der Theorie des Grössten und Kleinsten: *a*. Bei Gleichungen mit Einer Unbekannten. *b*. Bei Systemen von Gleichungen mit zwei Unbekannten. *c*. Bei Systemen von mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Den Schluss dieses Abschnitts bilden Betrachtungen specieller Fälle bei zwei Gleichungen höheren Grades.

Mögen diese beiden Abhandlungen die Beachtung, welche sie gewiss recht sehr verdienen, so allgemein wie möglich recht bald finden, und zu weitern Untersuchungen über die fraglichen wichtigen Gegenstände reichliche Veranlassung geben!

Digitized by Google

Astronomie.

Populäre Astronomie. Von Dr. J. H. Mädler, Kais.-Russischem Staatsrathe u. s. w. Vierte, völlig umgearbeitete Auflage. Nebst einem Atlas, 20 Tafeln enthaltend. Berlin. 1849. 8.

Ein Buch, welches in einer vierten Auflage vorliegt, muss sich wohl die Gunst des Publikums in vorzüglichem Grade erworben haben, und ein Urtheil darüber zu fällen, ist kaum noch an der Zeit. Wir verkennen auch die Vorzüge dieses Werkes keineswegs, und sind selbst der Meinung, dass dasselbe in gewisser Rücksicht für den Mann von Fach, der die Wissenschaft schon kennt, fast noch mehr Werth hat als für den blossen Liebhaber, weil es eine Menge werthvoller Zusammenstellungen über die Topographie des Planetensystems der Sonne, die Kometen, die Fixsterne, die Nebelflecke, die Doppelsterne u. s. w. enthält, die man bis auf die neueste Zeit herab kaum in irgend einem anderen Werke von ähnlicher Tendenz in gleicher Vollständigkeit finden dürfte, so dass auch uns selbst das Buch in dieser Beziehung manche dankenswerthe Belehrung gewährt hat und öfters von uns zu Rathe gezogen worden ist. Wenn wir aber auf die eigentlich wissenschaftliche Behandlung sehen, so müssen wir freilich offen bekennen, dass wir bei derselben eine auf dem Wege der Beobachtung den Leser nach und nach zu einer vollständigen Kenntniss des grossen Weltgebäudes führende Darstellung, welche so treu als möglich dem historischen Entwicklungsgange der Astronomie folgt, so gut wie ganz vermisst haben. Wir glauben, dass es namentlich in einem populären Werke bei der Darstellung keiner Wissenschaft so zweckmässig ist, sich dem historischen Entwickelungsgange derselben möglichst eng anzuschliessen, als gerade in der Astronomie, und sind der Meinung, dass auch eine solche Darstellung sich nur allein für ein populäres astronomisches Werk eigne. Denn was hilft die Angabe aller einzelnen Erklärungen und Gesetze, ohne dass man auf einem im eigentlichen Sinne heuristischen Wege zu denselben zu gelangen sucht; ohne eine solche heuristische Darstellung sinkt der formelle Nutzen für den Leser, der doch gewiss immer auch sehr hoch anzuschlagen ist, auf Null herab, und die Wissenschaft wird mehr eine blosse Sammlung von Notizen. Sollten wir ein Muster für eine solche Darstellungsweise angeben, so ist dies freilich in gewisser Rücksicht Sache des Geschmacks, wir aber, von unserm Standpunkte aus, wüssten in der That kein uns mehr zusagendes Buch anzugeben, als die zweite*) Ausgabe von Biot's Astronomie physique, in der

*) Die neueste, jetzt schon bis zu vier starken Bänden angewachsene, dritte Ausgabe, die der treffliche hochbejahrte Verfasser noch nicht zu Ende geführt hat, dürfte mehr den Bedürfnissen der Männer vom Fach entsprechen, schon ihres grossen Umfanges wegen, da ja schon die Theorie der optischen Instrumente fast zwei ganze Theile füllt.

wir immer eine wahrhaft populäre, nur ein äusserst geringes Maass mathematischer Vorkenntnisse in Anspruch nehmende, dabei zugleich durch die Sprache höchst ansprechende Darstellung gefunden haben, und möchten sehr wünschen, dass einmal ein in diesem Biot'schen Geiste verfasstes, bis zu den neuesten Entdekkungen fortgeführtes populäres Werk erscheinen möchte.

Solche Formeln wie im vorliegenden Werke aus der Theorie der Planetenbewegung auf S. 100. ff., ohne allen Beweis, ohne alle Deduction angeführt, und selbst durch numerische Beispiele zu gebrauchen gelehrt worden sind, helfen dem Manne von Fach gar nichts, und dem gewöhnlichen Liebhaber oder Dilettanten sind sie natürlich böhmische Dörfer. Ungeachtet aller Achtung vor den Verdiensten des Herrn Verfassers können wir daher in diesem Werke doch keine ganz gleichmässige Darstellung erkennen, die den Leser unter Voraussetzung der allereinfachsten Lehren der Geometrie und allenfalls noch der Trigonometrie auf heuristischem Wege und an dem Faden der historischen Entwikkelung zu einer möglichst vollständigen Kenntniss des grossen Weltgebäudes führt, und ihm ein Staunen abnöthigt über die Grösse und Stärke des menschlichen Geistes, der — und in der That doch meistens auf ziemlich einfache Weise, wenn man nicht bis in die tiefsten Tiefen hinabzusteigen beabsichtigt — Mittel und Wege fand, in die Geheimnisse des Weltalls einzudringen, und bei aller scheinbaren Unregelmässigkeit der sichtbaren Bewegungen der Weltkörper die streng gesetzmässige Ordnung deutlich zu erkennen, welche der grosse Urheber desselben mit so grosser Weisheit darin einführte. Absichtlich kehren wir aber nochmals zu dem Eingange dieser Anzeige zurück, und erkennen wiederholt gern an, dass dieses Werk in Bezug auf die Topographie des Himmels sehr werthvolle Zusammenstellungen enthält, die man in einem anderen ähnlichen Buche schwerlich in gleicher, bis auf die neuesten Zeiten herabreichender Vollständigkeit finden dürfte.

Abriss der praktischen Astronomie, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung von Dr. A. Sawitsch, Professor der Astronomie an der Kaiserichen Universität zu St. Petersburg. Aus dem Russischen übersetzt von Dr. W. C. Götze. Mit mehreren im Originalwerke nicht vorhandenen vom Herrn Verfasser nachgelieferten Zusätzen und Erweiterungen. Erster Band. Hamburg. 1850. 8.

Schriften über praktische Astronomie besitzen wir namentlich im Deutschen, nur wenige. Denn ausser dem älteren Werke von Rössler und dem neueren von Jahn wüsste ich in der deutschen Literatur kein Werk, welches diesem wichtigen Gegenstande ausschliesslich gewidmet wäre, wenn auch freilich in vielen astronomischen Schriften treffliche Anleitungen zu astronomischen Beobachtungen und Rechnungen enthalten sind, vor allen in den Königsberger Beobachtungen, in Bohnenberger's wenn auch älterer, doch immer noch klassischer Anleitung zur geo-

Digitized by Google

graphischen Ortsbestimmung vorzüglich mittelst des Spiegel-Sextanten, in Rümker's Handbuch der Schifffahrtskunde, in den verschiedenen astronomischen Zeitschriften, u. s. w. Aber ein Werk, welches, hauptsächlich in Bezug auf geographische Ortsbestimmung, die neuere Beobachtungskunst in ziemlicher Vollständigkeit lehrte, besitzen wir nicht, und diesem Bedürfnisse hilft, glauben wir, das bis jetzt in seinem ersten Bande uns vorliegende Werk des Herrn Professor Sawitsch in ausgezeichneter Weise ab. Der Herr Verfasser hat sich, ohne Weitschweifigkeit, grosser Deutlichkeit und möglichster Einfachheit in der Darstellung befleissigt, auch eine möglichst geringe Anzahl von Vorkenntnissen vorausgesetzt, indem die Trigonometrie und die leichtesten Lehren der Differentialrechnung zum vollständigen Verständniss dieses Werks fast allein hinreichen, namentlich auch der Gebrauch der analytischen Geometrie bei der Bestimmung der Fehler der Instrumente u. s. w. fast ganz ausgeschlossen worden ist, was wir bei einem Werke von der Tendenz des vorliegenden nur billigen können; die beschriebenen und zu berichtigen gelehrten Instrumente sind fast nur die jetzt mit Recht und zum grossen Nutzen der Wissenschaft so weit und allgemein verbreiteten transportablen Instrumente, von denen auch immer sehr deutliche Abbildungen gegeben worden sind; die Formeln sind nicht etwa, wie in manchen anderen eine praktische Richtung verfolgenden Werken, bloss angegeben, sondern immer mit hinreichender Vollständigkeit vollständig abgeleitet, wodurch natürlich die eigentlich wissenschaftliche Gestalt des Buchs sehr gewonnen hat und dasselbe von dem Herrn Verfasser zu einem wahren Lehrbuche gemacht worden ist, in welchem man selten über einen Gegenstand, in dem auf dem Titel und durch die ganze Tendenz des Buchs vorgezeichneten Kreise, vergebens Rath und Belehrung suchen wird; alle behandelten Aufgaben sind durch numerische Beispiele deutlich erläutert; übrigens trägt das Werk ganz den Stempel der Eigenthümlichkeit, und Herr Professor Sawitsch hat auch manche ganz neue Methoden beigefügt, wie man, um nur Eines zu erwähnen, z. B. aus dem Anhange zum dritten Abschnitte: „über eine etwas veränderte Anwendung der Bessel'schen Methode zur Bestimmung der Polhöhe durch das Durchgangs-Instrument, nebst einem Beispiele" sehen kann. Kurz wir sind der Meinung, dass Herr Professor Sawitsch durch Herausgabe dieses in vielen Beziehungen ausgezeichneten Werks namentlich um alle die, welche aus Neigung oder Beruf geographische Ortsbestimmungen zu machen sich anschicken wollen, ein wahres Verdienst erworben hat, und danken ihm in deren Namen hier aufrichtigst dafür. Gleichen Dank verdient aber auch der Herr Uebersetzer für die Verpflanzung dieses Werks auf deutschen Boden, weil dasselbe sonst gewiss vielen deutschen Beobachtern ganz unbekannt geblieben sein würde. Da wir der russischen Sprache ganz unkundig sind, und auch das Originalwerk nicht vor uns liegen haben, so können wir freilich ein eigentliches Urtheil über die Uebersetzung nicht aussprechen; aber so viel können wir aus vollkommenster Ueberzeugung versichern, dass dieselbe sich ganz wie ein Originalwerk lies't, und fügen daher nur noch hinzu, dass auch Herr Professor Sawitsch selbst die Uebersetzung genau durchgegangen und laut der Vorrede über dieselbe das

Urtheil gefällt hat: „dass überall der Sinn des Russischen Originales treu und scharf wiedergegeben sei“ was ja bei der Uebersetzung eines mathematischen Werkes eigentlich Alles ist, was man verlangen kann. Ausserdem hat die Uebersetzung durch manche Zusätze des Herrn Verfassers wirkliche Vorzüge vor dem Originale. Bei einem Werke wie das vorliegende, halten wir uns zu einer etwas genaueren, als dies sonst in diesen literarischen Berichten zu geschehen pflegt, Angabe seines Inhaltes verpflichtet, die wir im Folgenden uns zu geben erlauben:

S. 1. *Einleitung.* Diese 73 Seiten starke Einleitung enthält aus der theoretischen Astronomie alles dasjenige, was zum Verständniss der verschiedenen praktischen Operationen nothwendig ist, also die wichtigsten allgemeinen astronomischen Begriffe; die Lehre von der Zeit; die Lehre von den Constanten, welche bei der Reduction des scheinbaren Orts eines Gestirns auf seinen mittlern Ort angewandt werden; die Lehre von der astronomischen Strahlenbrechung, von der Parallaxe, die Theorie des astronomischen Fernrohrs, die Theorie des Niveaus, immer mit bestimmter Rücksicht auf das Praktische, worunter auch selbst geübte praktische Astronomen manches für sie Lehrreiche finden werden. — S. 74. *Erster Abschnitt.* Beschreibung und Gebrauch der Instrumente. Die in diesem Abschnitte beschriebenen und in jeder Beziehung vollständig theoretisch behandelten Instrumente sind das Durchgangs-Instrument, der astronomische Theodolit und das Universal-Instrument. Die Theorie dieser Instrumente ist so vollständig gegeben, dass kein Umstand, den die neuere Beobachtungskunst zu berücksichtigen für nöthig gefunden hat, unberücksichtigt geblieben ist. Ausserdem enthält dieser Abschnitt sehr schöne Belehrungen über die Fehler der Gradtheilungen der Instrumente und den Gebrauch und die Behandlung der astronomischen Uhren. — S. 243. *Zweiter Abschnitt.* Bestimmung der Breite und der Zeit durch die Messung von Zenithdistanzen. Bestimmung der Breite aus Circummeridian-Höhen. Bestimmung der Breite durch den Polarstern. Zeitbestimmung aus Zenithdistanzen. Zeit- und Breitenbestimmung, wenn beide unbekannt sind. Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen. Ausserdem enthält dieser Abschnitt noch viele höchst lehrreiche und, wenn durch die Beobachtungen möglichst genaue Resultate erzielt werden sollen, höchst wichtige allgemeine Betrachtungen. — *Dritter Abschnitt.* Zeit- und Breiten-Bestimmung mittelst des Durchgangs-Instruments. Allgemeine Theorie des Durchgangs-Instruments. Zeit-Bestimmung durch Beobachtungen am Durchgangs-Instrumente: 1. Wenn das Instrument im Meridian aufgestellt ist. 2. Im Vertikale des Polarsterns. Allgemeine Bemerkungen über die verschiedenen Methoden zur Zeitbestimmung. Bessel'sche Methode die Polhöhe durch das Durchgangs-Instrument zu bestimmen. Praktische dabei zu befolgende Regeln und Beispiele. Anhang zur Bessel'schen Methode vom Verfasser mit einem Beispiele. *Vierter Abschnitt.* Von der Bestimmung des Azimuths eines gegebenen irdischen Gegenstandes. Be-

Digitized by Google

stimmung der Zeit und des Azimuths aus den gemessenen Azimuth-Unterschieden von Gestirnen. Ueber den Einfluss der täglichen Aberration auf die verschiedenen Polar-Coordinaten der Gestirne.

Wir sehen dem Erscheinen des zweiten Theils dieses Werks, welcher u. A. auch die Gauss'sche Methode zur Berechnung der Sonnenfinsternisse enthalten wird, mit grossem Verlangen entgegen, und werden dann sogleich über denselben Bericht erstatten. Mögen die Leser des Archivs die grössere Ausführlichkeit der vorhergehenden Anzeige, als sonst in diesen literarischen Berichten gewöhnlich ist, mit der Wichtigkeit des vorliegenden, reiche Belehrung gewährenden Werks, durch dessen Herausgabe der geehrte Herr Verfasser sich jedenfalls ein grosses Verdienst erworben hat, und das gewiss wesentlich dazu beitragen wird, dass wir bald noch mehr genaue geographische Ortsbestimmungen erhalten werden, als dies bis jetzt schon der Fall ist, entschuldigen. Wir haben es zugleich für unsere Pflicht gehalten, durch die obige ausführlichere Anzeige zu einer möglichst baldigen weiten Verbreitung und Bekanntwerdung dieses verdienstlichen Werks das Unsrige nach Kräften beizutragen.

Nautik.

Handbuch der Schiffahrts-Kunde mit einer Sammlung von Seemanns-Tafeln, zwei Seekarten, zwei Sternkarten und einer magnetischen Karte. Im Auftrage der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse verfasst von C. Rümker, Director der Sternwarte und Navigations-Schule zu Hamburg u. s. w. Fünfte mit stereotypirten Tafeln versehene Auflage. Hamburg. 1850. 8.

Wir freuen uns ungemein, das von uns im Literarischen Ber. Nr. XXII. S. 340. über die im Jahre 1844 erschienene vierte Auflage dieses ausgezeichneten Handbuchs ausgesprochene vortheilhafte Urtheil durch das so baldige Erscheinen der vorliegenden fünften Auflage so vollkommen bestätigt zu sehen. Zugleich ist uns das so baldige Erscheinen dieser neuen Auflage ein sehr erfreulicher Beweis, dass die wissenschaftliche Beschäftigung mit den nautischen Wissenschaften immer mehr Theilnahme findet und an Verbreitung gewinnt. Natürlich gilt von dieser neuen Auflage alles das, was wir a. a. O. über die vierte Auflage gesagt haben, und wir wüssten jener Anzeige in

Digitized by Google

der That jetzt nichts weiter hinzuzufügen, als die folgende kurze Anzeige der Verbesserungen und Vermehrungen der fünften Auflage. Seite 293—296 sind die zahlreichen auf Hamburger Schiffen angestellten magnetischen Beobachtungen aufgenommen worden, und der Herr Vf. findet in diesen Beobachtungen den Beweis, dass sein in der Vorrede zur vierten Auflage ausgesprochener Wunsch, ein Observations-Buch auf Schiffen eingeführt zu sehen, wenigstens theilweise in Erfüllung gegangen sei. Unter den Verbesserungen weiset der Herr Vf. vorzugsweise auf den S. 258. von ihm gemachten Vorschlag hin, statt der wahren Distanz, die wahre Rectascension des Monds aus der beobachteten Distanz zu berechnen, weil, abgesehen von der dadurch in der Ephemeride ersparten Seitenzahl, die Veränderung der schon von Stunde zu Stunde im Nautical Almanac angegebenen Rectascension des Mondes der Zeit-Aenderung mehr proportional ist, als es die der kleinen Distanzen des Mondes von ausserhalb seiner Bahn gelegenen Fixsternen sind. Dass die nautischen Tafeln ihrem grösseren Theile nach stereotypirt worden sind, ist gewiss auch ein Vorzug der neuen Ausgabe vor der älteren.

Möge dieses verdienstliche Buch fortfahren, gründliche nautische Kenntnisse so allgemein wie möglich unter dem betreffenden Publikum zu verbreiten.

Berichtigung.

In dem vorhergehenden Literarischen Berichte Nr. LVIII. müssen die Seitenzahlen 286, 287, 288, u. s. w. 292 heissen: 786, 787, 788, u. s. w. 792, was man gefälligst zu verbessern bittet.

LX.

Literarischer Bericht.

Geometrie.

Grenz-Bestimmungen bei Vergleichungen von Kreisen, welche von demselben Dreieck abhängig sind, sowohl unter sich als auch mit dem Dreieck selbst von Dr. D. E. L. Lehmus, Professor der Mathematik an der Königl. Artillerie- und Ingenieurschule u. s. w. zu Berlin. Leipzig. 1851. 8°. 10 Sgr.

Dieses Schriftchen enthält acht Aufgaben, die wir angehenden Mathematikern zur Uebung empfehlen. Wir wollen, um diese Aufgaben im Allgemeinen einigermassen zu charakterisiren, die erste und die siebente angeben, indem wir bemerken, dass α, β, γ die Winkel des Dreiecks bezeichnen, wobei die α gegenüberstehende Seite stets als Längeneinheit angenommen ist. Wegen der übrigen Aufgaben erlauben wir uns die Leser auf das empfehlungswerthe Schriftchen selbst zu verweisen. *Erste Aufgabe.* Der Inhalt des um ein Dreieck beschriebenen Kreises soll sich zu dem in dasselbe eingeschriebenen Kreise wie $n^2:1$ verhalten. Zu bestimmen: I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und n. II. Die Grenzen für n. III. Die Relation zwischen α und n, wenn $\gamma=90^0$ sein soll. IV. Die Gleichung zwischen γ und n für's gleichschenklige Dreieck, also für $\alpha=\beta$. V. Die Abhängigkeit der Werthe von α und n von einander, wenn überhaupt entsprechende Dreiecke existiren sollen.

VI. Numerische Beispiele. — *Siebente Aufgabe.* Die Summe der Flächenräume der vier die Seiten desselben Dreiecks tangentirenden Kreise und der des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises soll einer gegebenen Zahl $p=m\pi$ gleich werden. Zu bestimmen: I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und m. II. Die Grenzen für m. III. Die Vergleichung zwischen α und m, wenn $\gamma=90^0$ sein soll. IV. Die Vergleichung zwischen γ und m, wenn $\alpha=\beta$ werden soll. V. Für welche Relation zwischen α und m überhaupt aus I. einem Dreieck entsprechende Werthe für β sich ergeben können. VI. Numerische Beispiele. — Man sieht schon aus diesen beiden Aufgaben, dass diese kleine Schrift, wenn auch im Ganzen nur acht Aufgaben, doch, wenn dieselben, wie es in der Schrift selbst sehr zweckmässig geschehen ist, weiter zergliedert werden, einen ziemlich reichen Stoff von Uebungen darbietet. Es macht uns Freude, aus dieser Schrift zu sehen, dass der geehrte hochbejahrte Herr Verfasser immer noch rüstig fortfährt, ausser durch mündlichen Unterricht, auch durch Schriften den Lernenden sich nützlich zu machen.

Nautik.

Cours complet à l'usage des officiers de la marine marchande, par Levret ainé, Professeur d'Hydrographie de première classe au Havre. Première Partie. Arithmétique. Paris. 1849. 8. — Deuxième Partie. Géométrie. Paris. 1850. 8. — Troisième Partie. Navigation. Paris. 1850. 8. Alle drei Theile 4 Thlr. 10 Sgr.

Die beiden ersten Theile dieses Werks enthalten die gewöhnlichen Elemente der Arithmetik, der ebenen Geometrie, der Stereometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie, ohne dass dabei auf die besondere Anwendung dieser Wissenschaften in der Nautik irgend Rücksicht genommen worden wäre, was doch namentlich z. B. in der Stereometrie hätte hin und wieder der Fall sein können, in Bezug auf näherungsweise Inhaltsberechnungen u. dergl. Der dritte Theil enthält die „Navigation“ wie die Franzosen sagen, d. h. die Steuermannskunde (Pilotage). Die erste Abtheilung enthält einen „Précis de Physique“, worin wir in ziemlich bunter Weise das Parallelogramm der Kräfte, die allgemeine Attraction, die Centrifugalkraft, das Princip des Archimedes, das Barometer, die Pumpen, etwas von der Wärme mit Einschluss des Thermometers, die Magnetnadel, die Gesetze der Reflexion und Refraction, die astronomische Strah-

Digitized by Google

lenbrechung, und in Verbindung mit dem Vorhergehenden die nautischen Instrumente (Sextant, Spiegelkreis, Vernier, Compass) und die Dampfmaschine finden. Aber über die für den Seemann so wichtigen Elemente der Statik, über den Schwerpunkt, über die einfachen Maschinen u. s. w. kommt in diesem „Précis de Physique“ gar nichts vor, was gewiss nicht gebilligt werden kann, wenn der Verfasser einmal die Grundlehren der Physik in sein Werk aufnehmen wollte, wovon wir uns Gelegenheit zu nehmen erlauben, das in höchst eleganter ganz elementarer Weise verfasste Werkchen des berühmten Monge: „Traité élémentaire de Statique à l'usage des écoles de la marine par Gaspard Monge. Cinquième édition. Revue par M. Hachette. Paris 1810. 8. hier wieder in Erinnerung zu bringen, da es zu unserm grössten Bedauern fast vergessen zu sein scheint. Auf den „Précis de Physique“ folgt ein „Précis d'Astronomie“ der uns auch nicht mehr als der „Précis de Physique“ befriedigt hat, und dann kommt auf pag. 92. bis pag. 232. die eigentliche „Navigation“ oder „Astronomie nautique“. Wir glauben uns einer ausführlichen Inhaltsanzeige dieser Abtheilung enthalten und mit der allgemeinen Bemerkung begnügen zu können, dass in derselben die gewöhnlichen Lehren der Steuermannskunde in einer ziemlich guten Ordnung und in deutlicher und einfacher Darstellung enthalten und überall durch zweckmässige Beispiele erläutert worden sind, so dass wir diese Abtheilung dem Seemanne, der nichts Neues, sondern bloss das Gewöhnlichste seiner Wissenschaft und Kunst sucht, wohl empfehlen können, bemerken jedoch, dass über die Aufnahme von Küsten u. dergl. gar nichts in diesem Werke enthalten ist. Der im Literar. Ber. Nr. LI. S. 708. kurz angezeigte Traité élémentaire de navigation à l'usage des officiers de la marine militaire et de la marine du commerce par V. Caillet. T. I. II. Brest. 1848. 1846. 8. enthält alles dem Seemann zu wissen Nöthige weit vollständiger und in wissenschaftlicherer Darstellung als das vorliegende Werk, und wir erkennen dessen Vorzüge vor manchen anderen, namentlich französischen Werken desto mehr, je mehr und je länger wir uns desselben bei eigenen Studien bedienen, weshalb wir die Liebhaber der Nautik hier nochmals auf denselben uns aufmerksam zu machen erlauben, weil wir insbesondere a. a. O. uns nur mit einer ganz kurzen Anzeige begnügen mussten.

Digitized by Google

Preisaufgabe

der Königlich-Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Kopenhagen

für 1851.

Commentatione doctissima de eclipsibus, quam anno 1842 edidit Besselius*), autor celeberrimus ostendit, aequationem calculo horum phaenomenum aptissimam obtineri, si memineris, contactum apparentem duorum corporum coelestium inaequaliter a terra distantium necessario requirere, ut oculus observatoris in puncto aliquo superficiei conicae situs sit, ambo corpora involventis, eodemque opere problemata diversa ad theoriam eclipsium pertinentia copiose tractavit, sed ita tamen, ut contactus interiores solis et lunae nec non eclipses solis, quae efficiuntur planetis inferioribus, modo generaliter attigerit, et brevitatis causa nonnulla praeterierit, quae calculo horum phaenomenum contractionem haud spernendam afferre posse videantur. Quod cum ita sit, desideratur:

> ut auxilio aequationis, quam opere commemorato exhibuit Besselius, eruantur formulae computationi eclipsium annularium nec non transituum planetarum inferiorum per discum solarem idoneae, et illustretur usus formularum inventarum exemplis apte electis.

Commentationes notandae erunt non nomine scriptoris, sed tessera aliqua, adjiciendaque charta obsignata eadem tessera notata, quae scriptoris nomen ordinem domiciliumque indicet.

Commentationes intra exitum mensis Augusti 1851 Christiano Oersted, qui Societati ab epistolis est, transmissae esse debebunt.

---

*) Astronomische Untersuchungen von F. W. Bessel. Zweiter Band. Königsberg. 1842. 4°. (Nr. X. Analyse der Finsternisse.) G.

Kann deutsch verfasst werden.

Preis 50 Ducaten.

Digitized by Google

Fig. 1.

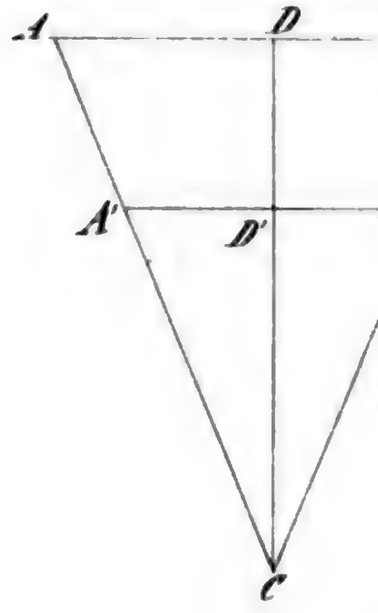
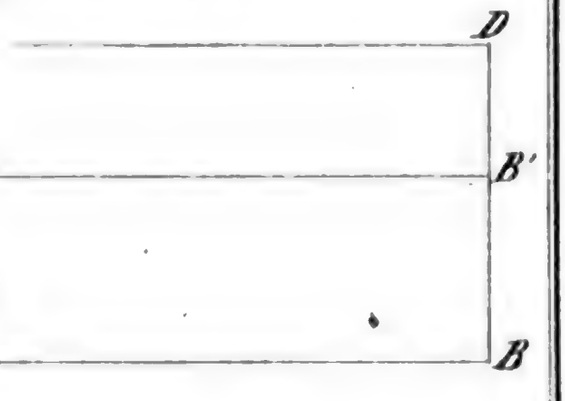


Fig. 3.



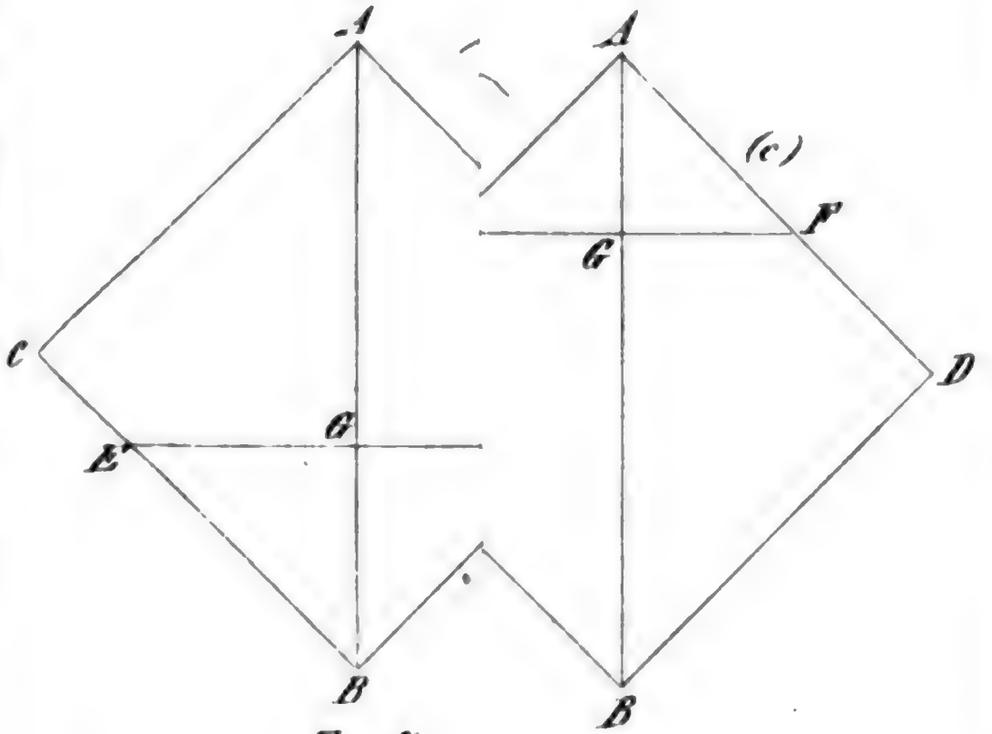
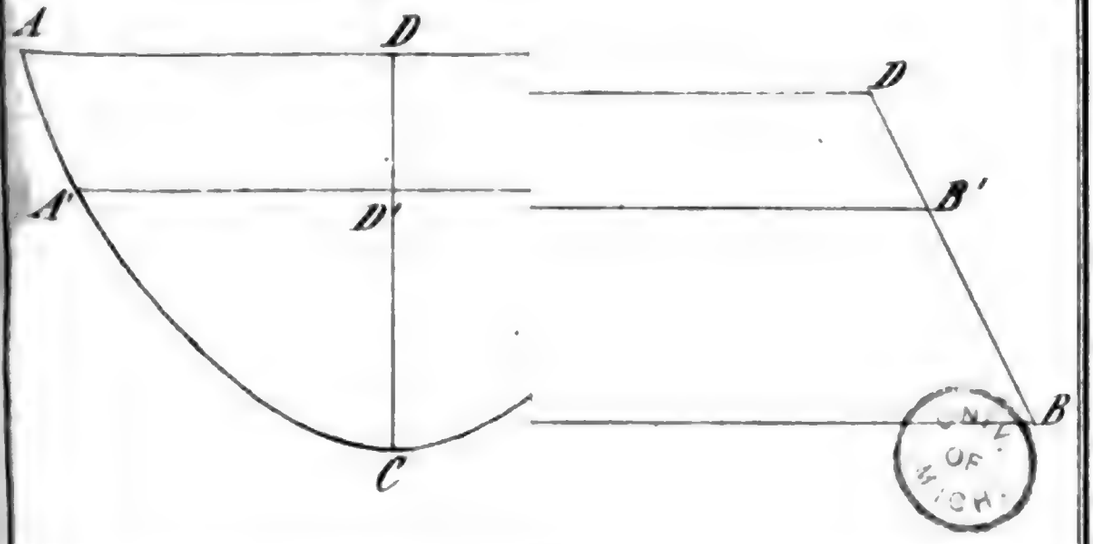
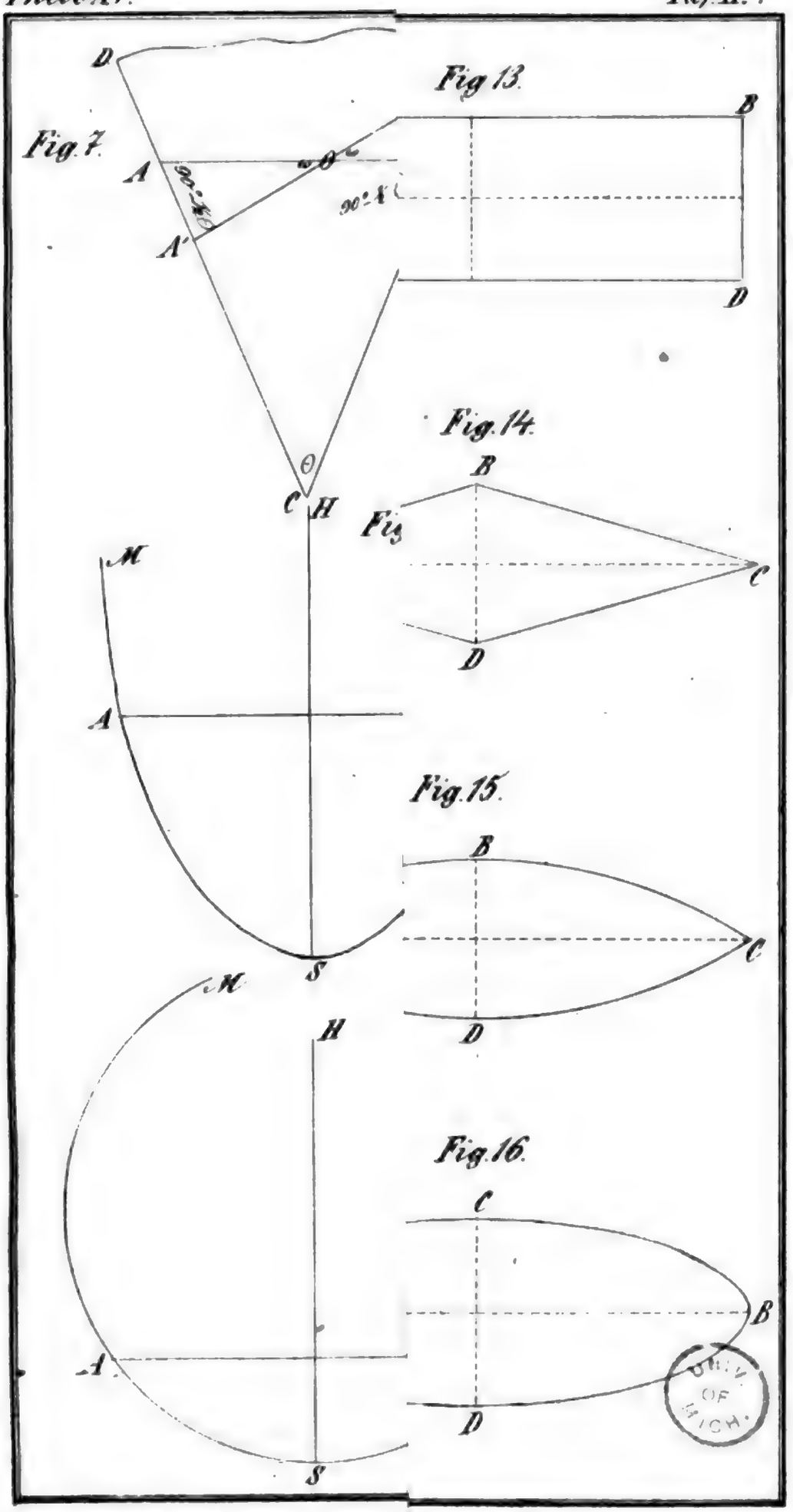


Fig. 5.

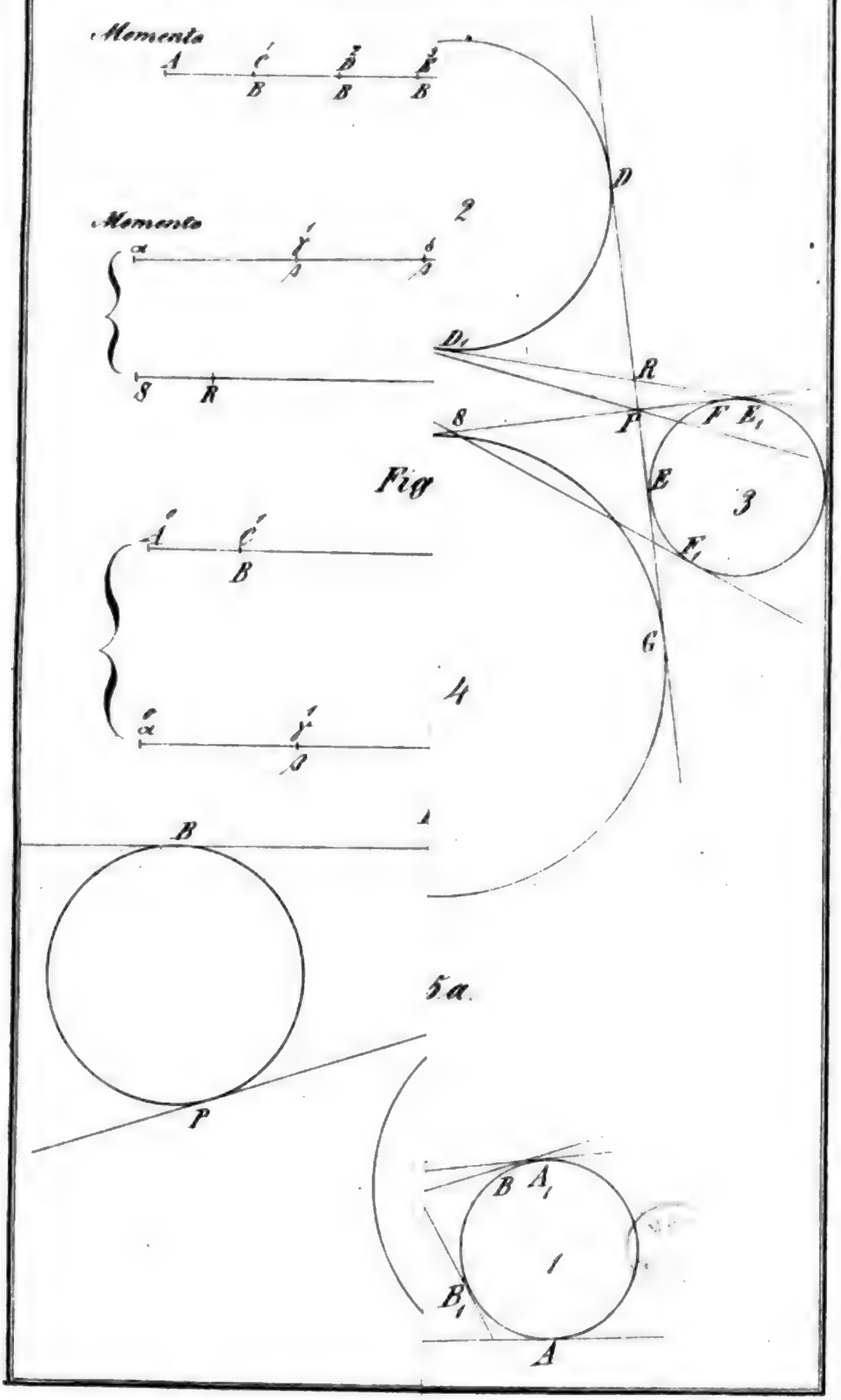


UNIV. OF MICH.

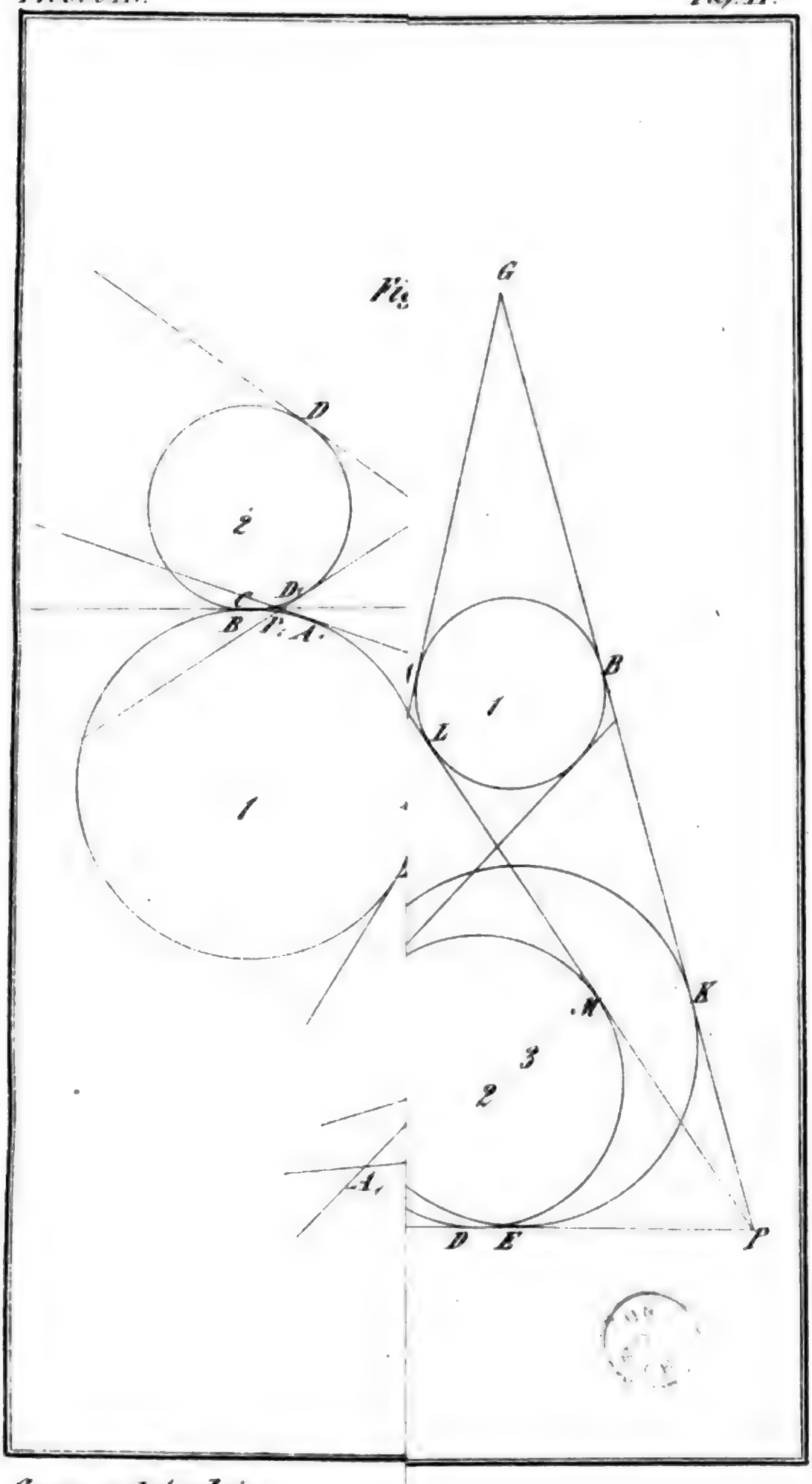


Gruner. Archiv.

Digitized by Google



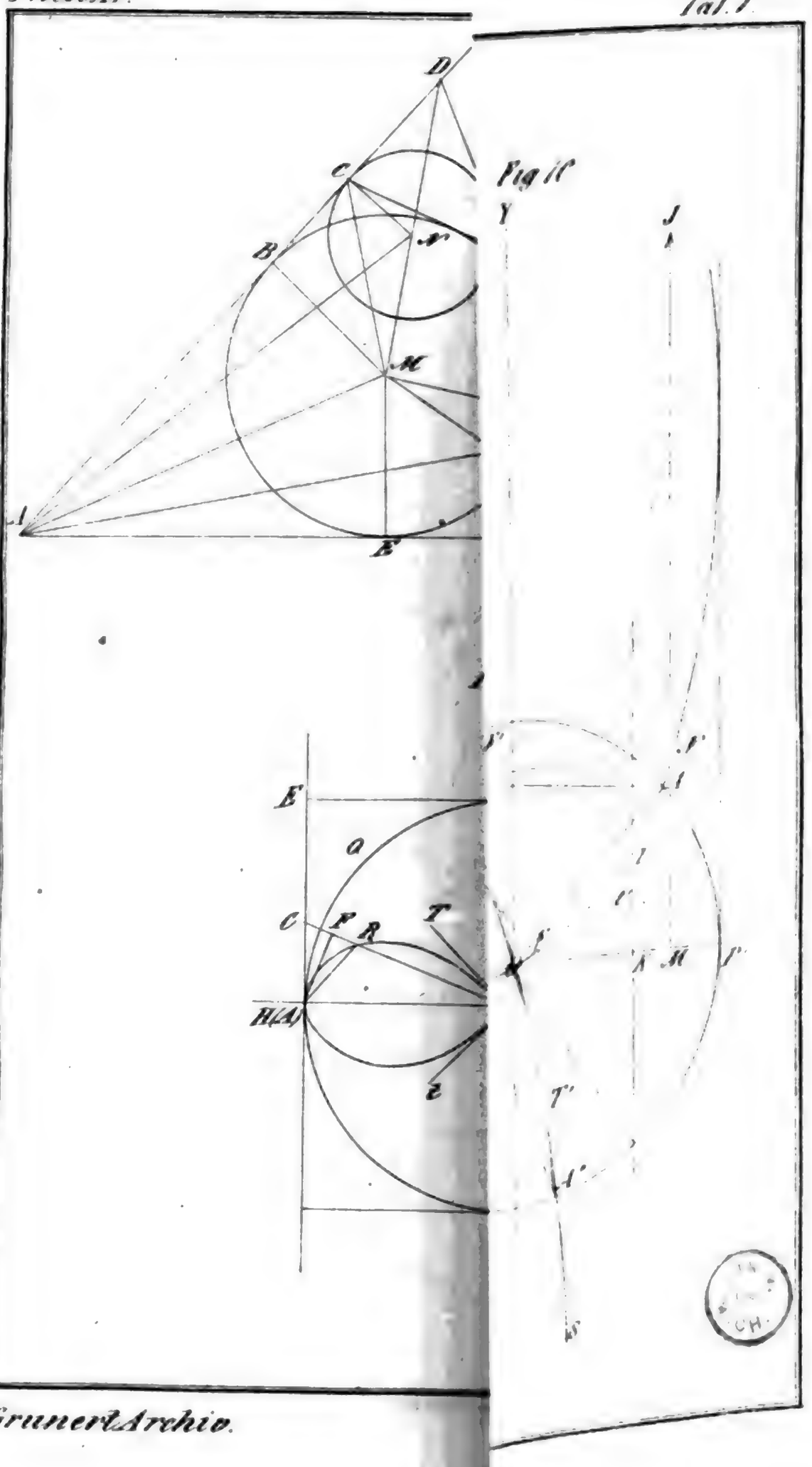
Grunert Archiv.



Grunert Archiv.

Digitized by Google

Digitized by Google


D
C
B
M
A
E
Fig II
Y
J
E
Q
C
F
R
T
H(A)
Z
T'
S

Digitized by Google

Fig

Fig. 2.

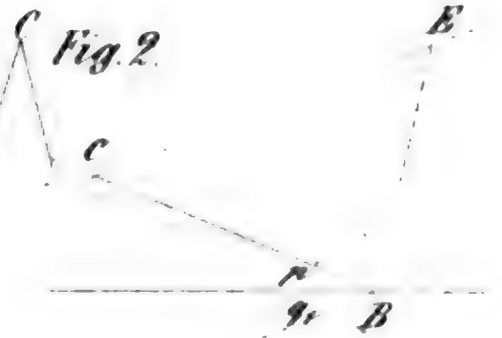
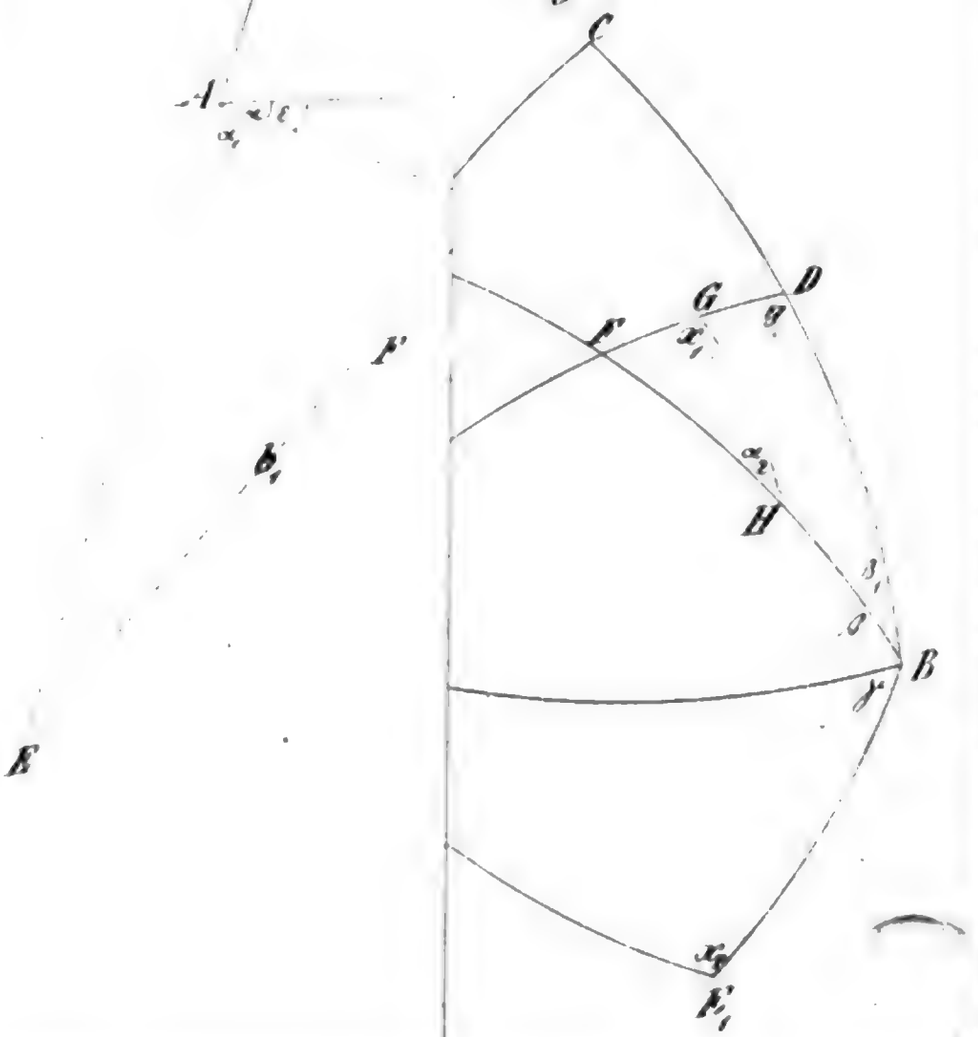


Fig. 4.



F. Fig. 2.

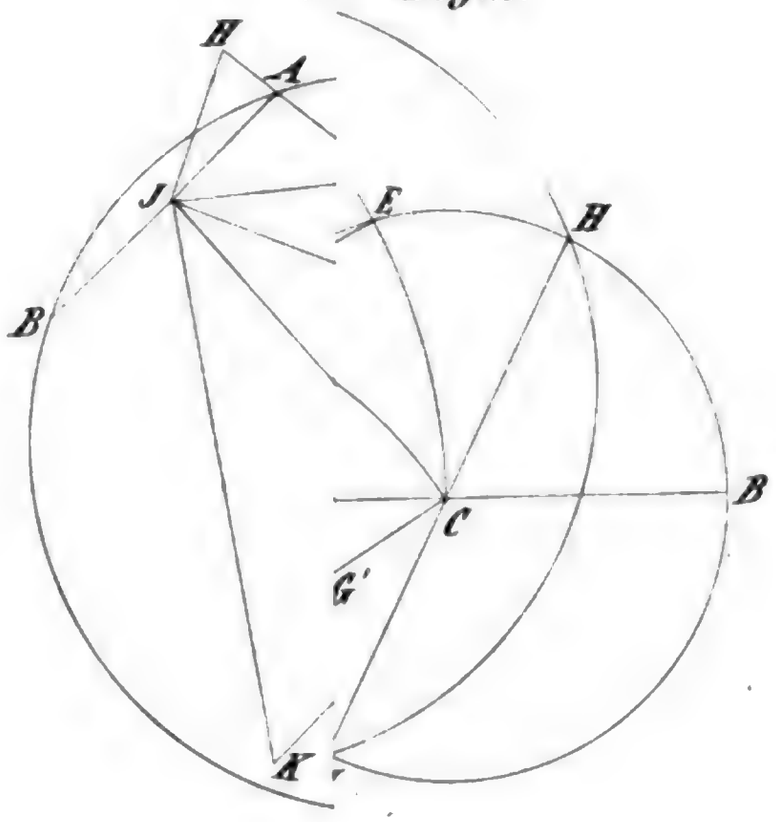


Fig. 3.

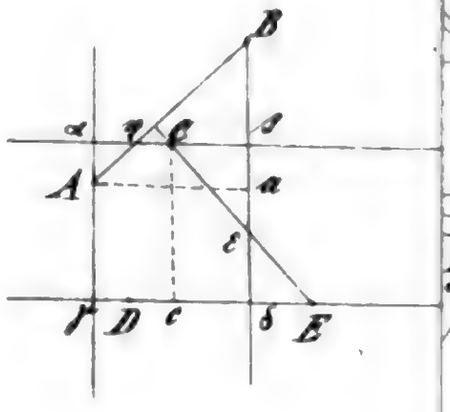
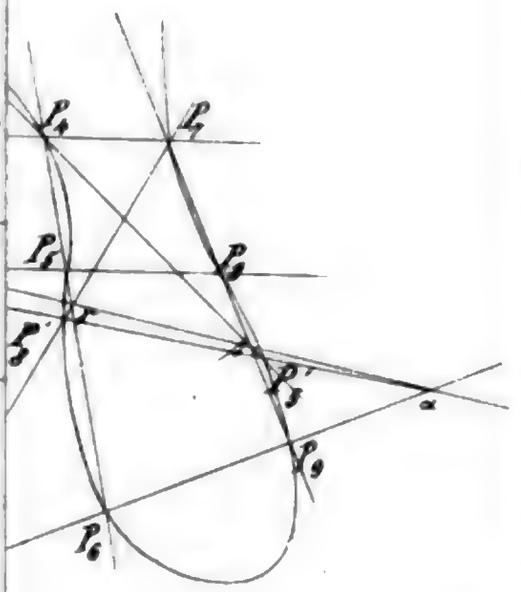
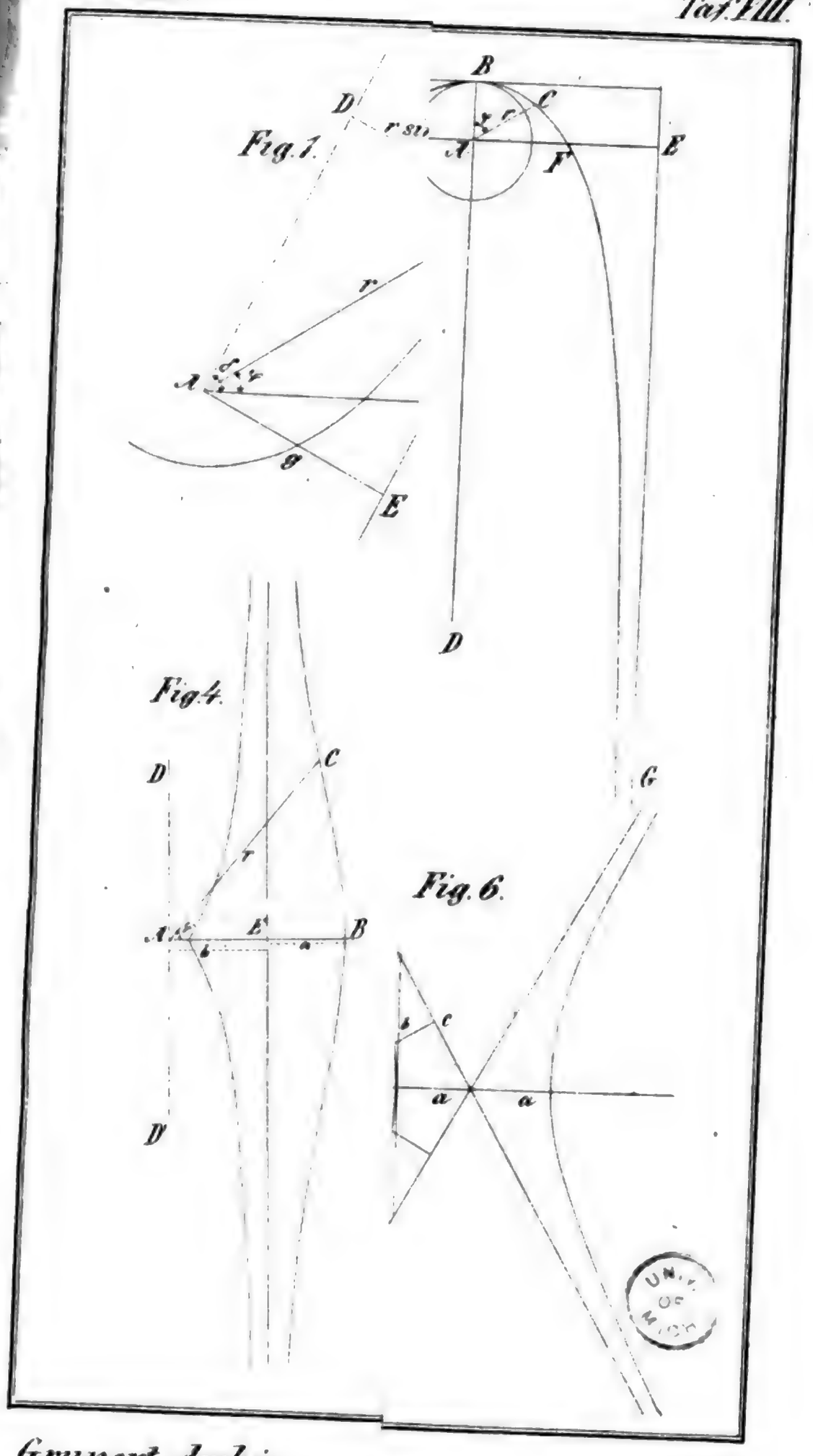


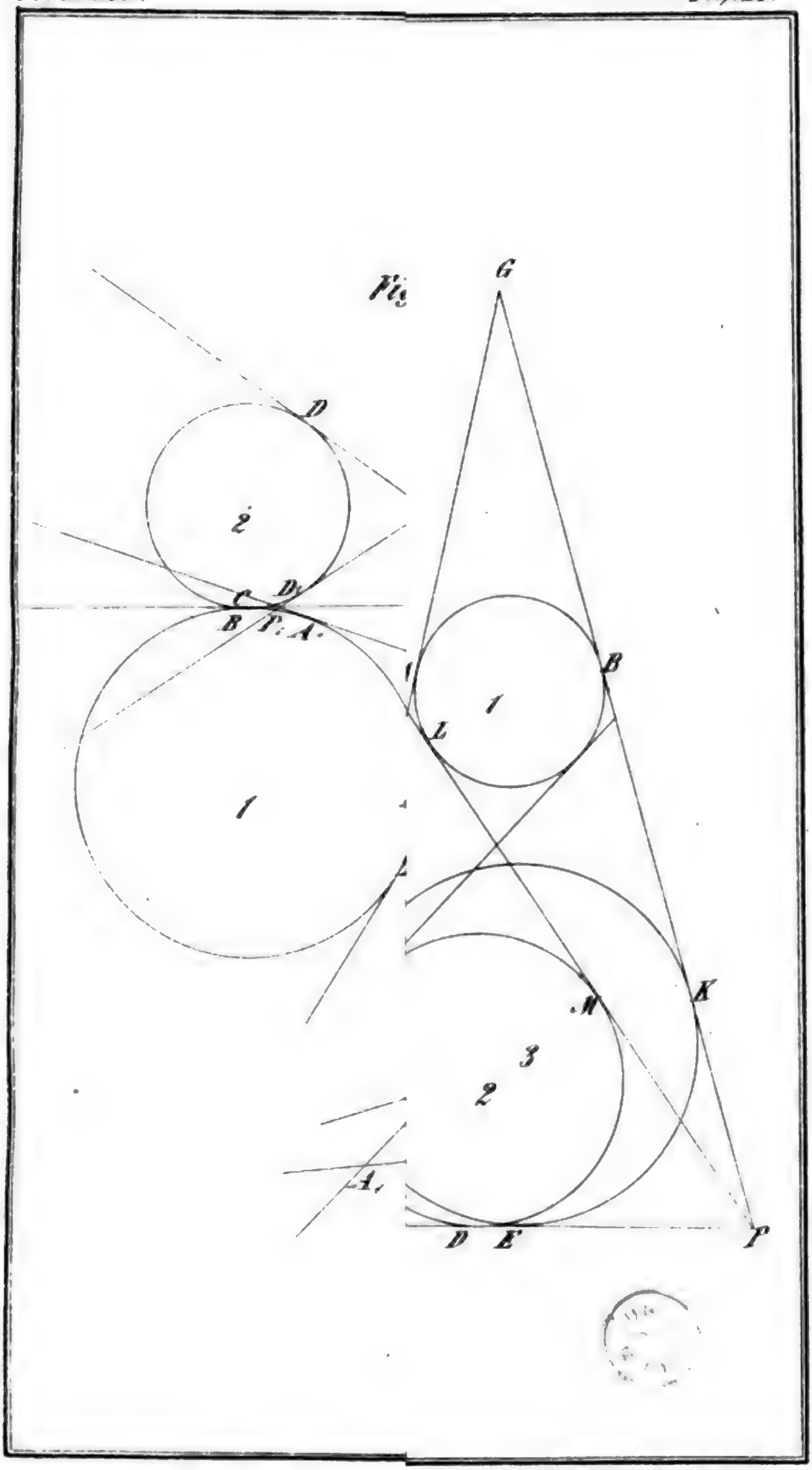
Fig. 5.



Digitized by Go



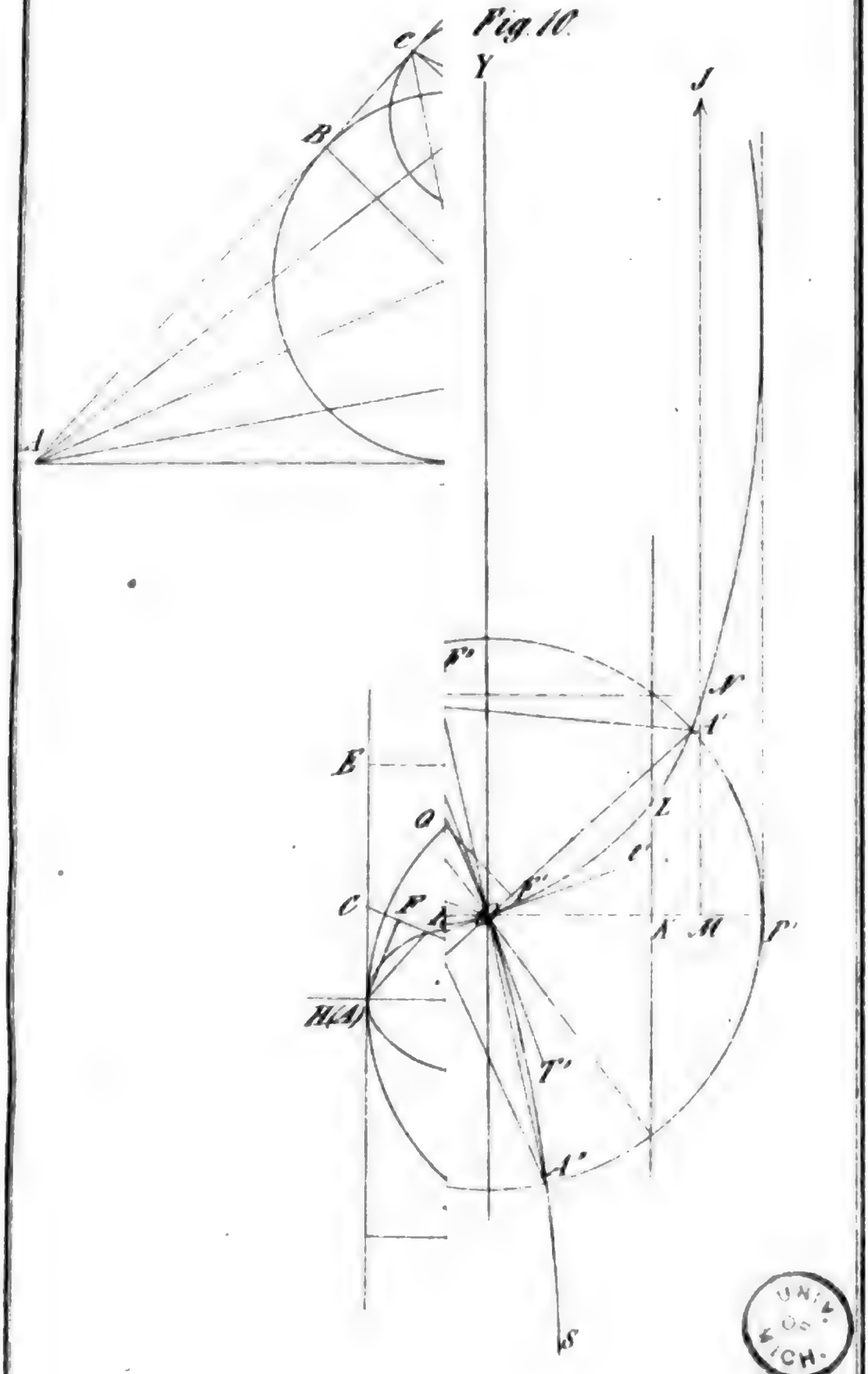
UNIV. OF MICH.



Grunert Archiv.

Digitized by Google

Fig. 10.

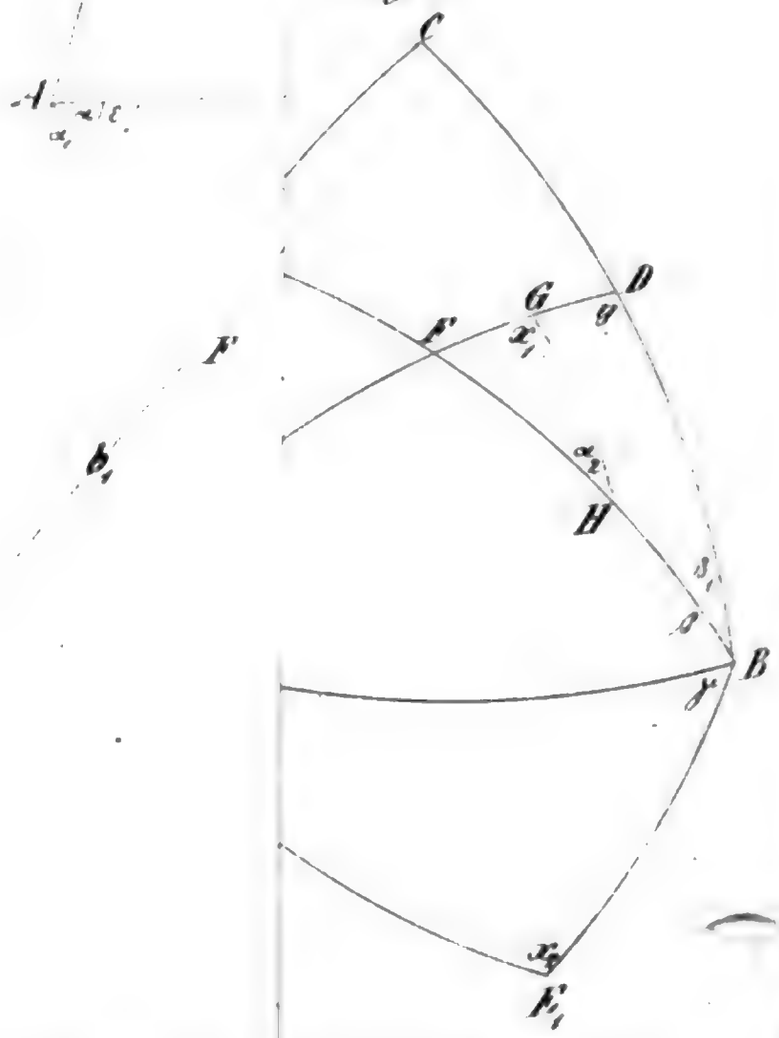


UNIV. OF MICH.

Fig

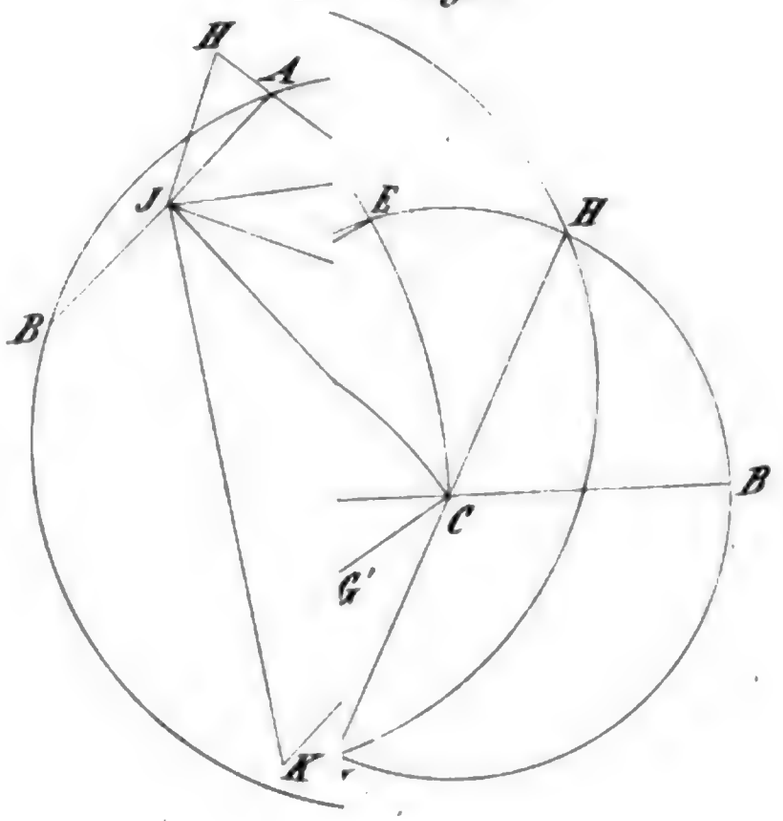
Fig. 2.

Fig. 4.



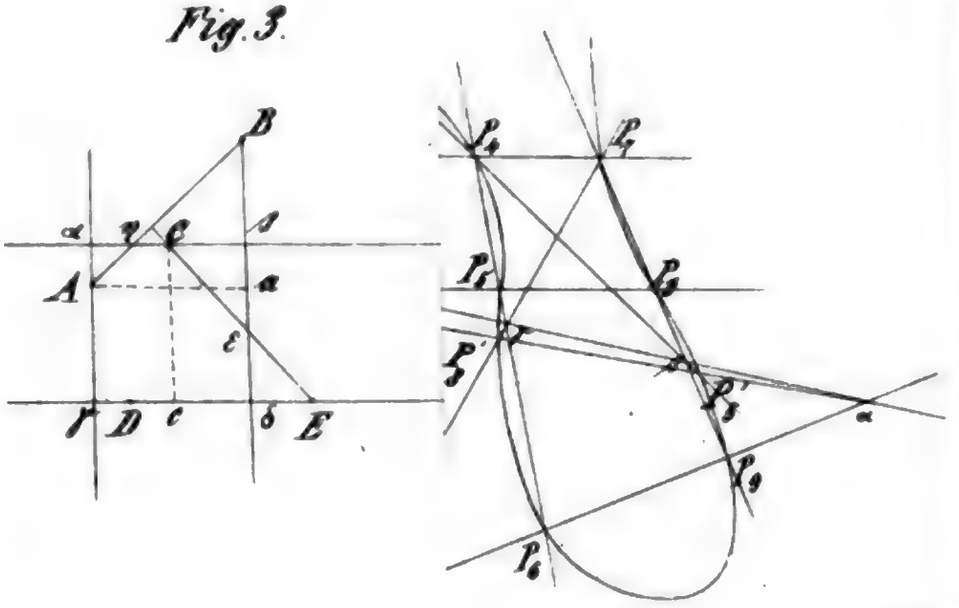
Digitized by Google

F. Fig. 2.



g. 5.

Fig. 3.



Digitized by Google

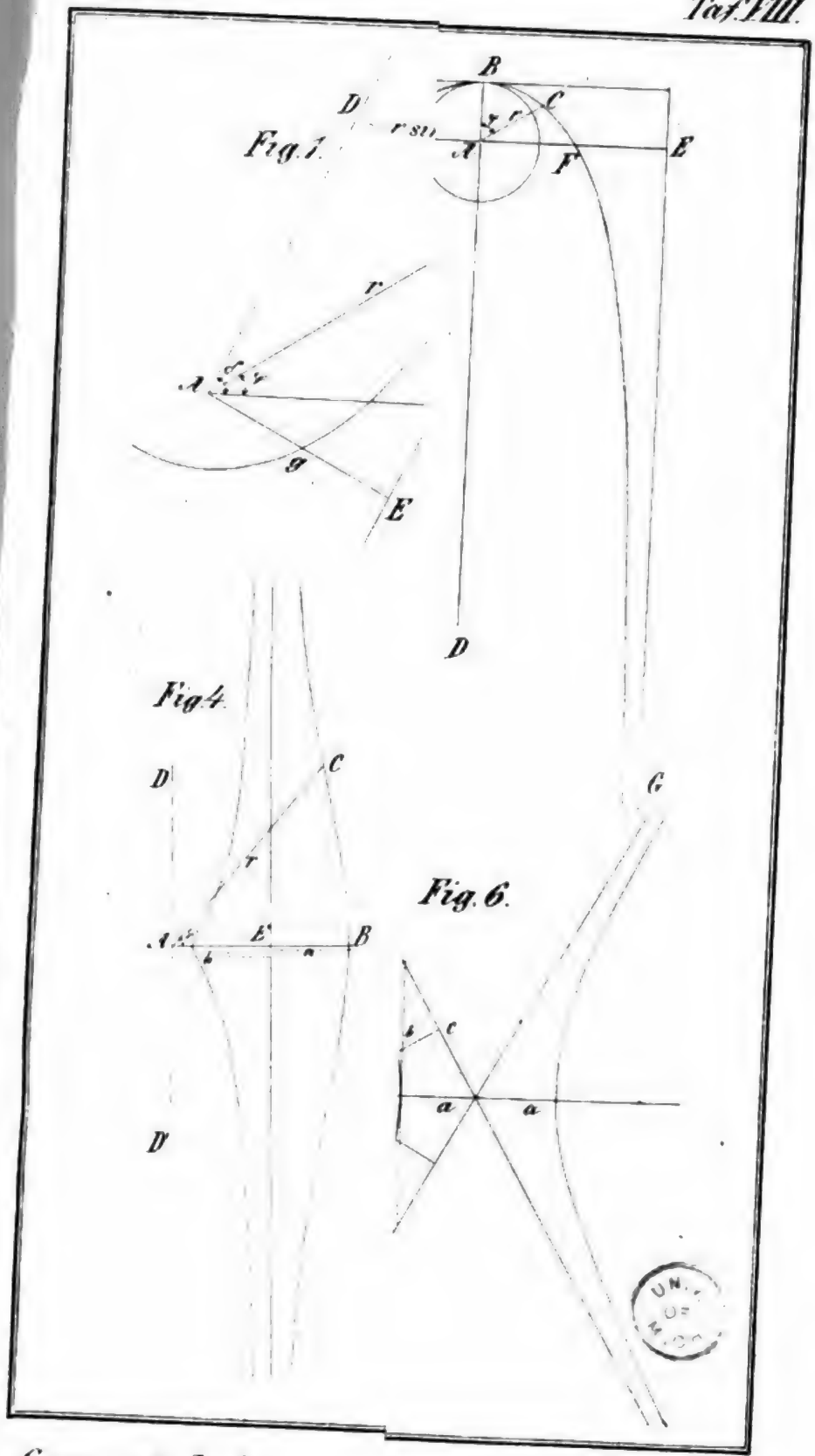


Fig. 1.
B
D
C
A
F
E
r
D
Fig. 4.
D
C
r
G
Fig. 6.
A
E
B
a
a
D

Digitized by Goo

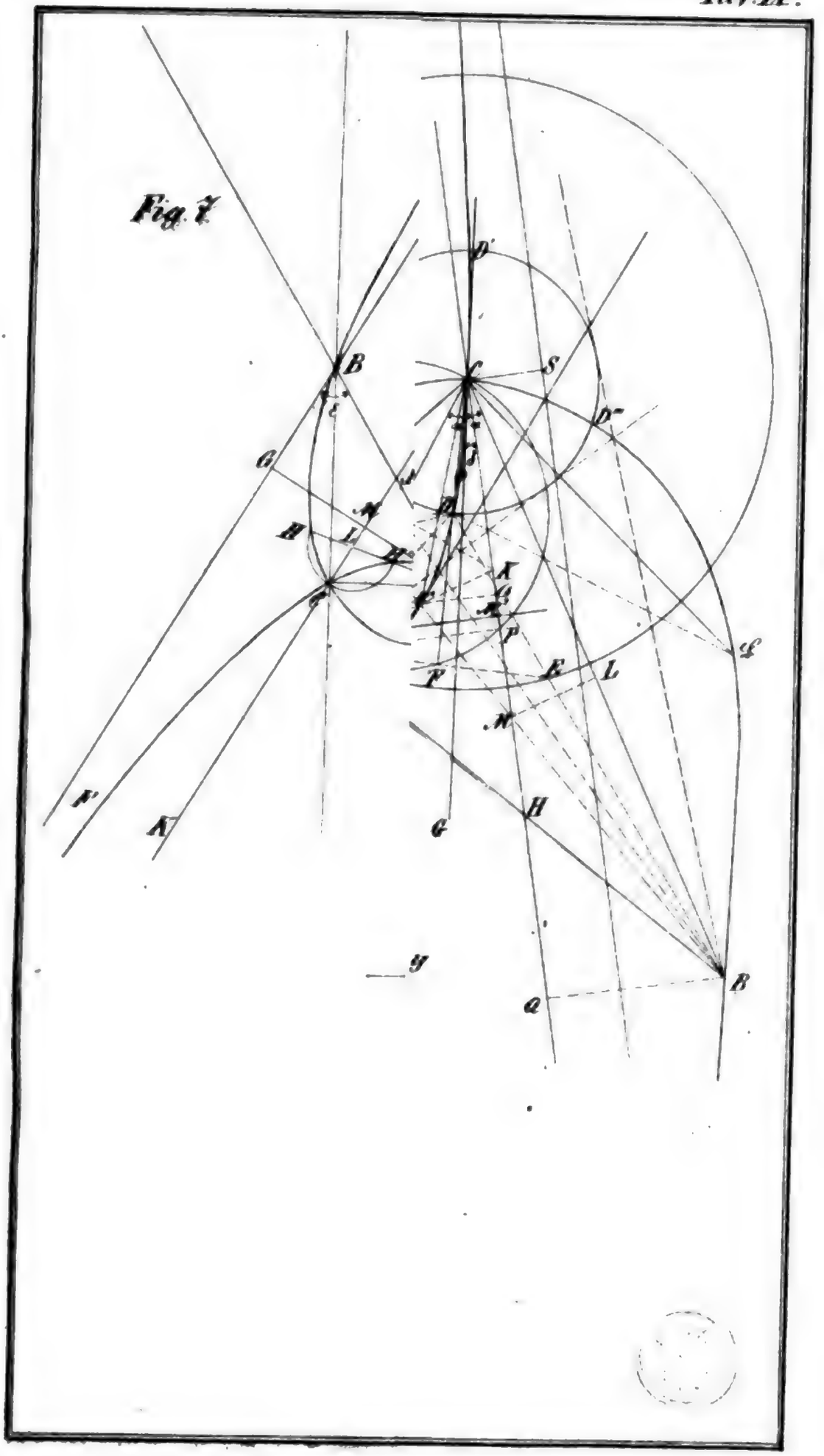


Fig. 1.
B
C
S
D
G
H
L
E
F
K
P
Q
N
M
A
y
B
Q

Digitized by Goo

Zu Fig. 2.

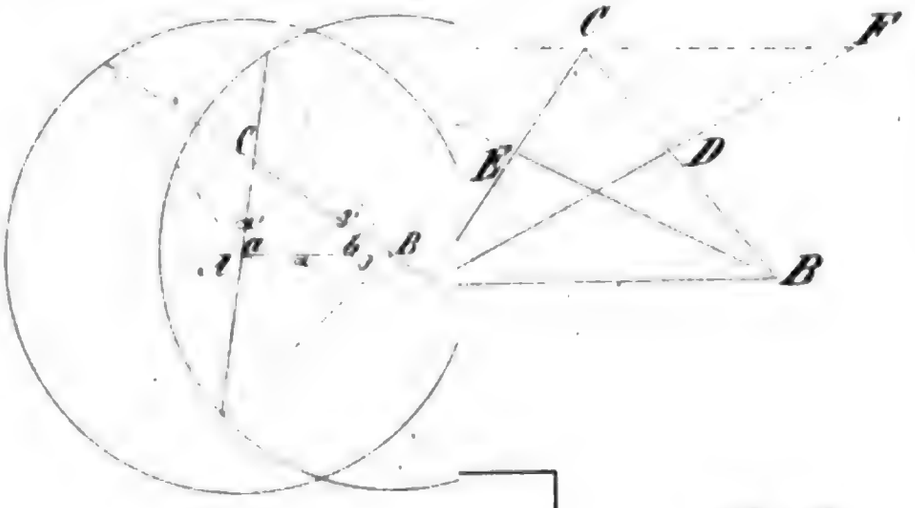
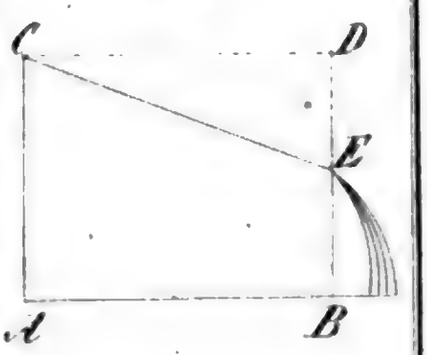


Fig. 3.



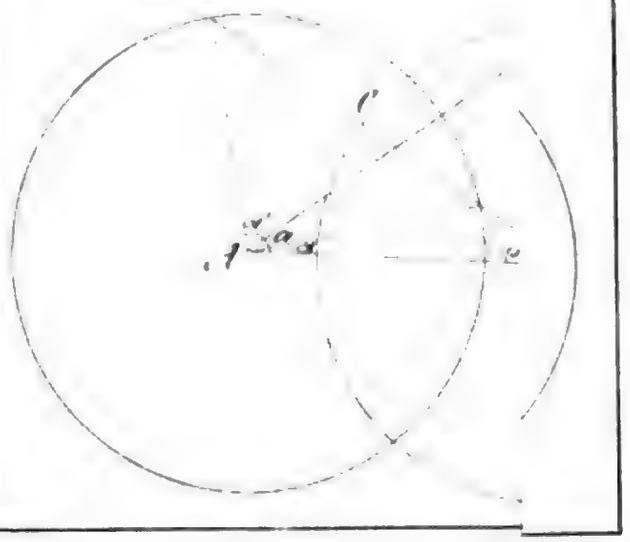


Fig. 4.

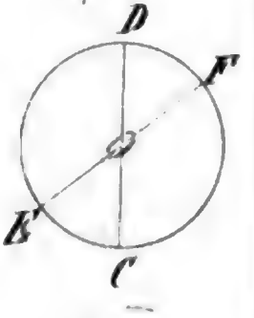
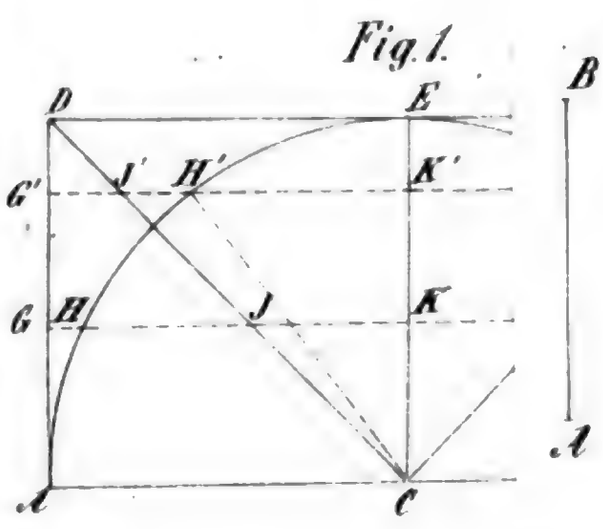


Fig. 1.



Digitized by

Fig 1

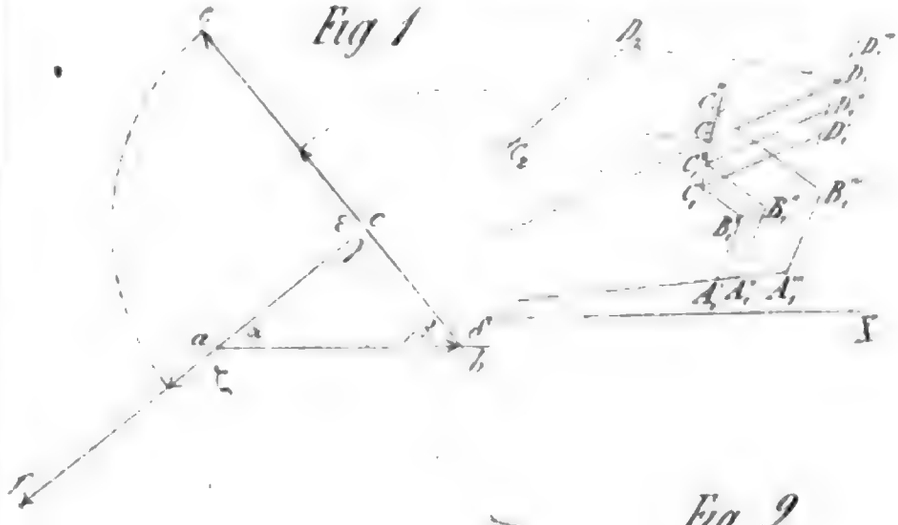


Fig 9

Fig 4

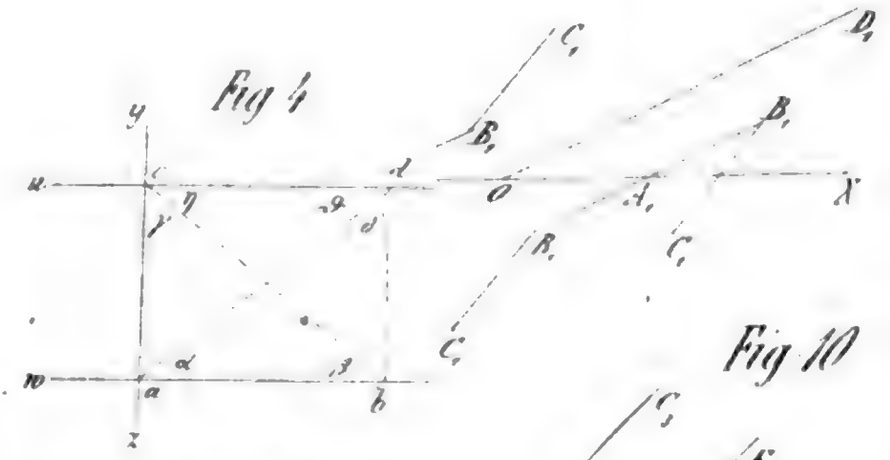


Fig 10

Fig 7.

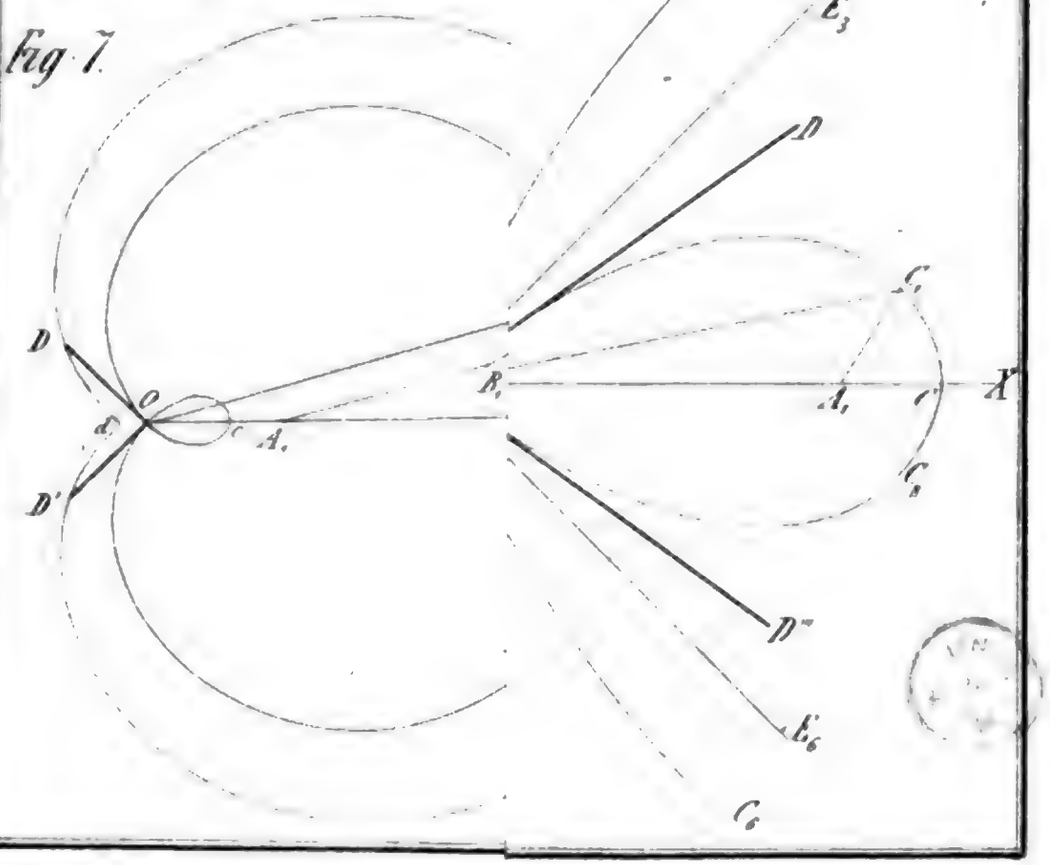


Fig 1

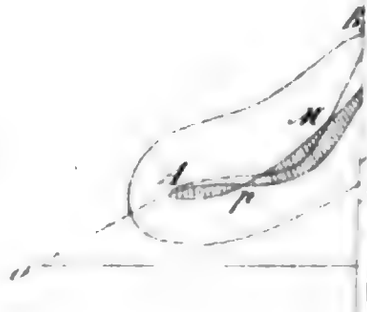


Fig 19

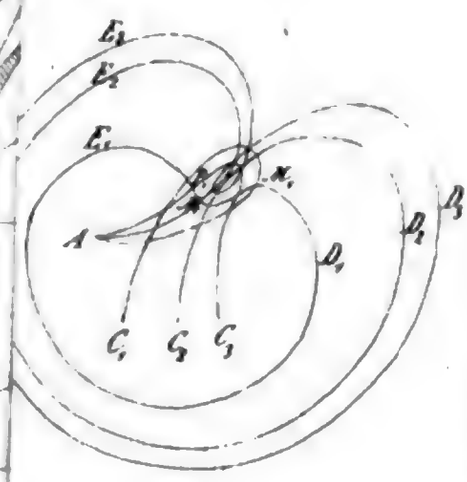


Fig 2

Fig 3

Fig 20

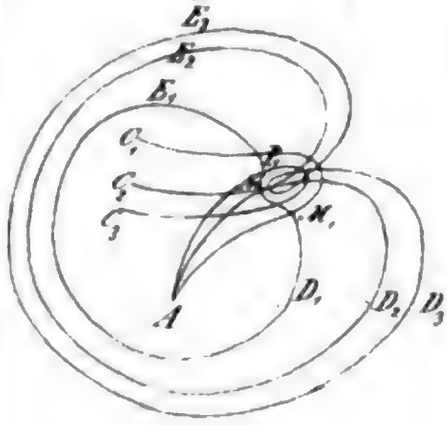


Fig 4

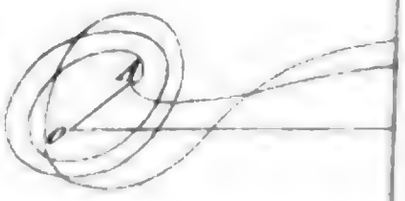


Fig 5

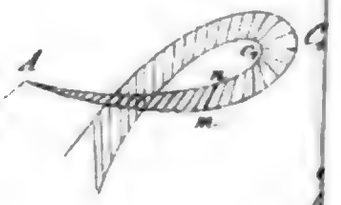


Fig 21

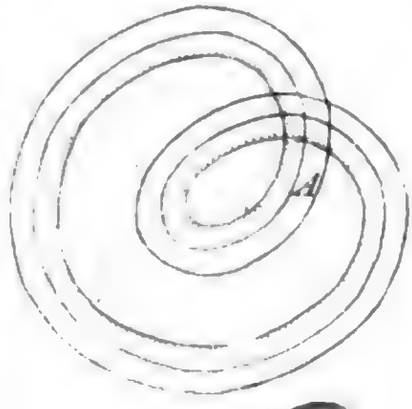


Fig 6

Fig 7

UNIV. OF MICH.

Archiv

der

thematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Sechszehnter Theil.

Mit neun lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Separat-Conto.

1851.

Inhaltsverzeichniss des sechszehnten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
V.	Ueber die Periodicität der Decimalbrüche. Von Herrn W. Looff, Director des Herzoglichen Realgymnasiums zu Gotha	I.	54
VI.	Eine allgemeine Auflösung der Gleichungen des vierten Grades. Von dem Herrn Doctor W. Schlesicke, Lehrer am Gymnasium zu Luckau	I.	58
VII.	Ueber die Abel'schen Funktionen. Von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe	I.	67
VIII.	De Integralibus quibusdam definitis. Auctor Christianus Fr. Lindman, Lector Strengnesensis	I.	94
X.	Einige Sätze aus der Zahlenlehre. (Frei nach den Annales de Mathématiques von Terquem. Septembre 1849). Von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe	I.	120
XXI.	Elementare Ableitung der Reihe für die Berechnung des Bogens aus seiner Tangente. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch zu Dresden	II.	230

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXII.	Bemerkung zu dem Aufsatze VII. in Theil XV. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch zu Dresden	II.	235
XXV.	Ueber die Gleichung (Archiv Theil XII. S. 293.), welcher angeblich keine complexe Zahl genügt. Von dem Herrn Dr. R. Baltzer, Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden . .	II.	243
XXVIII.	Fortsetzung der in Theil X. Nr. XXXVII. begonnenen Tabelle in Beziehung auf das Verwandeln der Cubikwurzeln aus ganzen Zahlen in Kettenbrüche. Von dem Herrn Doctor E. W. Grebe, Gymnasiallehrer zu Cassel . . .	III.	261
XXX.	Ueber die Rechnung mit imaginären Grössen. Von dem Herrn Doctor Zech zu Stuttgart .	III.	358
XXXII.	Literarische Bemerkung von dem Herrn Dr. Grebe zu Cassel	III.	363
XXXIII.	Sur les fonctions elliptiques. Par Monsieur Ubbo H. Meyer, de Groningue	IV.	365
XXXV.	Neue Formeln zur independenten Bestimmung der Sekanten- und Tangentenkoeffizienten. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch zu Dresden	IV.	411
XLIII.	Ueber die Bestimmung der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung. (Nach Abel Transon in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Février et Mars. 1850.). Von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe	IV.	471

Geometrie.

I.	Ueber die Mittelpunkte der geometrischen Gebilde. Von Herrn Dr. Anton Müller, ord. Professor der Mathematik an der Universität in Zürich	I.	1
IX.	Ueber die Durchschnittscurven zweier Flächen des zweiten Grades mit mehrfachen Punkten. Von dem Herrn Doctor Beer, Privatdocenten an der Universität zu Bonn	I.	104
XI.	Ueber den Zusammenhang einiger das Tetraëder betreffenden Aufgaben. Von dem Herrn Dr. R. Baltzer, Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden	II.	125

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XII.	Ueber die durch die Gleichung $y=\sqrt[x]{x}$ dargestellten Kurven. Von Herrn H. Scheffler, Bau-Condukteur bei den Herzogl. Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig	II.	133
XIII.	Anwendung der perspectivischen Projection auf die analytische Auflösung der Aufgabe: „Eine gemeinschaftliche Tangente an zwei Linien zweiten Grades zu finden". Als Fortsetzung der Untersuchungen in Nr. XIII. des XI. Theils 2. Hefts dieses Archivs. Von Herrn Leopold Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau	II.	138
XV.	Ueber die von Polaren und Asymptotenchorden umhüllten Curven. Von Herrn O. Bermann, Hülfslehrer am Gymnasium zu Wetzlar	II.	179
XVII.	Ueber das Dreieck, worin die Transversalen gleich sind, welche zwei Winkel desselben nach gleichem Verhältniss theilen. Von dem Herrn Doctor R. Baltzer, Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden	II.	201
XXIII.	Einige geometrische Aufgaben. Von Herrn Ligowski, Oberfeuerwerker im 7. Artillerie-Regiment, commandirt bei der Artillerie-Prüfungs-Commission zu Berlin	II.	238
XXVI.	Geometrische Aufgaben. Von Herrn S. E. Baltrusch zu Danzig	III.	245
XXVII.	Elementargeometrischer Beweis eines in diesem Archiv viel besprochenen Satzes. Von dem Herrn Gymnasialdirector August in Berlin	III.	259
XXIX.	Wenn zwei der vier Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte sich unendlich entfernen sollen, wie müssen alsdann die Coefficienten ihrer Gleichungen zusammenhängen? Von dem Herrn Doctor J. G. H. Swellengrebel zu Utrecht	III.	321
XXX.	Ueber einige geometrische Sätze. Von dem Herrn Doctor Zech zu Stuttgart . . .	III.	354
XXXIV.	Auflösung der geometrischen Aufgabe: Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis so schneidet, dass die beiden gemeinschaftlichen Sehnen einer gegebenen Geraden gleich werden. Von Herrn Dr. J. R. Boyman, Gymnasiallehrer zu Coblenz	IV.	409

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXXVI.	Ueber die sich unendlich vergrössernden und die sich unendlich verkleinernden Curven. Von dem Herrn Doctor J. G. H. Swellengrebel zu Utrecht	IV.	419
XXXVII.	Auflösung des Malfatti'schen Problems. Von Herrn H. Scheffler, Bau-Conducteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig	IV.	424
XXXVIII.	Ueber die Entstehung der Flächen des zweiten Grades. Von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe	IV.	430
XXXIX.	Ueber Lamberts Satz von der Quadratur parabolischer Sectoren. Von dem Herausgeber	IV.	439
XL.	Bestimmung der Länge der auf einen Kegel gewickelten Schraubenlinie. Von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe	IV.	454
XLI.	Ueber die Bestimmung des Mittelpunktes einer Fläche zweiten Grades. Von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe	IV.	460
XLII.	Eigenschaften der geraden Kegel und Kegelstumpfe mit sphäriach gekrümmten Grundflächen. Von dem Herrn Schulrath J. H. T. Müller zu Wiesbaden	IV.	462

(S. auch Nautik.)

Trigonometrie.

XVI.	Neue einfache und leichte Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie. Von dem Herausgeber	II.	194
XLVI.	Ueber einen Satz der sphärischen Trigonometrie. Nach Herrn Armand Hue, Professeur d'Hydrographie à Bayonne. Von dem Herausgeber	IV.	483

(S. auch Arithmetik Nr. XXI. und XXXV.).

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geodäsie.		
III.	Ueber die Aufstellung des Messtisches über einem auf der Erde gegebenen Punkte. Von dem Herausgeber	I.	39
XVIII.	Messung einer an beiden Endpunkten unzugänglichen Entfernung nach einer besondern Methode. Von dem Herausgeber	II.	204
XIX.	Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische. Von dem Herausgeber . . .	II.	208
XXV.	Noch eine Auflösung des Problems des Rückwärtseinschneidens mittelst des Messtisches. Von dem Herausgeber	III.	241
	Mechanik.		
XLIV.	Ueber die Schwingungsdauer des einfachen und des zusammengesetzten Pendels. Von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe . . .	IV.	477
	(S. auch Geometrie Nr. XL.).		
	Nautik.		
II.	Einige Bemerkungen über loxodromische Dreiecke im Allgemeinen. Von dem Herausgeber	I.	23
	Physik.		
IV.	Ueber die Bewegung einer Magnetnadel unter dem Einflusse eines unbegränzten galvanischen Stroms. Von Herrn Doctor J. Dienger, Professor an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe	I.	45
XIV.	Die astronomische Wärme- und Lichtvertheilung auf der Erdoberfläche. Von dem Lehrer Herrn Brenner zu Tuttlingen	II.	153
XX.	Ueber eine neue Art, die Gesetze der Fortpflanzung und Polarisation des Lichtes in optisch zweiaxigen Medien darzustellen. Von Herrn Dr. Beer, Privatdocenten an der Universität zu Bonn	II.	223

Nr. der Abhandlung. Heft. Seite.

Astronomie.

S. Physik. Nr. XIV. Heft II. S. 153.

Uebungsaufgaben für Schüler.

XXIV. Geometrische Aufgabe . . . . . II. 241

XXIII. Geometrische Aufgaben. Von Herrn Ligowski, Oberfeuerwerker im 7. Artillerie-Regiment, commandirt bei der Artillerie-Prüfungs-Commission zu Berlin . . . . . II. 238

XXXI. Geometrische Aufgabe von Herrn H. Scheffler, Bauconducteur bei den Herzogl. Braunschweig. Eisenbahnen zu Braunschweig . III. 362

XLV. Geometrische Aufgaben von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe . . . . . IV. 482

Literarische Berichte*).

LXI. . . . . I. 809

LXII. . . . . II. 813

LXIII. . . . . III. 825

LXIV. . . . . IV. 833

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

II.

Ueber die Mittelpunkte der geometrischen Gebilde.

Von

Herrn Dr. Anton Müller,

ord. Professor der Math. an der Universität in Zürich.

Die Geometrie überhaupt, die höhere wie die elementare, enthält manche Sätze, welche als völlig isolirt dastehen, im Gegensatze zu vielen Sätzen, deren nähere oder entferntere Verwandschaft mit anderen nachgewiesen wird. So wird z. B. gezeigt, dass einem Dreiecke ABC drei Punkte PQR zukommen, von denen jeder der gemeinsame Durchschnitt dreier Linien ist, und welche mit einander in einer geraden Linie liegen: die drei Linien, welche aus den Eckpunkten ABC nach den Mitten der Seiten gehen, schneiden einander in einem Punkte P; und drei zu den Seiten senkrechte Linien haben einen Punkt Q mit einander gemein, wenn sie durch die Mitten der Seiten gehen, aber einen Punkt R, wenn sie durch die Eckpunkte gehen. Dass bei Vierecken, Fünfecken u. s. w. Analoges sich finden lasse, ist ausser Zweifel: gleichwohl geben die Lehrbücher darüber nicht Aufschluss. Aehnliches gilt von anderen Eigenschaften. Ein solches Isolirtsein einer Einzelnheit ist immer ein Zeichen, dass man nicht alle Seiten kennt, und namentlich jene nicht, welche den Weg zur Auffindung des Ganzen, dem das Einzelne angehört, zu zeigen geeignet sind. Hierin lag zu allen Zeiten ein mächtiger Sporn zur vielseitigen Betrachtung einer Sache, um auf diesem Wege die Einsicht in das Ganze zu erlangen. Es sind indess vielfach alle Bemühungen vergeblich; nicht selten aber bleibt auch eine Sache ohne Beachtung, weil man von dem Werthe derselben keine Ahnung hat, während die Auffindung des Ganzen, dem die Sache angehört, zu den minder schwierigen Aufgaben zu zählen

Digitized by Google

ist. In letzterer Beziehung bietet der Punkt P eines Dreieckes ABC, in welchem die drei, aus den Eckpunkten nach den Mitten der Seiten gehenden Linien einander durchschneiden, ein merkwürdiges Beispiel, dessen nähere Beleuchtung einiges Interesse gewähren dürfte.

Wenn man (Taf. I. Fig. 1.) von den Seiten eines Dreieckes ABC jede in drei gleiche Theile theilt, und von den Theilungspunkten $mnp..$ jedes Paar, das einer Seite zunächst liegt, durch eine gerade Linie verbindet, so erhält man drei Linien mq, nr, ps; jede derselben ist zu einer Seite des Dreiecks parallel, und je zwei von ihnen halbiren einander; folglich gehen alle drei durch einen Punkt P.

Dieser Punkt P ist eben derselbe, in welchem die aus den Eckpunkten nach den Mitten der Seiten gehenden Linien einander durchschneiden: denn eine durch A und P gelegte Linie muss die Seite BC halbiren. Wir haben somit eine Bestimmung des Punktes P unabhängig von den durch die Eckpunkte gelegten Linien.

Betrachten wir nun (Taf. I. Fig. 2.) den Punkt P als auf die erwähnte Weise bestimmt, und legen durch denselben die Linien Aa und Bb, und ausser diesen noch eine dritte Linie MO, welche nicht durch einen Eckpunkt geht. Diese drei Linien Aa, Bb, MO haben das mit einander gemein, dass jede durch P geht, und alle drei Seiten durchschneidet. Nun bestehen, dem Vorhergehenden zufolge, zwischen den von P ab gezählten Segmenten der Linien Aa und Bb die bekannten Sätze

$$PA=2.Pa, \quad PB=2.Pb;$$

mithin auch die Sätze

$$\frac{1}{Pa}=\frac{2}{PA} \quad \text{und} \quad \frac{1}{Pb}=\frac{2}{PB};$$

es fragt sich also: welcher Zusammenhang besteht zwischen den Segmenten PM, PN und PO der dritten Linie MO?

Die Antwort liegt in dem Satze

$$\frac{1}{PM}=\frac{1}{PN}+\frac{1}{PO}, \qquad (\alpha)$$

dessen Richtigkeit auf folgende Weise dargethan wird.

Man betrachte AB und AC als Transversalen des Dreieckes POa, so hat man die Sätze

$$PA.aB.OM=PM.aA.OB,$$

$$PA.aC.ON=PN.aA.OC;$$

mithin, weil $aA=3.Pa$, $PA=2.Pa$, und $2.aB=2.aC=BC$ ist,

Digitized by Google

$$\frac{OM}{PM} = \frac{3.OB}{BC},$$

$$\frac{ON}{PN} = \frac{3.OC}{BC}.$$

Hierin führe man ein:

$$OM = PO + PM,$$

$$ON = PO - PN,$$

$$OB = OC + BC$$

und subtrahire dann die zweite Gleichung von der ersten, so ergiebt sich

$$\frac{PO}{PM} - \frac{PO}{PN} = 1,$$

daher ist

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{PN} + \frac{1}{PO},$$

was bewiesen werden sollte.

Durch den Satz (α) ist eine erweiterte Bedeutung des Punktes P gewonnen: es ist ein Gesetz ausgedrückt, das für die Segmente einer jeden durch P gelegten geraden Linie gilt. Im besonderen Falle, wenn eine durch P gelegte Linie zugleich durch einen Eckpunkt geht, werden zwei Segmente gleich gross, und wenn die Linie zu einer Seite parallel ist, so wird ein Segment $= \infty$, und die beiden anderen sind gleich gross.

Ehe ich die gefundene Bedeutung des Punktes P benutze, um einen Schritt weiter zu thun, werde ich den analogen Punkt betrachten, der einem Tetraeder zukommt.

Wenn man (Taf. I. Fig. 3.) von den Kanten eines Tetraeders $ABCD$ eine jede in vier gleiche Theile theilt, und jede Ternion der Theilungspunkte, welche einer Seitenfläche zunächst liegt, durch gerade Linien verbindet, so erhält man zwölf Linien, und durch diese zugleich vier Ebenen abc, $a'c'd'$, $a''d''b''$, $b'''c'''d'''$. Jede der zwölf Verbindungslinien ist zu einer Kante parallel; daher durchschneiden diese Linien einander in solchen Punkten $m\ n\ p\ q$...., wodurch jede einzelne derselben in drei gleiche Theile getheilt wird. Weil jede der Ebenen abc, $a'c'd'$, ... zu einer Seitenfläche parallel ist, so ist jede, zweien dieser Ebenen gemeinsame Linie zu einer Kante parallel. Die sechs Durchschnittslinien der Ebenen abc,.... geben aber durch die Punkte $m\ n$....., daher müssen jede zwei derselben einander halbiren. Hieraus aber folgt, dass die sechs Linien mm', nn', pp',.... durch einen einzigen Punkt P gehen.

Digitized by Google

Legt man durch den so bestimmten Punkt P und durch den Eckpunkt A eine gerade Linie AP, so muss diese der gegenüberliegenden Seitenfläche BCD in einem Punkte P' begegnen, dem vermöge seiner Lage in dem Dreiecke BCD die in (α) bezeichnete Eigenschaft zukommt. Werden nämlich von A aus durch p und p' die Linien AQ und AR gezogen, und zugleich Q in BC und R in CD mit einander verbunden, so ist die neue Linie QR zu pp' parallel, mithin P' die Mitte von QR; zugleich ist BQ von BC, und DR von DC der dritte Theil, also QR zu BD parallel; folglich hat P' die erwähnte Lage. Endlich ist $PA = 4.PP'$, und $PA = 3.PP'$, oder

$$\frac{1}{PP'} = \frac{3}{PA}.$$

Man lege nun (Taf. I. Fig. 4.) durch P eine gerade Linie LPO, welche zwar nicht durch einen Eckpunkt geht, aber dennoch mit jeder Seitenfläche einen Punkt gemein hat. Diese Linie liegt mit APP' in einer Ebene, welche ebenfalls jede Seitenfläche durchschneidet. Es seien AM', AN', AO', LO' die Durchschnittslinien der Seitenflächen und der erwähnten Ebene, und demgemäss $LMNO$ die Punkte, welche die Linie LPO mit den Seitenflächen gemein hat. Unter dieser Voraussetzung hat man, weil AM', AN', AO' Transversalen des Dreieckes LPP' sind, die Sätze

$$PA.LM.P'M' = PM.LM'.P'A,$$

$$PA.LN.P'N' = PN.LN'.P'A,$$

$$PA.LO.P'O' = PO.LO'.P'A.$$

Weil nun $PA = 3.PP'$, und $P'A = 4.PP'$ ist, so folgt hieraus:

$$\frac{3.LM}{PM} = \frac{4.LM'}{P'M'},$$

$$\frac{3.LN}{PN} = \frac{4.LN'}{P'N'},$$

$$\frac{3.LO}{PO} = \frac{4.LO'}{P'O'}.$$

Hierin führe man ein:

$$LM = PL - PM; \quad LM' = P'L - P'M'$$

$$LN = PL - PN; \quad LN' = P'L - P'N',$$

$$LO = PL + PO; \quad LO' = P'L + P'O'$$

und subtrahire dann die Summe der ersten und zweiten Gleichung von der dritten, so entspringt

$$3.PL.\left(\frac{1}{PO}-\frac{1}{PM}-\frac{1}{PN}\right)=4.P'L.\left(\frac{1}{P'O'}-\frac{1}{P'M'}-\frac{1}{P'N'}\right)+3.$$

Dem Gesetze (α) zufolge ist aber

$$\frac{1}{P'O'}=\frac{1}{P'M'}+\frac{1}{P'N'},$$

folglich auch

$$\frac{1}{PO}=\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN} \qquad (\beta)$$

Dieser Satz giebt den Zusammenhang der Segmente PL, PM, PN und PO an.

Bei der Annahme der Linie LPO ist überhaupt eine Richtung gewählt, bei welcher die Punkte, in denen die Linie LPO den Seitenflächen begegnet, von einander verschieden sind; indess ist die Richtung von LPO doch eine solche, dass auf der einen Seite von P der Punkt O allein ist, während auf der anderen Seite die drei Punkte $L\ M\ N$ liegen. Im Gegensatze zu dieser Richtung der Linie LPO steht eine andere (Taf. I. Fig. 5.), bei welcher die Punkte $L\,M\,N\,O$ paarweise vertheilt sind, auf der einen Seite von P die Punkte L und M, auf der anderen aber N und O liegen. Man hat übrigens in diesem wie im vorhergehenden Falle die Sätze

$$\frac{3.LM}{PM}=\frac{4.LM'}{P'M'},$$

$$\frac{3.LN}{PN}=\frac{4.LN'}{P'N'},$$

$$\frac{3.LO}{PO}=\frac{4.LO'}{P'O'};$$

und hieraus erhält man, wenn man die Werthe

$$LM=PL-PM;\ LM'=P'L-P'M',$$

$$LN=PL+PN;\ LN'=P'L+P'N',$$

$$LO=PL+PO;\ LO'=P'L+P'O'$$

einführt, und dann die erste Gleichung von der Summe der zweiten und dritten subtrahirt, die Gleichung:

$$3.PL.\left(\frac{1}{PN}+\frac{1}{PO}-\frac{1}{PM}\right)=4.P'L.\left(\frac{1}{P'N'}+\frac{1}{P'O'}-\frac{1}{P'M'}\right)+3.$$

Nach (α) ist aber

$$\frac{1}{P'N'} + \frac{1}{P'O'} = \frac{1}{P'M'},$$

folglich wird

$$\frac{1}{PN} + \frac{1}{PO} = \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM}. \qquad (\gamma)$$

Die Sätze (β) und (γ) sind zwar verschieden, wie die Fälle, auf welche sie Bezug haben. Bringen wir aber diese Gleichungen auf die Form

$$0 = \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} + \frac{1}{-PO},$$

$$0 = \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \frac{1}{-PN} + \frac{1}{-PO};$$

so fällt in die Augen, dass jeder von den Sätzen (β) und (γ) nur eine specielle Anwendung eines allgemeinen Satzes ist, der also lautet: einem Tetraeder kommt ein Punkt P von solcher Lage zu, dass in einer durch P gelegten geraden Linie, welche in den Punkten $LMNO$ den Seitenflächen begegnet, die von P ab gezählten Segmente PL, PM,.... in der durch die Gleichung

$$0 = \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} + \frac{1}{PO}$$

bezeichneten Weise zusammenhängen.

In gleicher Weise kann man in Bezug auf die Segmente einer geraden Linie, welche durch den Punkt P eines Dreieckes gelegt ist, und in den Punkten $M\ N\ O$ die Seiten durchschneidet, den Satz aufstellen:

$$0 = \frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} + \frac{1}{PO}.$$

Nachdem die eigentliche Bedeutung des, einem Tetraeder angehörigen Punktes P nachgewiesen worden, ist es leicht, den Beweis zu liefern, dass einem Vierecke, oder besser ausgedrückt, einem Aggregate von vier geraden Linien, die in einer Ebene liegen, ein solcher Punkt P zukomme, wie dem Dreiecke. Man nehme an, es sei der einem Tetraeder $ABCD$ zukommende Punkt P bestimmt, und es seien durch P zwei gerade Linien gelegt, von denen die eine in den Punkten $LMNO$, die andere in den Punkten $L'M'N'O'$ die Seitenflächen durchdringt. Diese geraden Linien LPO und $L'PO'$ liegen in einer Ebene E, und bestimmen daher in den Seitenflächen des Tetraeders vier solche gerade

Digitized by Google

Linien LL', MM',...., welche ein ebenes Aggregat constituiren. Man nehme weiter an, in der Ebene E seien durch P noch andere gerade Linien gelegt, welche in den Punkten $L''M''N''O''$, u. s. w. die Seitenflächen durchschneiden. In sofern die Punkte $LMNO$.. in den Seitenflächen des Tetraeders liegen, hat man die Sätze:

$$0=\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}+\frac{1}{PO},$$

$$0=\frac{1}{PL'}+\frac{1}{PM'}+\frac{1}{PN'}+\frac{1}{PO'},$$

$$0=\frac{1}{PL''}+\frac{1}{PM''}+\frac{1}{PN''}+\frac{1}{PO''},$$

u. s. w.

Nun gehören aber die Punkte LM..... auch dem Aggregate der vier Linien LL', MM',... an; es hat also der Punkt P in dem Aggregate eine solche Lage, dass zwischen den Segmenten irgend einer geraden Linie, welche in dem Aggregate durch den Punkt P gelegt ist, der in den vorstehenden Gleichungen bezeichnete Zusammenhang besteht.

Hiermit ist die Beschränkung auf Dreieck und Tetraeder beseitigt, und das Bestehen eines allgemeinen Gesetzes angedeutet, das sich ungefähr so ausdrücken lässt: in einem Aggregate von n geraden, in einer Ebene liegenden Linien, und auch in einem Aggregate von n Ebenen giebt es einen Punkt P von solcher Lage, dass in einer geraden Linie, welche durch P geht, und in den Punkten A_1, A_2.... A_n die Bestandtheile des Aggregates durchschneidet. die von P ab gezählten Segmente PA_1, PA_2,.. in einem durch die Gleichung

$$0=\frac{1}{PA_1}+\frac{1}{PA_2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{PA_n}$$

bezeichneten Zusammenhange stehen, und dass diese Relation in Bezug auf die Richtung der geraden Linie an keine Bedingung geknüpft ist.

In diesem allgemeinen Satze ist, in so fern man dessen Geltung im Voraus zugiebt, die dem Punkte P beigelegte Eigenschaft rücksichtlich der Segmente einer durch P gehenden geraden Linie ganz unzweifelhaft; dagegen bleibt unbestimmt, ob ein Aggregat nur einen einzigen Punkt P, oder aber mehrere solche Punkte haben könne; und eben so ist ungewiss, ob das Vorkommen solcher Punkte P unbedingt, oder durch die Beschaffenheit der Aggregate bedingt ist.

Lässt man diese Fragen vorläufig bei Seite, und sieht lediglich auf die dem Punkte P beigelegte Eigenschaft, so kann die Bemerkung nicht entgehen, dass in der Angabe derselben gar

Digitized by Google

nichts liegt, was eine Beschränkung auf Aggregate von geraden Linien und auf Aggregate von Ebenen als nothwendig bezeichnete; es ist im Gegentheile unverkennbar, dass ein solcher Punkt P vermöge der, seiner Lage zukommenden Eigenschaft ganz wohl einer krummen Linie, und auch einem Aggregate von (geraden oder krummen) Linien, die in einer Ebene liegen, angehören kann, und dass das Gleiche auf Flächen und auf Aggregate von Flächen Anwendung findet.

Diese Betrachtungen führen zwar nicht zur Gewissheit, gewähren aber die Einsicht, dass man bei der Frage nach dem Vorkommen der Punkte P es mit einer Eigenschaft zu thun hat, welche den ebenen Liniengebilden und auch den Flächengebilden, also überhaupt den geometrischen Gebilden zukommt. Als eine den geometrischen Gebilden gemeinsame Eigenschaft kann aber das Vorkommen der Punkte P schlechthin nicht isolirt stehen: dasselbe muss mit anderen Eigenschaften, welche den Gebilden ebenfalls gemeinsam sind, irgendwie zusammen hängen, in dem Systeme aller Eigenschaften, welche die Gebilde mit einander gemein haben, eine bestimmte Stelle einnehmen. Will man also über das Vorkommen der Punkte P zur vollen Klarheit gelangen, so muss man sich in einem ganz anderen Gebiete umsehen, als die Elementarsätze über jene Punkte anzudeuten scheinen.

Seit der Einführung der Coordinaten durch Descartes werden die krummen Linien und eben so die Flächen nach den ihnen zukommenden Gleichungen in Ordnungen vertheilt, in der Weise, dass der Grad ihrer Gleichung zugleich die Ordnung einer Linie oder Fläche bezeichnet, und demgemäss alle Linien und alle Flächen, deren Gleichungen von einerlei Grad sind, als zu einerlei Ordnung gehörig betrachtet werden.

Hiernach ist es ganz richtig, dass die Gleichungen aller zu einerlei Ordnung gehörigen Linien oder Flächen nichts weiter sind als Specialfälle einer allgemeinen Gleichung, d. i. einer solchen, deren Coefficienten ohne Werth- und Formbestimmung, lediglich unbestimmte Zeichen sind. Von einer solchen Gleichung kann man aber nicht umgekehrt sagen, sie sei die allgemeine Gleichung aller zu einer Ordnung gehörigen Linien oder Flächen, aus dem einfachen Grunde, weil die Gleichung ein grösseres Gebiet umfasst, das ausser den Linien oder Flächen auch noch andere Gebilde enthält. So ist es, um ein Beispiel anzuführen, schlechthin ungenau, wenn man die Gleichung zwischen den Coordinaten xy vom dritten Grade

$$0 = x^3 + Ax^2y + Bxy^2 + Cy^3 + Dx^2 + \ldots$$

so lange $ABC\ldots$ lediglich Zeichen für die Coefficienten sind, als die allgemeine Gleichung der Linien dritter Ordnung betrachtet:

Digitized by Google

einem Aggregate von drei geraden Linien, die in einer Ebene liegen, und eben so einem Aggregate von einer geraden Linie und einem Kegelschnitt gehört eine Gleichung zwischen den Coordinaten eines seiner Punkte an, welche ebenfalls vom dritten Grade ist, und jede solche Gleichung ist in der obigen allgemeinen als Specialfall enthalten. Um also genau zu sein, wird man sagen es seien alle ebenen Liniengebilde dritter Ordnung in der obigen allgemeinen Gleichung begriffen.

Eben so unbestreitbar und richtig ist auch, dass eine Untersuchung der zu einer Ordnung gehörigen Linien, wobei die allgemeine Coordinatengleichung des entsprechenden Grades als Grundlage dient, nicht mit den Linien selbst anfangen kann. Es fehlt nämlich die Definition dieser Linien als solcher, indem dasjenige, was durch die Coordinatengleichung ausgedrückt wird, sich nicht auf diese oder jene Gebilde ausschliesslich, sondern auf alle Gebilde derselben Ordnung bezieht.

Bei einer solchen Auffassung der Bedeutung, welche den allgemeinen Coordinatengleichungen zukommt, steht schon vor aller Untersuchung als unzweifelhafte Thatsache fest, dass den Liniengebilden von einerlei Ordnung, desgleichen auch den Flächengebilden von einerlei Ordnung viele Eigenschaften gemein sein müssen. Hiervon ausgehend habe ich in der Schrift: „Die Fundamentalgesetze der höheren Geometrie", wovon so eben die erste Abtheilung in der Hallberger'schen Verlagshandlung in Stuttgart erschienen ist, in möglich'grösster Vollständigkeit diejenigen Gesetze zu entwickeln versucht, welchen die gemeinsamen Eigenschaften sowohl der Linien — als der Flächengebilde unterworfen sind. Hierbei stellt sich die Mannigfaltigkeit und die verschiedenartige Natur jener Eigenschaften heraus. Es finden sich solche Eigenschaften, denen eine unbedingte und unveränderte Geltung zukommt, welche also von der besonderen Beschaffenheit der Gebilde völlig unabhängig sind; sodann ergeben sich auch Eigenschaften von veränderlicher Natur, welche von der Beschaffenheit der Gebilde mehr oder weniger abhängen. Insbesondere erlangt man in Bezug auf Ueber- und auf Unterordnung der gemeinsamen Eigenschaften eine solche Einsicht, dass auch nicht der mindeste Zweifel obwalten kann. Indem die Untersuchung auf dies alles eingeht, und namentlich auch auf die Modificationen, welche die veränderlichen Eigenschaften erleiden können, führt sie Schritt für Schritt tiefer in die einzelnen Theile des Gebietes der zusammenhörigen Gebilde, und man hat endlich die individuellen Gebilde, in streng logischer Anordnung aufgeführt.

Die Art und Weise, zu den gemeinsamen Eigenschaften der zu einerlei Ordnung gehörigen Gebilde zu gelangen, ist ziemlich einfach. Durch die Voraussetzung der Coordinatengleichung des $n$ten Grades hat man zunächst das Mittel zur formellen Behandlung der Frage nach denjenigen Punkten, welche eine gerade Linie mit einem Linien- oder Flächengebilde der $n$ten Ordnung gemein haben kann. Die Anzahl dieser Punkte ist, wie bekannt, nicht grösser als n, und man findet die einzelnen Punkte nicht allein durch Ermittelung ihrer Coordinaten, sondern auch auf zwei

andere Weisen, welche darauf beruhen, dass die Lage einer geraden Linie bestimmt ist sowohl durch einen ihrer Punkte und durch ihre Richtung, als auch durch zwei ihrer Punkte.

Indem man die Lage einer geraden Linie oder einer Transversalen T, welche ein Gebilde L der $n$ten Ordnung durchschneidet, durch Voraussetzung ihrer Richtung und eines Punktes O derselben bestimmt, ist die Möglichkeit dargeboten, die Punkte $A_1, A_2 \ldots A_n$, welche das Gebilde L mit der Transversalen T gemein hat, durch ihre Lage gegen O anzugeben: man hat nur die Segmente $OA_1, OA_2 \ldots OA_n$ zu bestimmen. Wenn aber A irgend einer von den Punkten $A_1, A_2 \ldots A_n$, also OA eines der Segmente $OA_1, OA_2, \ldots OA_n$ ist, so lassen sich die Coordinaten des Punktes A einzeln darstellen durch das Segment OA, durch die Coordinaten von O, und durch die Elemente der Richtung der Transversalen T; die Substitution dieser Werthe der Coordinaten von A in der vorausgesetzten Coordinatengleichung führt zu einer Gleichung für OA von der Form

$$0 = M_0 . OA^n + M_1 . OA^{n-1} + \ldots + M_{n-1} . OA + M_n .$$

Die Coefficienten $M_0 M_1 \ldots$ dieser Gleichung enthalten dreierlei Grössen: die Coefficienten der vorausgesetzten Coordinatengleichung, sodann die Coordinaten des Punktes O, und endlich die Elemente der Richtung der Transversalen T; zugleich lässt sich die Art, in welcher die Coefficienten $M_0 M_1$ aus den erwähnten Grössen gebildet werden, durch ein Gesetz ausdrücken. Im Falle L ein Liniengebilde $n$ter Ordnung ist, dessen Gleichung zwischen senkrechten Coordinaten durch den Satz

$$0 = S(x,y)$$

angezeigt wird, hat man unter der Voraussetzung, dass $\xi\eta$ die Coordinaten des Punktes O seien, und dass die Transversale T um den Winkel u zur Axe der x geneigt sei, das Bildungsgesetz:

$$M_r = \frac{\cos u^{n-r}}{1^{n-r|1}} \cdot \sum_0^{n-r} \frac{(n-r)^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot \frac{d^{n-r} S(\xi,\eta)}{d\xi^{n-r-s} . d\eta^s} \cdot \mathrm{tg} u^s .$$

Diesem völlig analog ist das Bildungsgesetz von M_r für den Fall, dass das Gebilde L ein Flächengebilde ist.

Nach vorstehender Bildungsnorm ist M_r in Rücksicht der Coordinaten $\xi\eta$ eine Grösse der $r$ten Dimension, so dass in M_0 die Coordinaten $\xi\eta$ gar nicht vorkommen, in M_1 nur die ersten Potenzen derselben, u. s. w.

Die Segmente $OA_1, OA_2, \ldots$ sind die Wurzeln der obigen Gleichung für OA; daher hat man zwischen diesen Segmenten und den Coefficienten $M_0 M_1 \ldots$ jener Gleichung ein System von n Sätzen, dessen allgemeines Glied durch die Gleichung

$$(OA_1 \, OA_2 \ldots OA_n)^{(p)} = (-1)^p . \frac{M_p}{M_0}$$

Digitized by Google

bezeichnet wird, vorausgesetzt, dass der Ausdruck links die Summe der Verbindungen aus $OA_1, OA_2 \ldots\ldots$ zu p Elementen andeute.

Der Punkt O ist hierbei als angenommen betrachtet. Ob die Annahme eine directe oder eine mittelbare ist, bleibt ausser der Beachtung. Unter den mittelbaren Annahmen von O ist aber auch jene zulässig, welche festsetzt, der Punkt O soll, wie die Punkte $A_1, A_2 .. A_n$ auch liegen mögen, gegen diese Punkte in der Transversalen T eine solche Lage haben, dass zwischen den Segmenten $OA_1, OA_2 \ldots\ldots$ die Gleichung

$$(OA_1\ OA_2 \ldots\ldots\ OA_n)^{(h)} = 0 \qquad (C)$$

stattfindet. Dieser Forderung nämlich genügen nach dem Vorhergehenden die Coordinaten des Punktes O, wenn sie solche Werthe haben, dass $M_h = 0$ wird. Im Falle also das Gebilde L ein Liniengebilde ist, so muss der Forderung (C) gemäss sein

$$0 = \sum_{0}^{n-h} {}^{s}\frac{(n-h)^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot \frac{d^{n-h}\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\xi^{n-h-s}.d\eta^{s}} \cdot \mathrm{tg}u^{s}. \qquad (D)$$

Diese Gleichung zwischen ξ und η ist vom $h$ten Grade und gehört einem Liniengebilde der $h$ten Ordnung an. Von diesem Liniengebilde muss also O ebenfalls ein Punkt sein, wenn O durch seine Lage in der Transversalen T der gestellten Forderung (C) genügen soll.

Weil das Gebilde (D) von der $h$ten Ordnung ist, so kann dasselbe h Punkte mit der Transversalen T gemein haben. Deshalb enthält die Transversale T zwischen den Punkten $A_1, A_2 .. A_n$ nicht bloss einen Punkt O, sondern h solche Punkte O, von denen jeder durch seine Lage die Forderung (C) befriedigt.

Die Coordinaten $\xi\eta$ in der Gleichung (D) beziehen sich überhaupt auf einen Punkt des Gebildes (D), aber nicht nothwendig und ausschliesslich auf O. Aus diesem Grunde enthält die Gleichung (D) von der Transversalen T lediglich den Winkel u. Es muss also jede Transversale, deren Richtung durch u angezeigt ist, von dem Gebilde (D) in h solchen Punkten geschnitten werden, von denen jeder in seiner Linie T der Forderung (C) genügt.

Wegen dieser Eigenschaft nenne ich das Gebilde (D) einen zur Richtung u gehörigen Diameter der $h$ten Ordnung des Liniengebildes L.

Wenn die Gleichung (D) auch nicht für jeden Werth von u einem Liniengebilde angehört, so sind unter den möglichen Werthen von u doch solche, bei deren jedem die Gleichung (D) ein Liniengebilde bezeichnet.

Ein Liniengebilde L der $n$ten Ordnung hat demnach, und zwar unbedingt, Diameter der $h$ten Ordnung. Dies gilt aber für jeden der Werthe $h = 1, 2, \ldots n-1$; mithin kommen einem Linien-

Digitized by Google

gebilde L der $n$ten Ordnung Diameter der ersten, zweiten, ...$(n-1)$ten Ordnung zu.

Dieser Satz gilt auch für Flächengebilde der $n$ten Ordnung, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann die Diameter nicht Linien-, sondern ebenfalls Flächengebilde sind.

Ich betrachte nun im Besonderen die Diameter der $(n-1)$ten Ordnung, weil diese über das Vorkommen der Punkte P, von denen oben die Rede war, bestimmten Aufschluss geben.

Indem man $h=n-1$ setzt, erhält man aus dem obigen Satze (D) für den zur Richtung u gehörigen Diameter der $(n-1)$ten Ordnung die Gleichung

$$0=\frac{d\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\xi}+\frac{d\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\eta}.\operatorname{tg}u. \qquad (a)$$

Hiernach sind die Gleichungen jener Diameter, welche zu den Richtungen $u=0$ und $u=90^0$ gehören, folgende:

$$0=\frac{d\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\xi}, \qquad (b)$$

$$0=\frac{d\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\eta}. \qquad (c)$$

Diese zwei Diameter können einander durchschneiden in einer Anzahl von Punkten, welche möglicher Weise bis zu $(n-1)^2$ ansteigt. Es ist aber offenbar, dass die Coordinaten jener Punkte, welche die Diameter (b) und (c) mit einander gemein haben, auch der Gleichung (a) genügen, und zwar unabhängig von u. Daher sind diejenigen Punkte, in welchen die Diameter (b) und (c) einander durchschneiden, allen Diametern der $(n-1)$ten Ordnung gemein.

Diese Punkte, von denen jeder allen Diametern der $(n-1)$ten Ordnung gemein ist, nenne ich die Mittelpunkte des Liniengebildes L.

Es sei O ein Mittelpunkt des Gebildes L; durch O sei nach beliebiger Richtung hin eine Transversale T angenommen, und es seien $A_1, A_2 \ldots A_n$ die Punkte, welche T mit L gemein hat. Dieser Annahme gemäss ist O ein Punkt des zur Richtung von T gehörigen Diameters der $(n-1)$ten Ordnung, daher muss, dem obigen Satze (C) zufolge, zwischen den Segmenten $OA_1, OA_2 \ldots OA_n$ folgende Gleichung stattfinden:

$$0=(OA_1\, OA_2 \ldots OA_n)^{(n-1)}.$$

Digitized by Google

Dieser Gleichung geschieht Genüge, und zwar ganz unabhängig von der Richtung der Transversalen T, wenn O ein Doppelpunkt des Gebildes L ist: denn in diesem Falle sind unter den Segmenten $OA_1, OA_2 \ldots$ irgend zwei $=0$. Demnach ist jeder Doppelpunkt des Gebildes L zugleich ein Mittelpunkt.

Im Falle O nicht ein Doppelpunkt des Gebildes L, also überhaupt nicht ein Punkt von L selber ist, kann man die vorangehende Gleichung durch das Product aus allen Segmenten dividiren, und es entsteht der Satz

$$0 = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{OA_n}.$$

Hierdurch wird nun klar, dass die früher besprochenen Punkte P nichts anderes sind als Mittelpunkte der Gebilde. Eben darum sind jetzt auch die Mittel bezeichnet, durch welche man in jedem gegebenen Liniengebilde jene Punkte P wirklich finden kann.

Da die Bestimmung der Punkte P, wie mir scheint, nicht ohne Interesse und Nutzen ist, und dieser Gegenstand in meiner oben erwähnten Schrift nur kurz berührt werden konnte, so dürfte ein näheres Eingehen in die Sache nicht unerwünscht sein. Ich werde mich jedoch auf Aggregate, welche aus geraden Linien bestehen, beschränken, und insbesondere die Bestimmung der Punkte P mittelst Zeichnung erläutern.

Ein ebenes Liniengebilde L sei aus n geraden Linien zusammengesetzt, und es sollen diese Linien alle einander durchschneiden.

Die Anzahl der Punkte, in welchen die n Linien einander durchschneiden, ist $= \frac{n.(n-1)}{1.2}$. Jeder von diesen Punkten ist ein Doppelpunkt, also auch ein Mittelpunkt von L. Die Anzahl aller dem Gebilde L zukommenden Mittelpunkte ist aber $=(n-1)^2$, daher ist die Anzahl der dem Gebilde L angehörigen Punkte P, d. h. jener Mittelpunkte, welche nicht zugleich Doppelpunkte sind,

$$=(n-1)^2 - \frac{n.(n-1)}{1.2} = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.$$

Hiernach hat also

ein Aggregat von 3 geraden Linien 1 Punkt P,
„ „ „ 4 „ „ 3 Punkte P,
„ „ „ 5 „ „ 6 „ P,
„ „ 6 „ „ 10 „ P,

u. s. w.

Digitized by Google

Die Gleichung des vorausgesetzten Gebildes L hat die Form:

$$0=(x-y.\cot k_1+l_1)(x-y.\cot k_2+l_2)\ldots(x-y.\cot k_n+l_n).$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$\xi-\eta.\cot k_s+l_s=F_s,$$

so ist in unserem Falle

$$S(\xi,\eta)=F_1.F_2.F_3\ldots F_n,$$

folglich die Gleichung (a) des zur Richtung u gehörigen Diameters der $(n-1)$ten Ordnung jetzt folgende:

$$0=\frac{d(F_1.F_2\ldots F_n)}{d\xi}.\cot u+\frac{d(F_1.F_2\ldots F_n)}{d\eta}. \qquad (l)$$

Diese Gleichung ist vom $(n-1)$ten Grade, und gehört einer Linie der $(n-1)$ten Ordnung an. In dieser Linie liegen alle Mittelpunkte von L; sie geht also durch alle Punkte, in welchen die Bestandtheile von L einander durchschneiden, und enthält zugleich die $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Punkte P. Man hat also nur zwei solche Linien der $(n-1)$ten Ordnung zu zeichnen, um die Punkte P zu erhalten.

Man kann aber noch leichter zum Ziele kommen. Bezeichnen wir nämlich die Grössenreihe $F_1,F_2,\ldots F_n$, indem wir nicht von F_1, sondern überhaupt von einem Gliede F_ϱ derselben zu zählen anfangen, durch

$$F_\varrho,F_{\varrho+1},F_{\varrho+2}\ldots\ldots F_{\varrho+n-1},$$

wobei also $F_{\varrho+n}$ mit F_ϱ einerlei ist, und bemerken, dass

$$d(F_\varrho.F_{\varrho+1}\ldots\ldots F_{\varrho+n-1})=F_\varrho.d(F_{\varrho+1}.F_{\varrho+2}\ldots F_{\varrho+n-1})+F_{\varrho+1}.F_{\varrho+2}\ldots\ldots F_{\varrho+n-1}.dF_\varrho$$

ist, so erhalten wir aus (l) die Gleichung:

$$0=F_\varrho.\left(\frac{d(F_{\varrho+1}.F_{\varrho+2}.F_{\varrho+n-1})}{d\xi}.\cot u+\frac{d(F_{\varrho+1}\ldots F_{\varrho+n-1})}{d\eta}\right)+F_{\varrho+1}.F_{\varrho+2}\ldots\ldots F_{\varrho+n-1}.(\cot u-\cot k_\varrho).$$

Wird nun $u=k_\varrho$ angenommen, so folgt hieraus

$$0=F_\varrho.\left(\frac{d(F_{\varrho+1}\ldots\ldots F_{\varrho+n-1})}{d\xi}.\cot k_\varrho+\frac{d(F_{\varrho+1}\ldots F_{\varrho+n-1})}{d\eta}\right)$$

Der zur Richtung $u=k_\varrho$ gehörige Diameter der $(n-1)$ten Ordnung ist hiernach ein Aggregat, bestehend aus der geraden Linie

$$F_\varrho = \xi - \eta . \cot k_\varrho + l_\varrho = 0$$

und aus der Linie der $(n-2)$ten Ordnung, welcher die Gleichung

$$0 = \frac{d(F_{\varrho+1} \ldots F_{\varrho+n-1})}{d\xi} . \cot k_\varrho + \frac{d(F_{\varrho+1} \ldots F_{\varrho+n-1})}{d\eta} \qquad \text{(II.)}$$

angehört. Die Linie $F_\varrho = 0$ ist ein Bestandtheil von L, und enthält daher $n-1$ Doppelpunkte; die übrigen Doppelpunkte so wie die Punkte P müssen also in der Linie (II) liegen.

Hiernach reichen zwei, nach der Vorschrift des Satzes (II) gebildete Linien hin, um die Punkte P zu bestimmen. Ihrer Gleichung zufolge wird aber eine Linie (II) auf folgende Weise gefunden: man betrachtet irgend welche $n-1$ Linien oder Bestandtheile des Gebildes L als ein besonderes Aggregat, und sucht für dieses einen Diameter der $(n-2)$ten Ordnung, und zwar jenen, welcher zur Richtung der $n$ten, in das neue Aggregat nicht aufgenommenen Linie von L gehört.

Ich wende mich nun zur Bestimmung der Punkte P mittelst Zeichnung.

Zunächst kommt es auf die Gewinnung derjenigen Mittel an, durch welche die Auflösung einer Aufgabe möglich wird, welche so lautet:

> Das aus n geraden Linien zusammengesetzte Gebilde L werde von mehreren, zu einander parallelen Transversalen $TT'T''\ldots$ durchschnitten, und zwar von T in den Punkten $A_1 A_2 \ldots A_n$, von T' in den Punkten $A'_1 A'_2 \ldots A'_n$, von T'' in den Punkten $A''_1 A''_2 \ldots A''_n$, u. s. w.; man soll in jeder von diesen Transversalen $TT'\ldots$ jene Punkte angeben, durch welche der, zur Richtung dieser Transversalen gehörige Diameter der $(n-1)$ten Ordnung gehen muss.

Behufs der Auflösung dieser Aufgabe bezeichnen wir vorläufig durch O einen von jenen Punkten, welche die Transversale T mit dem gesuchten Diameter gemein hat, eben so durch O' einen von jenen Punkten, welche T' mit dem Diameter gemein hat, u. s. w. Unter dieser Voraussetzung hat man als Anhalt die Gleichungen:

$$0 = (OA_1 \; OA_2 \ldots OA_n)^{(n-1)},$$

$$0 = (O'A'_1 \; O'A'_2 \ldots O'A'_n)^{(n-1)},$$

$$0 = (O''A''_1 \; O''A''_2 \ldots O''A''_n)^{(n-1)},$$

. . . . . .

Man wähle, nach Willkühr, in T einen Punkt X, in T' einen Punkt X', in T'' einen Punkt X'', u. s. w., so ist, algebraisch genommen,

$$OA_r = XA_r - XO, \quad O'A'_r = X'A'_r - X'O',$$
$$O''A''_r = X''A''_r - X''O'', \ldots\ldots$$

Führt man die hieraus sich ergebenden Werthe für OA_1, OA_2, ... in den vorangehenden Gleichungen ein, so ergeben sich folgende Sätze:

$$0 = \sum_0^{n-1} (-1)^s . XO^{n-s-1} . \frac{(n-1)^{s|-1}}{n^{s|-1}} . (XA_1\ XA_2 \ldots\ldots XA_n)^{(s)},$$

$$0 = \sum_0^{n-1} (-1)^s . X'O'^{n-s-1} . \frac{(n-1)^{s|-1}}{n^{s|-1}} . (X'A'_1\ X'A'_2 \ldots X'A'_n)^{(s)},$$

u. s. w.

Die Punkte $A_1 A_2 \ldots$, $A'_1 A'_2 \ldots$ sind in jedem Falle gegeben; da nun die Punkte $X\ X' \ldots$ durch beliebige Annahme festgestellt werden, so sind in jedem Falle die Segmente XA_1, $XA_2, \ldots\ldots$, $X'A'_1$, $X'A'_2 \ldots$ ebenfalls gegeben. Die vorstehenden Gleichungen geben also direct die Werthe der Grössen XO, $X'O' \ldots$ Es ergeben sich aber für jede dieser Grössen $n-1$ Werthe, und durch diese sind in jeder Transversalen diejenigen $n-1$ Punkte bestimmt, durch welche der zugehörige Diameter der $(n-1)$ten Ordnung geht.

Die Auflösung der vorstehenden Gleichungen wird vereinfacht, wenn man die Punkte $X\ X' \ldots$ so wählt, dass

$$\left.\begin{array}{l} (XA_1\ XA_2 \ldots\ldots XA_n)^{(1)} = 0 \\ (X'A'_1\ X'A'_2 \ldots X'A'_n)^{(1)} = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \qquad \text{(III)}$$

Unter dieser Bedingung liegen die Punkte $X\ X'\ X'' \ldots\ldots$ in einer geraden Linie, in dem zur Richtung der Transversalen $T\ T'\ T'' \ldots$ gehörigen Diameter erster Ordnung des Gebildes L; es werden daher durch zwei Punkte $X\ X'$ die übrigen bestimmt. Um aber diese zwei Punkte zu finden, nehme man, nach Willkühr, in T einen Punkt U und in T' einen Punkt U' an, und bemerke, dass

$$XA_r = UA_r - UX, \quad X'A'_r = U'A'_r - U'X'$$

ist, so fällt in die Augen, dass den Gleichungen (III) gemäss sein muss

$$\left.\begin{array}{l} n . UX = UA_1 + UA_2 + \ldots\ldots + UA_n \\ n . U'X = U'A'_1 + U'A'_2 + \ldots\ldots + U'A'_n \end{array}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

Digitized by Google

In Folge der Annahmen (III) fallen in den obigen Gleichungen für XO, $X'O'$,... die zweiten Glieder weg, und man hat demnach

$$0 = n.XO^{n-1} + (n-2).XO^{n-3}.(XA_1\ \ XA_2 \ldots XA_n)^{(2)}$$
$$-(n-3).XO^{n-4}.(XA_1\ \ XA_2 \ldots XA_n)^{(3)}$$
$$+(n-4).XO^{n-5}.(XA_1\ \ XA_2 \ldots XA_n)^{(4)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und eben solche Gleichungen für $X'O'$, $X''O''$,....

Wegen (III) ist aber auch

$$-2.(XA_1\ \ XA_2 \ldots XA_n)^{(2)} = XA_1^2 + XA_2^2 + \ldots + XA_n^2,$$
$$+3.(XA_1\ \ XA_2 \ldots XA_n)^{(3)} = XA_1^3 + XA_2^3 + \ldots + XA_n^3,$$
$$-8.(XA_1\ \ XA_2 \ldots XA_n)^{(4)} = 2.(XA_1^4 + XA_2^4 + \ldots + XA_n^4)$$
$$-(XA_1^2 + XA_2^2 + \ldots + XA_n^2)^2,$$
$$\text{u. s. w.}$$

mithin

$$0 = XO^{n-1} - \frac{n-2}{2.n}.XO^{n-3}.(XA_1^2 + XA_2^2 + \ldots + XA_n^2) \qquad (V)$$
$$-\frac{n-3}{3.n}.XO^{n-4}.(XA_1^3 + XA_2^3 + \ldots + XA_n^3)$$
$$-\frac{n-4}{8.n}.XO^{n-5}.\left\{\begin{matrix}2.(XA_1^4 + XA_2^4 + \ldots + XA_n^4)\\ -(XA_1^2 + XA_2^2 + \ldots + XA_n^2)^2\end{matrix}\right\}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Coefficienten dieser Gleichung lassen sich nun leicht auf diejenige Form bringen, welche für die Auflösung am passendsten ist.

Man zeichne (Taf. I. Fig. 6.) einen Winkel ZXQ von beliebiger Grösse, nehme auf dem einen Schenkel, von der Spitze X ab gerechnet, ein Stück XZ von beliebiger Grösse, und trage dann, ebenfalls von X ab, auf jedem Schenkel eines der Segmente auf. Angenommen, es sei das Segment XA_r auf jedem Schenkel aufgetragen, und dadurch auf dem einen Schenkel der Punkt A_r, auf dem anderen der Punkt Q bestimmt, also $XQ = XA_r$, so verbinde man Z mit Q, und ziehe durch A_r die Linie $A_rZ_r^{(1)}$ parallel zu ZQ; ferner verbinde man Z mit $Z_r^{(1)}$, und ziehe, parallel zu $ZZ_r^{(1)}$, durch A_r die Linie $A_rZ_r^{(2)}$; weiterhin verbinde man Z mit $Z_r^{(2)}$, und ziehe wieder durch A_r die neue Linie $A_rZ_r^{(3)}$ parallel zu $ZZ_r^{(2)}$; u. s. w.

Unter dieser Voraussetzung hat man zwischen dem Segmente XA_r, der willkührlichen Länge XZ, und den Stücken $XZ_r^{(1)}$, $XZ_r^{(2)}$, ... $XZ_r^{(\varrho)}$ folgende Gleichungen:

$$XA_r . XA_r = XZ . XZ_r^{(1)},$$

$$XA_r . XZ_r^{(1)} = XZ . XZ_r^{(2)},$$

$$XA_r . XZ_r^{(2)} = XZ . XZ_r^{(3)},$$

. . . . . .

$$XA_r . XZ_r^{(\varrho-1)} = XZ . XZ_r^{(\varrho)};$$

und wenn man diese durch Multiplication verbindet, so ergiebt sich der Satz:

$$XA_r^{\varrho+1} = XZ^{\varrho} . XZ_r^{(\varrho)}.$$

Verfährt man also in Bezug auf jedes der Segmente XA_1,... in der angegebenen Weise, behält aber die willkührliche Länge XZ unverändert bei, und sucht nur die entsprechenden Stücke $XZ_1^{(\varrho)}$, $XZ_2^{(\varrho)}$,....., so ergiebt sich für die Uebertragung der Summe gleicher Potenzen von den Segmenten XA_1, XA_2... die Norm:

$$XA_1^{\varrho+1} + ... + XA_n^{\varrho+1} = XZ^{\varrho} . (XZ_1^{(\varrho)} + XZ_2^{(\varrho)} + ... + XZ_n^{(\varrho)}),$$

wobei zu bemerken, dass in der Summe

$$XZ_1^{(\varrho)} + XZ_2^{(\varrho)} + ... + XZ_n^{(\varrho)}$$

das Stück $XZ_r^{(\varrho)}$ eben das Zeichen + oder — erhält, welches der Potenz $XA_r^{\varrho+1}$ zukommt.

Diese Reductionsart in ihrer Anwendung auf die Coefficienten der obigen Gleichung (V) für XO führt dahin, dass jeder Coefficient durch einen Ausdruck von der Form

$$XZ^{\varrho} . \lambda$$

ersetzt werden kann, wo λ eine einfache Linie von bestimmter Länge ist, und die Gleichung für XO, wenn man $XZ = p$ setzt, in Rücksicht auf Form und Beschaffenheit der Coefficienten folgende wird:

$$0 = XO^{n-1} - p.a.XO^{n-3} - p^2.b.XO^{n-4} - p^3.c.XO^{n-5} - ..... \quad (VI)$$

Es kommt schliesslich darauf an, die Wurzeln dieser Gleichung durch Zeichnung zu finden.

Zu diesem Ende betrachtet man die Gleichung (V) als dadurch entstanden, dass aus zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen x y die eine dieser Grössen eliminirt worden. Ist

Digitized by Google

die eine dieser Gleichungen vom $m$ten, die andere vom m'ten Grade, so wird die aus der Elimination hervorgehende Gleichung vom $m.m'$ten Grade, oder auch vom $(m.m'-1)$ten, wenn der Coefficient des letzten Gliedes $=0$ ist. Man hat also vor Allem die Werthe von m und m' so festzusetzen, dass $m.m'$ entweder $=n-1$, oder doch $=n$ wird. Die Coefficienten der einen und der anderen Gleichung sind aber so zu wählen, dass das Resultat der Elimination mit (VI) einerlei wird.

Jede dieser zwei Gleichungen betrachtet man nun als einer krummen Linie angehörig, in der Weise aber, dass die Coordinatenaxen der einen zugleich die Axen der anderen Linie sind. Diese Linien zeichnet man so weit als nöthig, um die Durchschnittspunkte derselben zu finden. Von den Coordinaten dieser Durchschnittspunkte sind die zu einer Axe gehörigen zugleich die Werthe von XO, und zwar die x oder die y, je nachdem y oder x durch Elimination entfernt werden muss, um die Gleichung (VI) als Resultat zu erhalten.

Die nöthigen Constructionen gestalten sich in der Anwendung ziemlich einfach. Zunächst ist klar, dass man die willkührliche Linie $XZ=p$ für alle Transversalen $TT'T''$..... unverändert beibehalten kann. Ferner kann man, wenn $XO=y$ gesetzt wird, als die eine der beiden Gleichungen folgende nehmen

$$0=y^2-px,$$

so dass man für alle Transversalen auch mit einer einzigen Parabel ausreicht, und nur noch die zu jeder Transversalen gehörige zweite krumme Linie zu bestimmen bleibt.

Zur Erläuterung mag die Betrachtung einiger Fälle folgen.

Erster Fall. Wenn $n=3$ ist, so erhält man aus (VI)

$$0=XO^2-p.a,$$

In diesem Falle ist das Product $p.a$ durch ein Quadrat h^2 zu ersetzen, und es sind dann $+h$ und $-h$ die Werthe von XO.

Zweiter Fall. Wenn $n=4$ ist, so wird

$$0=XO^3-p.a.XO-p^2.b.$$

Diese Gleichung ist, wenn man $XO=y$ setzt, das Resultat der Elimination von x aus den Gleichungen:

$$0=y^2-p.x,$$

$$0=x^2+y^2-(p+a)x-b.y;$$

von welchen die zweite einem Kreise angehört, dessen Mittelpunkt eine solche Lage hat, dass

Digitized by Google

seine Abscisse $(x) = \frac{p+a}{2}$,

„ Ordinate $(y) = \frac{b}{2}$.

Der Kreis geht durch den Scheitel der Parabel, von dem ab die Coordinaten gezählt werden; daher ist

der Radius des Kreises $= \sqrt{\left(\frac{(p+a)^2+b^2}{4}\right)}$.

Dritter Fall. Wenn $n=5$ ist, also nach (VI) die aufzulösende Gleichung

$$0 = XO^4 - p.a.XO^2 - p^2.b.XO - p^3.c,$$

so sind die Hülfsgleichungen:

$$0 = y^2 - p.x,$$

$$0 = x^2 + y^2 - (p+a)x - b.y - p.c;$$

die zweite gehört wieder einem Kreise an, von dessen Mittelpunkt

die Abscisse $(x) = \frac{p+a}{2}$,

„ Ordinate $(y) = \frac{b}{2}$

ist, und dessen Radius

$$= \sqrt{\left(\frac{(p+a)^2+b^2}{4} + p.c\right)}.$$

Vierter Fall. Die zu $n=6$ gehörige Gleichung

$$0 = XO^5 - p.a.XO^3 - p^2.b.XO^2 - p^3.c.XO - p^4.d$$

ist, wenn man $XO = y$ setzt, das Resultat der Elimination von x aus den Gleichungen

$$0 = y^2 - p.x,$$

$$0 = x^3 - ax^2 - bxy - p.c.x - p.d.y$$

u. s. w.

Digitized by Google

In Taf. II. Fig. 1. ist ein Aggregat von vier geraden Linien AA', BB', CC', DD' vorausgesetzt, welche alle einander durchschneiden. Ein solches Gebilde hat neun Mittelpunkte, unter diesen aber nur drei, welche nicht zugleich Doppelpunkte sind.

Behufs der Bestimmung dieser Punkte sind zwei Diameter dritter Ordnung des Gebildes zu Hülfe genommen, und zwar jene, welche zu den Richtungen der Linien AA' und BB' gehören. Der erste von diesen Diametern besteht aus der Linie AA' und aus dem zur Richtung von AA' gehörigen Diameter zweiter Ordnung des Aggregates der Linien BB', CC', DD'; der zweite besteht aus der Linie BB' und aus dem zur Richtung von BB' gehörigen Diameter zweiter Ordnung des Aggregates der Linien AA', CC', DD'. Die erwähnten Diameter zweiter Ordnung sind Hyperbeln, und zwar sind $\alpha\alpha$ und $\alpha'\alpha'$ die Zweige der einen, $\beta\beta$ und $\beta'\beta'$ die Zweige der anderen Hyperbel. Diese hyperbolischen Zweige durchschneiden einander in den Punkten $P\,P'\,P''$, und diese sind die gesuchten drei Mittelpunkte des vorausgesetzten Gebildes.

Um die genannten Hyperbeln graphisch zu bestimmen, sind zunächst die zu den Richtungen AA' und BB' gehörigen Diameter erster Ordnung aa' und bb' gesucht worden, nach Anleitung der Sätze (IV) für den Fall $n=3$. Der Diameter aa' giebt in jeder zu AA' parallelen Transversalen des Gebildes (BB', CC', DD') unmittelbar den Punkt X an, von welchem ab die verschiedenen Segmente gezählt werden; das Analoge gilt von dem Diameter bb' in Bezug auf die Transversalen des Gebildes (AA', CC', DD').

Angenommen, das Gebilde (BB', CC', DD') werde von einer zu AA' parallelen Transversalen in den Punkten $A_1\,A_2\,A_3$ geschnitten, so hat man, weil X in aa' liegt,

$$XA_1 + XA_2 + XA_3 = 0$$

und nach (V)

$$0 = XO^2 - \frac{1}{6}.(XA_1^2 + XA_2^2 + XA_3^2).$$

Sind nun die Punkte $A_1\,A_2\,A_3$ von einander verschieden, so sucht man durch Zeichnung die Hypotenuse L des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten

$$XA_1 \text{ und } \sqrt{(XA_2^2 + XA_3^2)}$$

sind, sucht ferner den sechsten Theil L' von L, und bestimmt endlich die Hypotenuse λ des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten einander gleich, jeder aber $= L'.\sqrt{3}$, so wird

$$XO^3 - \lambda^2 = 0, \text{ d. i. } XO = \pm\lambda.$$

Fallen von den drei Punkten $A_1\,A_2\,A_3$ zwei zusammen, d. h. geht die Transversale durch einen Doppelpunkt des Gebildes

Digitized by Google

(BB', CC', DD'), so ist keinerlei Zeichnung nöthig. Wenn nämlich $XA_2 = XA_3 = \lambda$ ist, so ist, ohne Rücksicht auf Vorzeichen $XA_1 = 2\lambda'$, folglich

$$XO^2 - \lambda^2 = 0.$$

Das in Bezug auf den Diameter des Gebildes (BB', CC', DD') Bemerkte gilt auch, mutatis mutandis, für das Gebilde (AA', CC', DD').

In Bezug auf die Lage der Punkte $P\,P'\,P''$ ist noch Folgendes zu bemerken. Durch die Linien AA', BB', CC', DD' werden drei Flächenstücke bestimmt, zwei Dreiecke und ein Viereck, welche neben einander liegen, so dass keines als Theil des anderen genommen werden kann. In jedem dieser Flächenstücke liegt aber einer von den Punkten $P\,P'\,P''$.

An einem Gebilde von fünf geraden Linien, welche alle einander durchschneiden, und zwar in 10 verschiedenen Punkten, kann man **sechs** solcher Flächenstücke unterscheiden, welche neben oder ausser einander liegen, und in jedem dieser Flächenstücke hat einer von den sechs Mittelpunkten, welche dem Gebilde zukommen, seine Stelle.

Aehnliches gilt von der Lage der Mittelpunkte eines Gebildes von sechs und mehr geraden Linien.

II.

Einige Bemerkungen über loxodromische Dreiecke im Allgemeinen.

Von

dem Herausgeber.

In meiner „Loxodromischen Trigonometrie. Ein Beitrag zur Nautik. Leipzig. 1849.“ habe ich nur solche loxodromische Dreiecke betrachtet, die auf der Oberfläche des Erdellipsoids von einer loxodromischen Linie und den beiden zwischen deren Endpunkten und dem positiven Pole des Erdellipsoids liegenden Meridianbogen begränzt werden. Dies ist ganz mit Absicht geschehen, weil nur solche loxodromische Dreiecke in der Nautik zur Betrachtung kommen und für den praktischen Gebrauch in derselben von Wichtigkeit sind, ich aber dabei auch die Analogie mit der Sphäroidischen Trigonometrie im Auge hatte, wo man zunächst auch nur solche Dreiecke zu betrachten pflegt, welche auf der Oberfläche des Erdellipsoids von einer geodätischen oder kürzesten Linie und den beiden zwischen deren Endpunkten und dem positiven Pole des Erdellipsoids liegenden Meridianbogen begränzt werden. So wie man aber namentlich in neuerer Zeit bekanntlich viele merkwürdige Untersuchungen über von drei geodätischen oder kürzesten Linien begränzte Dreiecke angestellt hat, so führt auch die Betrachtung von Dreiecken, welche auf der Oberfläche des Erdellipsoids von drei loxodromischen Linien eingeschlossen werden, zu manchen nicht ganz uninteressanten Resultaten, die aber für die nautische Praxis keine Bedeutung haben, und daher der Tendenz meiner oben genannten, namentlich auch für wissenschaftlich gebildete Seeleute bestimmten, und deshalb vorzugsweise nur das auf der See Anwendbare gebenden Schrift fern lagen. Des theoretischen Interesses wegen will ich aber in dem vorliegenden Aufsatze einige Eigenschaften

solcher allgemeineren, von drei loxodromischen Linien auf der Oberfläche des Erdellipsoids eingeschlossenen loxodromischen Dreiecke entwickeln, und werde mich freuen, wenn dadurch vielleicht einer oder der andere Leser des Archivs diesem Gegenstande weiter nachzugehen veranlasst werden sollte, da mir selbst jetzt das wirklich in der Praxis Anwendbare näher liegt.

Es mögen daher jetzt A_0, A_1, A_2 drei durch loxodromische Linien auf der Oberfläche des Erdellipsoids verbundene, und daher die Spitzen eines allgemeinen loxodromischen Dreiecks darstellende Punkte sein. Die Längen und Breiten dieser Punkte sollen, indem ich alle in meiner „Loxodromischen Trigonometrie“ gebrauchten Bezeichnungen wenigstens in analoger Weise auch hier beibehalten werde, respective durch L_0, B_0; L_1, B_1; L_2, B_2 bezeichnet werden. Den von einer loxodromischen Linie mit den sämmtlichen Meridianen eingeschlossenen Winkel, welcher nie grösser als 180^0 und stets so genommen wird, dass er von den Meridianen aus nach der Seite, nach welcher im Aequator die Längen von 0^0 bis 360^0 gezählt werden, von der loxodromischen Linie aus nach der Seite des positiven Pols des Erdellipsoids hin liegt, habe ich a. a. O. S. 17. Nr. 4. den Curs genannt. Nach diesem Begriffe sollen im Folgenden die den loxodromischen Linien oder Distanzen

$$A_1A_2 = s_0,\quad A_2A_0 = s_1,\quad A_0A_1 = s_2$$

entsprechenden Curse respective durch Θ_0, Θ_1, Θ_2 bezeichnet werden. Die Längen sollen in der Ordnung L_0, L_1, L_2 im Folgenden aufsteigend oder wachsend geordnet sein.

In Taf. II. Fig. 2. ist, wenn wir uns die Längen von A_0 aus nach der Seite von A_1 und A_2 hin gezählt denken, nach der Grundeigenschaft der loxodromischen Linie offenbar

$$\begin{aligned}
\angle A_1\,A_0\,A_2 &= \Theta_1 - \Theta_2,\\
\angle A_2\,A_1\,A_0 &= 180^0 - (\Theta_0 - \Theta_2),\\
\angle A_0\,A_2\,A_1 &= \Theta_0 - \Theta_1
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\angle A_1\,A_0\,A_2 &= \Theta_2 - \Theta_1,\\
\angle A_2\,A_1\,A_0 &= 180^0 - (\Theta_2 - \Theta_0),\\
\angle A_0\,A_2\,A_1 &= \Theta_1 - \Theta_0;
\end{aligned}$$

also, wenn man in beiden Fällen addirt:

$$\angle A_1A_0A_2 + \angle A_2A_1A_0 + \angle A_0A_2A_1 = 180^0,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen die Winkel des loxodromischen Dreiecks $A_0A_1A_2$ bloss durch A_0, A_1, A_2 bezeichnen:

$$A_0 + A_1 + A_2 = 180^0,$$

welche Eigenschaft also das allgemeine loxodromische Dreieck mit dem ebenen Dreiecke gemein hat.

Ferner ist nach den Formeln 36a), meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 32.“:

$$L_1 - L_2 = (1-e^2)\tang\Theta_0 \int_{B_2}^{B_1} \frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}\,(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)},$$

$$L_2 - L_0 = (1-e^2)\tang\Theta_1 \int_{B_0}^{B_2} \frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}\,(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)},$$

$$L_0 - L_1 = (1-e^2)\tang\Theta_2 \int_{B_1}^{B_0} \frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}\,(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)}$$

und

$$s_0 = \frac{a(1-e^2)}{\cos\Theta_0} \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$s_1 = -\frac{a(1-e^2)}{\cos\Theta_1} \int_{B_2}^{B_0} \frac{\partial\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$s_2 = \frac{a(1-e^2)}{\cos\Theta_2} \int_{B_0}^{B_1} \frac{\partial\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}};$$

oder

$$(L_1 - L_2)\cot\Theta_0 = (1-e^2) \int_{B_2}^{B_1} \frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}\,(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)},$$

$$(L_2 - L_0)\cot\Theta_1 = (1-e^2) \int_{B_0}^{B_2} \frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}\,(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)},$$

$$(L_0 - L_1)\cot\Theta_2 = (1-e^2) \int_{B_1}^{B_0} \frac{\partial\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}\,(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)};$$

und

$$s_0\cos\Theta_0 = a(1-e^2) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$s_1\cos\Theta_1 = -a(1-e^2) \int_{B_2}^{B_0} \frac{\partial\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$s_2\cos\Theta_2 = a(1-e^2) \int_{B_0}^{B_1} \frac{\partial\bar{\omega}}{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Also ist, wie man sogleich durch Addition findet:

$$(L_1 - L_2)\cot\Theta_0 + (L_2 - L_0)\cot\Theta_1 + (L_0 - L_1)\cot\Theta_2 = 0$$

und

$$s_0\cos\Theta_0 - s_1\cos\Theta_1 + s_2\cos\Theta_2 = 0$$

oder

$$s_0\cos\Theta_0 + s_2\cos\Theta_2 = s_1\cos\Theta_1,$$

wo man auch die Analogie dieser letzten Gleichung mit einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie sogleich erkennen wird.

Ferner ist nach der Formel 52) meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 39.“:

$$L_1 - L_2 = \operatorname{tang}\Theta_0 \left\{ l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)} - \frac{1}{2}\,el\frac{(1+e\sin B_1)(1-e\sin B_2)}{(1-e\sin B_1)(1+e\sin B_2)} \right\},$$

$$L_2 - L_0 = \operatorname{tang}\Theta_1 \left\{ l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)} - \frac{1}{2}\,el\frac{(1+e\sin B_2)(1-e\sin B_0)}{(1-e\sin B_2)(1+e\sin B_0)} \right\},$$

$$L_0 - L_1 = \operatorname{tang}\Theta_2 \left\{ l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)} - \frac{1}{2}\,el\frac{(1+e\sin B_0)(1-e\sin B_1)}{(1-e\sin B_0)(1+e\sin B_1)} \right\};$$

also durch Addition:

$$0 = \operatorname{tang}\Theta_0 \left\{ l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)} - \frac{1}{2}\,el\frac{(1+e\sin B_1)(1-e\sin B_2)}{(1-e\sin B_1)(1+e\sin B_2)} \right\}$$

$$+\tang\Theta_1\left\{\begin{array}{c} l\dfrac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_2)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_0)} \\ -\frac{1}{2}el\dfrac{(1+e\sin B_2)(1-e\sin B_0)}{(1-e\sin B_2)(1+e\sin B_0)}\end{array}\right\}$$

$$+\tang\Theta_2\left\{\begin{array}{c} l\dfrac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_0)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)} \\ -\frac{1}{2}el\dfrac{(1+e\sin B_0)(1-e\sin B_1)}{(1-e\sin B_0)(1+e\sin B_1)}\end{array}\right\}.$$

Für $e=0$, d. h. für den Fall der Kugel, ist:

$$L_1-L_2=\tang\Theta_0 l\frac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_2)},$$

$$L_2-L_0=\tang\Theta_1 l\frac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_2)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_0)},$$

$$L_0-L_1=\tang\Theta_2 l\frac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_0)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)};$$

und wenn man addirt:

$$0=\tang\Theta_0 l\frac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_2)}+\tang\Theta_1 l\frac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_2)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_0)}$$

$$+\tang\Theta_2 l\frac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_0)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)},$$

oder

$$0 = (\text{tag}\,\Theta_0 - \text{tang}\,\Theta_1)\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_2)$$
$$+ (\text{tang}\,\Theta_1 - \text{tang}\,\Theta_2)\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_0)$$
$$+ (\text{tang}\,\Theta_2 - \text{tang}\,\Theta_0)\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_1),$$

oder

$$0 = \sin(\Theta_0 - \Theta_1)\cos\Theta_2\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_2)$$
$$+ \sin(\Theta_1 - \Theta_2)\cos\Theta_0\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_0)$$
$$+ \sin(\Theta_2 - \Theta_0)\cos\Theta_1\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_1).$$

Für $e=0$, d. i. für den Fall der Kugel, ist auch nach der Formel 63) meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 41."

$$s_0 = a(B_2 - B_1)\sec\Theta_0,$$
$$s_1 = -a(B_0 - B_2)\sec\Theta_1,$$
$$s_2 = a(B_1 - B_0)\sec\Theta_2;$$

woraus:

$$\cos\Theta_0 = \frac{a(B_2 - B_1)}{s_0},\quad \cos\Theta_1 = -\frac{a(B_0 - B_2)}{s_1},\quad \cos\Theta_2 = \frac{a(B_1 - B_0)}{s_2};$$

also nach dem Obigen:

$$0 = \frac{B_1 - B_0}{s_2}\sin(\Theta_0 - \Theta_1)\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_2)$$
$$+ \frac{B_2 - B_1}{s_0}\sin(\Theta_1 - \Theta_2)\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_0)$$
$$- \frac{B_0 - B_2}{s_1}\sin(\Theta_2 - \Theta_0)\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_1)$$

oder

$$\frac{B_0 - B_2}{s_1}\sin(\Theta_2 - \Theta_0)\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_1)$$
$$+ \frac{B_2 - B_1}{s_0}\sin(\Theta_1 - \Theta_2)\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_0)$$
$$+ \frac{B_1 - B_0}{s_2}\sin(\Theta_0 - \Theta_1)\,\text{l tang}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}B_2)$$

folgt.

Digitized by Google

Wir wollen jetzt auch den Flächeninhalt loxodromischer Dreiecke, die auf der Oberfläche einer Kugel liegen, bestimmen, und in dieser Beziehung zuerst bloss solche loxodromische Dreiecke betrachten, welche von einer loxodromischen Linie und zwei durch deren Endpunkte und den positiven Pol der Kugel gehenden Meridianbogen eingeschlossen werden.

Der Flächeninhalt der der Breite $\bar{\omega}$ entsprechenden sphärischen Calotte ist nach bekannten Elementarsätzen von der Kugel, wenn wir den Halbmesser der Kugel wie früher durch a bezeichnen:

$$2a^2\pi - 2a\pi . a\sin\bar{\omega} = 2a^2\pi(1-\sin\bar{\omega})$$

$$= 2a^2\pi\{1-\cos(90^0-\bar{\omega})\} = 4a^2\pi\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\bar{\omega})^2.$$

Sind nun ω, $\bar{\omega}$ die Länge und Breite des Endpunkts (in dem Sinne der Richtung genommen, nach welcher die Längen gezählt werden) der das loxodromische Dreieck von der obigen Beschaffenheit, dessen Flächeninhalt wir durch S bezeichnen wollen, theilweise begränzenden loxodromischen Linie; so erhellet mittelst einer einfachen Betrachtung sehr leicht, dass mit desto grösserer Genauigkeit, je näher $\Delta\omega$ und $\Delta\bar{\omega}$ der Null kommen,

$$\Delta S = 4a^2\pi\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\bar{\omega})^2.\frac{\Delta\omega}{2\pi} - \frac{1}{2}.r\cos\bar{\omega}\,\Delta\omega.r\Delta\bar{\omega}$$

oder

$$\Delta S = 2a^2\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\bar{\omega})^2\Delta\omega - \frac{1}{2}r^2\cos\bar{\omega}\,\Delta\omega\Delta\bar{\omega},$$

also

$$\frac{\Delta S}{\Delta\bar{\omega}} = 2a^2\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\bar{\omega})^2\frac{\Delta\omega}{\Delta\bar{\omega}} - \frac{1}{2}r^2\cos\bar{\omega}\,\Delta\omega$$

ist. Lässt man nun $\Delta\bar{\omega}$ sich der Null nähern und geht zu den Gränzen über, so erhält man auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial\bar{\omega}} = 2a^2\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\bar{\omega})^2\frac{\partial\omega}{\partial\bar{\omega}}.$$

Weil nun aber nach der Formel 26) meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 28.“ im Falle der Kugel, d. h. für $a=b$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{\omega}} = \frac{\operatorname{tang}\Theta}{\cos\bar{\omega}}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial S}{\partial\bar{\omega}} = 2a^2\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\bar{\omega})^2\frac{\operatorname{tang}\Theta}{\cos\bar{\omega}},$$

oder

Digitized by Google

$$\partial S = 2a^2 \tang \Theta \frac{\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\bar{\omega})^2}{\cos \bar{\omega}} \partial \bar{\omega},$$

wo natürlich Θ eine constante Grösse ist. Also ist, wenn B, B_1 die Breiten der beiden Endpunkte der das loxodromische Dreieck theilweise begränzenden loxodromischen Linie sind,

$$S = 2a^2 \tang \Theta \int_B^{B_1} \frac{\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\bar{\omega})^2}{\cos \bar{\omega}} \partial \bar{\omega},$$

oder, weil nach dem Obigen

$$\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\bar{\omega})^2 = \tfrac{1}{2}(1 - \sin \bar{\omega}),$$

also

$$\frac{\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\bar{\omega})^2}{\cos \bar{\omega}} = \tfrac{1}{2}(\sec \bar{\omega} - \tang \bar{\omega})$$

ist:

$$S = a^2 \tang \Theta \left(\int_B^{B_1} \sec \bar{\omega}\, \partial \bar{\omega} - \int_B^{B_1} \tang \bar{\omega}\, \partial \bar{\omega} \right).$$

Nun ist aber

$$\int \sec \bar{\omega} \partial \bar{\omega} = \int \frac{\cos \bar{\omega} \partial \bar{\omega}}{1 - \sin \bar{\omega}^2} = \int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{1 - \sin \bar{\omega}^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\{ \int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{1 + \sin \bar{\omega}} + \int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{1 - \sin \bar{\omega}} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \{ l(1 + \sin \bar{\omega}) - l(1 - \sin \bar{\omega}) \}$$

$$= \tfrac{1}{2} l \frac{1 + \sin \bar{\omega}}{1 - \sin \bar{\omega}} = \tfrac{1}{2} l \frac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}\bar{\omega})^2}{\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\bar{\omega})^2}$$

$$= l \cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\bar{\omega}) = l \tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\bar{\omega})$$

und

$$\int \operatorname{tang}\bar{\omega}\,\partial\bar{\omega} = -\int \frac{\partial\cos\bar{\omega}}{\cos\bar{\omega}} = -\mathrm{l}\cos\bar{\omega};$$

also

$$\int_{B}^{B_1} \sec\bar{\omega}\,\partial\bar{\omega} = \mathrm{l}\frac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B)},$$

$$\int_{B}^{B_1} \operatorname{tang}\bar{\omega}\,\partial\bar{\omega} = -\mathrm{l}\frac{\cos B_1}{\cos B};$$

folglich nach dem Obigen

$$S = a^2 \operatorname{tang}\Theta\left\{\mathrm{l}\frac{\cos B_1}{\cos B} + \mathrm{l}\frac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B)}\right\}$$

oder

$$S = a^2 \operatorname{tang}\Theta\,\mathrm{l}\frac{\cos B_1 \operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\cos B \operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B)}.$$

Es ist aber auch

$$\cos B = \sin(90^0+B) = 2\sin(45^0+\tfrac{1}{2}B)\cos(45^0+\tfrac{1}{2}B),$$

$$\cos B_1 = \sin(90^0+B_1) = 2\sin(45^0+\tfrac{1}{2}B_1)\cos(45^0+\tfrac{1}{2}B_1);$$

folglich

$$\cos B \operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}B) = 2\sin(45^0+\tfrac{1}{2}B)^2,$$

$$\cos B_1 \operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}B_1) = 2\sin(45^0+\tfrac{1}{2}B_1)^2;$$

und daher nach dem Obigen:

$$S = 2a^2 \operatorname{tang}\Theta\,\mathrm{l}\frac{\sin(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\sin(45^0+\frac{1}{2}B)}$$

oder

$$S = 2a^2 \tan\Theta \, l \frac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_1)}{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B)}.$$

Bezeichnen wir jetzt den Flächeninhalt des loxodromischen Dreiecks $A_0 A_1 A_2$ in Taf. II. Fig. 3. durch F, so ist in dem ersten der beiden in der Figur dargestellten Fälle nach dem Vorhergehenden:

$$F = a^2 \tan\Theta_1 \, l \frac{\cos B_2 \tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}{\cos B_0 \tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)}$$

$$- a^2 \tan\Theta_0 \, l \frac{\cos B_2 \tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}{\cos B_1 \tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}$$

$$- a^2 \tan\Theta_2 \, l \frac{\cos B_1 \tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}{\cos B_0 \tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)},$$

also, wie sogleich in die Augen fällt:

$$F = a^2 \left\{ \tan\Theta_0 \, l \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + \tan\Theta_1 \, l \frac{\cos B_2}{\cos B_0} + \tan\Theta_2 \, l \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \right.$$

$$\left. - a^2 \left(\tan\Theta_0 \, l \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)} \right.\right.$$

$$+ \tan\Theta_1 \, l \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}$$

$$\left.\left. + \tan\Theta_2 \, l \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)} \right) \right\}.$$

Nach dem Obigen verschwindet aber der ganze zweite, abgezogene, Theil, und es ist also:

$$F=a^2\left\{\tan\Theta_0\,l\frac{\cos B_1}{\cos B_2}+\tan\Theta_1\,l\frac{\cos B_2}{\cos B_0}+\tan\Theta_2\,l\frac{\cos B_0}{\cos B_1}\right\}.$$

Auch findet man mittelst des Obigen sogleich:

$$F=2a^2\left\{\begin{aligned}&\tan\Theta_0\,l\frac{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}\\&+\tan\Theta_1\,l\frac{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}\\&+\tan\Theta_2\,l\frac{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}\end{aligned}\right\}$$

oder

$$F=2a^2\left\{\begin{aligned}&\tan\Theta_0\,l\frac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_1)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_2)}\\&+\tan\Theta_1\,l\frac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_2)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_0)}\\&+\tan\Theta_2\,l\frac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_0)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_1)}\end{aligned}\right\}.$$

In dem zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle ist auf ganz ähnliche Weise:

$$F=a^2\tan\Theta_0\,l\frac{\cos B_2\tan(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}{\cos B_1\tan(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}$$

$$+a^2\tan\Theta_2\,l\frac{\cos B_1\tan(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\cos B_0\tan(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}$$

Digitized by Google

$$-a^2 \tang \Theta_1 \, l \frac{\cos B_2 \tang (45^\circ + \frac{1}{2} B_2)}{\cos B_0 \tang (45^\circ + \frac{1}{2} B_0)},$$

also, wie sogleich erhellet:

$$F = -a^2 \Big\{ \tang \Theta_0 \, l \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + \tang \Theta_1 \, l \frac{\cos B_2}{\cos B_0} + \tang \Theta_2 \, l \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \Big\{$$

$$+ a^2 \Big\{ \tang \Theta_0 \, l \frac{\tang (45_0 + \frac{1}{2} B_2)}{\tang (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}$$

$$+ \tang \Theta_1 \, l \frac{\tang (45^\circ + \frac{1}{2} B_0)}{\tang (45^\circ + \frac{1}{2} B_2)} \Big\},$$

$$+ \tang \Theta_2 \, l \frac{\tang (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\tang (45^\circ + \frac{1}{2} B_0)}$$

also, weil nach dem Obigen der zweite Theil verschwindet:

$$F = -a^2 \Big\{ \tang \Theta_0 \, l \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + \tang \Theta_1 \, l \frac{\cos B_2}{\cos B_0} + \tang \Theta_2 \, l \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \Big\}.$$

Auch findet man mittelst des Obigen sogleich:

$$F = -2a^2 \Big\{ \tang \Theta_0 \, l \frac{\sin (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\sin (45^\circ + \frac{1}{2} B_2)}$$

$$+ \tang \Theta_1 \frac{\sin (45^\circ + \frac{1}{2} B_2)}{\sin (45^\circ + \frac{1}{2} B_0)}$$

$$+ \tang \Theta_2 \, l \frac{\sin (45^\circ + \frac{1}{2} B_0)}{\sin (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)} \Big\}$$

oder

$$F = -2a^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \Theta_0 \, l \, \dfrac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_1)}{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_2)} \\ + \text{tang } \Theta_1 \, l \, \dfrac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_2)}{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_0)} \\ + \text{tang } \Theta_2 \, l \, \dfrac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_0)}{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_1)} \end{array} \right\}.$$

Folglich ist, wenn man nur immer das Zeichen so nimmt, dass F positiv wird, allgemein:

$$F = \pm a^2 \left\{ \text{tang } \Theta_0 \, l \, \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + \text{tang } \Theta_1 \, l \, \frac{\cos B_2}{\cos B_0} + \text{tang } \Theta_2 \, l \, \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \right\},$$

oder

$$F = \pm 2a^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \Theta_0 \, l \, \dfrac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)} \\ + \text{tang } \Theta_1 \, l \, \dfrac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)} \\ + \text{tang } \Theta_2 \, l \, \dfrac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)}{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)} \end{array} \right\}$$

oder

$$F=\pm 2a^2\left\{\begin{array}{l}\text{tang}\,\Theta_0\,l\dfrac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_1)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_2)}\\ +\text{tang}\,\Theta_1\,l\dfrac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_2)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_0)}\\ +\text{tang}\,\Theta_2\,l\dfrac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_0)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_1)}\end{array}\right\}.$$

Auch ist

$$F=\pm a^2\left\{l.\left(\frac{\cos B_1}{\cos B_2}\right)^{\text{tang}\,\Theta_0}+l.\left(\frac{\cos B_2}{\cos B_0}\right)^{\text{tang}\,\Theta_1}+l.\left(\frac{\cos B_0}{\cos B_1}\right)^{\text{tang}\,\Theta_2}\right\},$$

oder

$$F=\pm a^2 l\left\{\left(\frac{\cos B_1}{\cos B_2}\right)^{\text{tang}\,\Theta_0}\left(\frac{\cos B_2}{\cos B_0}\right)^{\text{tang}\,\Theta_1}\left(\frac{\cos B_0}{\cos B_1}\right)^{\text{tang}\,\Theta_2}\right\},$$

oder

$$F=\pm a^2 l\left\{\cos B_0^{\,\text{tg}\,\Theta_2-\text{tg}\,\Theta_1}\cos B_1^{\,\text{tg}\,\Theta_0-\text{tg}\,\Theta_2}\cos B_2^{\,\text{tg}\,\Theta_1-\text{tg}\,\Theta_0}\right\},$$

oder

$$F=\pm a^2 l\left\{\cos B_0^{\frac{\sin(\Theta_2-\Theta_1)}{\cos\Theta_2\cos\Theta_1}}\cos B_1^{\frac{\sin(\Theta_0-\Theta_2)}{\cos\Theta_0\cos\Theta_2}}\cos B_2^{\frac{\sin(\Theta_1-\Theta_0)}{\cos\Theta_1\cos\Theta_0}}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen

$$\text{tang}\,\Theta_0=\frac{L_1-L_2}{l\dfrac{\text{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\text{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)}},$$

$$\text{tang}\,\Theta_1=\frac{L_2-L_0}{l\dfrac{\text{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)}{\text{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_0)}},$$

$$\tang\Theta_2 = \frac{L_0 - L_1}{\left|\frac{\tang\left(45^0 + \frac{1}{2}B_0\right)}{\tang\left(45^0 + \frac{1}{2}B_1\right)}\right.}$$

ist, so ist auch

$$F = \pm 2a^2 \left\{ \begin{array}{l} (L_0 - L_1) \left|\frac{\sin\left(45^0 + \frac{1}{2}B_0\right)}{\sin\left(45^0 + \frac{1}{2}B_1\right)}\right| \frac{\tang\left(45^0 + \frac{1}{2}B_0\right)}{\tang\left(45^0 + \frac{1}{2}B_1\right)} \\ + (L_1 - L_2) \left|\frac{\sin\left(45^0 + \frac{1}{2}B_1\right)}{\sin\left(45^0 + \frac{1}{2}B_2\right)}\right| \frac{\tang\left(45^0 + \frac{1}{2}B_1\right)}{\tang\left(45^0 + \frac{1}{2}B_2\right)} \\ + (L_2 - L_0) \left|\frac{\sin\left(45^0 + \frac{1}{2}B_2\right)}{\sin\left(45^0 + \frac{1}{2}B_0\right)}\right| \frac{\tang\left(45^0 + \frac{1}{2}B_2\right)}{\tang\left(45^0 + \frac{1}{2}B_0\right)} \end{array} \right\}$$

oder

Digitized by Google

$$F = \pm 2a^2 \Big\{ (L_0 - L_1) \frac{\mathrm{l}\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_0) - \mathrm{l}\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}{\mathrm{l}\tan\mathrm{g}(45^\circ + \frac{1}{2}B_0) - \mathrm{l}\tan\mathrm{g}(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}$$

$$+ (L_1 - L_2) \frac{\mathrm{l}\sin(45_0 + \frac{1}{2}B_1) - \mathrm{l}\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}{\mathrm{l}\tan\mathrm{g}(45^\circ + \frac{1}{2}B_1) - \mathrm{l}\tan\mathrm{g}(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}$$

$$+ (L_2 - L_0) \frac{\mathrm{l}\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_2) - \mathrm{l}\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)}{\mathrm{l}\tan\mathrm{g}(45^\circ + \frac{1}{2}B_2) - \mathrm{l}\tan\mathrm{g}(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)} \Big\}$$

Durch diese bemerkenswerthe Formel wird also der Flächeninhalt des loxodromischen Dreiecks auf der Kugel bloss durch die Längendifferenzen und die Breiten seiner drei Spitzen ausgedrückt.

Ich will jetzt diese Betrachtungen, ungeachtet ihres theoretischen Interesses, nicht weiter fortsetzen, weil sie eine praktische Anwendung nicht darbieten, bemerke aber noch, dass sich auch der Flächeninhalt eines allgemeinen loxodromischen Dreiecks auf der Oberfläche eines Ellipsoids ganz auf ähnliche Art wie vorher bei loxodromischen Dreiecken auf der Kugel ermitteln lassen würde; indess können die Integrale, auf welche diese Untersuchung führt, nur durch unendliche Reihen dargestellt werden, und ich will daher die Mittheilung derselben lieber einem spätern besondern Aufsatze vorbehalten, wenn es mir gelungen sein wird, durch das Vorhergehende das Interesse der Leser für diese Untersuchungen vielleicht einigermaassen in Anspruch zu nehmen.

Digitized by Google

III.

Ueber die Aufstellung des Messtisches über einem auf der Erde gegebenen Punkte.

Von dem

Herausgeber.

Der Gebrauch des Messtisches erfordert bekanntlich fast immer, denselben so aufzustellen, dass ein auf dem Tische gegebener Punkt lothrecht über einem auf der Erde gegebenen Punkte sich befindet, dabei aber auch zugleich der Tisch horizontal steht, und eine durch den auf dem Tische gegebenen Punkt gehende gegebene gerade Linie auf dem Tische nach einem zweiten auf der Erde gegebenen Punkte gerichtet ist. Zur Lösung dieser Aufgabe bedient man sich bekanntlich des einfachen Instruments, welches man eine Einloth-Gabel oder Einloth-Zange zu nennen pflegt. Wer aber mit der Messtisch-Praxis gehörig vertraut ist, wird mir hoffentlich darin beistimmen, dass auch ungeachtet des Gebrauchs der Gabel oder Zange die genaue Lösung dieser Aufgabe immer mit Schwierigkeiten verbunden ist, und dass man sich meistens mit einem blossen „Beinahe“ zu begnügen gezwungen ist. Auch sagt ja u. A. schon Böhm in seiner, praktischen Feldmessern immer noch zu empfehlenden Gründlichen Anleitung zur Messkunst auf dem Felde. Dritte Auflage von J. G. J. Cämmerer. Frankfurt a. M. 1807. S. 191.: „Den Messtisch in dem Punkte *B* auf der Erde so aufzustellen, dass derselbe zu gleicher Zeit horizontal stehe, wenn der Punkt *b* auf dem Tische über *B* auf dem Felde und die Linie *ab* des Tisches in einer bestimmten durch *bB* gehenden Vertikalebene liegt, sei eine allerdings nicht ohne Uebung und grosse Aufmerksamkeit aufzulösende Aufgabe.“ Der Grund der Schwie-

Digitized by Google

rigkeit dieser Aufgabe liegt, wie ein Jeder gleich übersieht, lediglich in dem Umstande, dass sich der Tisch nach der gewöhnlichen Einrichtung nur um seinen Mittelpunkt, d. h. bloss centrisch, nicht auch excentrisch drehen lässt, und es hat daher nicht an Vorschlägen gefehlt, diesem Uebelstande durch verschiedene besondere Einrichtungen des Tisches abzuhelfen. Man hat das Tischblatt in einem Rahmen verschiebbar gemacht, ein Vorschlag, der, wenn ich mich recht erinnere, zuerst von Bugge gemacht worden ist, und sich bei mehreren älteren Messtischen, die mir vorgekommen sind, in Ausführung gebracht findet; ja man hat sogar vorgeschlagen, den Messtisch nach Art einer Zollmannischen Scheibe zu gebrauchen, d. h. alle Winkel mittelst des Diopterlineals oder der Kippregel an den Mittelpunkt des Tisches, in welchem ein Stift eingeschlagen wird, anzutragen, und dieselben dann durch Parallellinien mittelst der dazu erforderlichen bekannten einfachen Werkzeuge (M. s. z. B. Neueste Versuche zur Erleichterung der praktischen Geometrie, von Voigt, Conrector in Quedlinburg. Leipzig. 1792.) oder mit Hülfe eines dreibeinigen Zirkels (M. s. z. B. Beiträge zur Beförderung geometrischer und geographischer Messungen für diejenigen, welche dergleichen Geschäfte zu leiten haben, von Tabor. Frankfurt a. M. 1804.) an die auf dem Tische gegebenen Punkte zu übertragen. Wie unpraktisch Vorschläge der letzteren Art, und wie wenig förderlich dieselben der grossen Genauigkeit sind, welche sich bei richtigem Gebrauche mit dem Messtische allerdings erreichen lässt, übersieht ein Jeder auf den ersten Blick, und solche künstliche mechanische Einrichtungen, wie die ersteren, halte ich für eben so wenig praktisch, da sie der so überaus nöthigen und wichtigen Festigkeit und Solidität des Tisches schaden, und doch auch nicht alle von ihnen gehoffte Bequemlichkeit und Sicherheit darbieten. Dass der Tisch bloss um seinen Mittelpunkt drehbar sei und bleibe, scheint mir eine Einrichtung zu sein, die man nie und nimmermehr verlassen darf, wenn man nicht der Genauigkeit der so vielen schönen Arbeiten, welche sich mit dem Messtische ausführen lassen, wesentlichen Eintrag thun will. Aber dann freilich bleibt immer die Nothwendigkeit einer zweckmässigen Lösung der fraglichen Aufgabe; denn sich mit einem blossen „Beinahe“ zu begnügen, und sich bei der ziemlich allgemein verbreiteten Meinung zu beruhigen, dass eine einigermassen excentrische Aufstellung des Messtisches der Genauigkeit der Operationen nicht schade, scheint mir wenigstens dem Wesen einer strengen Wissenschaft nicht angemessen zu sein, indem man gar nicht wissen kann, wie weit bei oft so complicirten Operationen kleine Fehler in der Aufstellung des Tisches sich fortpflanzen. Ich stehe nicht an, die Ueberzeugung auszusprechen, dass eine stets genau richtige Aufstellung des Messtisches über dem eigentlichen Stationspunkte der Genauigkeit und Sicherheit der Operationen (z. B. bei Aufnahmen aus dem Umfange) mit diesem, besonders bei seinen neueren schönen Einrichtungen zur Horizontalstellung der Planchette, zur feinen Horizontalbewegung, bei den neueren Verbesserungen der Kippregel, dass man z. B. nicht das Ocular nebst seinem Fadenkreuze, sondern vielmehr das Objectiv mittelst einer feinen Schraube beweglich einrichtet, u. s. w., in vielen Beziehungen so ausgezeichneten und der geometrischen Schärfe sich so sehr nähernden Instrumente wesentlich

Digitized by Google

förderlich sein wird. Ja ich glaube mit Recht sagen zu können, dass sich bei richtigem Gebrauche mit dem Messtische mit einer gewissen Eleganz arbeiten lässt, und eben um diese Eleganz bei den Messtischarbeiten zu erhöhen, habe ich mich, wie ich nicht leugne, ziemlich lange damit beschäftigt, ein zweckmässiges und völlig sicheres Verfahren zur richtigen Aufstellung des Tisches aufzufinden. Manches hat sich mir seit dem öfter wiederholten Nachdenken über diesen Gegenstand dargeboten; aber endlich bin ich bei einem Verfahren stehen geblieben, welches ich im Folgenden in der Kürze beschreiben will, ohne dass ich es für nöthig halte, mich auf die Erläuterung seiner Gründe einzulassen, da es an sich so höchst einfach ist, dass die Gründe ein Jeder sogleich selbst übersehen wird. So einfach die Sache auch an sich ist, so halte ich sie doch für hinreichend wichtig, um die Mittheilung des in Rede stehenden Verfahrens an diesem Orte zu rechtfertigen, und glaube überzeugt sein zu dürfen, dass ein Jeder, wer dieses Verfahren bei seinen Arbeiten nur einmal in Anwendung gebracht hat, es nie wieder verlassen wird. Es sollte mich fast nicht wundern, wenn dasselbe schon bekannt wäre, was mich aber nicht hindern kann, es hier mitzutheilen, da ich wenigstens mich nicht erinnere, in der mir zu Gebote stehenden ziemlich reichen Literatur desselben schon früher Erwähnung gethan gefunden zu haben.

Der Mittelpunkt des Tischblattes muss genau bezeichnet sein, wozu aber zwei kleine sich durchkreuzende Bleistiftlinien völlig hinreichen. Unten am Stative zwischen den Füssen des Tisches, möglichst genau im Mittelpunkte der Drehung des Tisches, und also übereinstimmend mit dem auf dem Tischblatte bezeichneten Mittelpunkte desselben, den wir im Folgenden der Kürze wegen *M* nennen wollen, muss ein Häckchen oder eine andere derartige einfache Einrichtung angebracht sein, um daran ein fast bis auf den Erdboden reichendes Loth aufhängen zu können.

Der Stationspunkt auf dem Erdboden sei *A*, und *B* sei ein zweiter Punkt auf der Erde, nach welchem von *A* aus die gerade Linie *AB* gerichtet ist. Ein auf dem Messtische gegebener Punkt sei *a* und *ab* sei eine von demselben ausgehende gerade Linie, welche gleichfalls auf dem Messtische gegeben ist. Man soll den Tisch so aufstellen, dass das Tischblatt horizontal ist, der Punkt *a* sich lothrecht über *A* befindet, und die gerade Linie *ab* auf dem Messtische der Linie *AB* auf dem Felde entspricht, oder die Linie *ab* auf dem Tische nach dem Punkte *B* auf dem Felde orientirt ist.

Dies zu bewerkstelligen, stelle man den Tisch mittelst des im Mittelpunkte der Drehung hängenden Lothes so auf, dass der Mittelpunkt *M* der Planchette lothrecht über *A* steht, und bringe das Tischblatt mittelst der bekannten drei Messing-Schrauben zur feinen Horizontalstellung, die bei der hier vorhabenden Operation wo möglich nicht fehlen dürfen, und des Niveaus in horizontale Lage, zwei Erfordernisse, denen mit der grössten Leichtigkeit und Genauigkeit zugleich entsprochen werden kann. Hierauf lege man die Kippregel an *ab* und orientire den Tisch mittelst der Mikrometerschraube oder der Schraube ohne Ende genau nach *B*. Dann lege man die Kippregel an *aM*,

und trage die Linie aM von M aus auf der entgegengesetzten Seite dieses Punktes an die Kippregel an, wodurch man in der Richtung der Kippregel auf dem Messtische einen auf der entgegengesetzten Seite von M ebenso weit von M wie a entfernten Punkt a' erhält. Diesen Punkt a' lothe man mittelst der Gabel auf den Erdboden ab, wodurch man auf letzterem den dem Punkte a' entsprechenden Punkt A' erhält. Nun nehme man den Messtisch weg, stelle ihn vermittelst des im Mittelpunkte der Drehung hängenden Lothes so auf, dass der Mittelpunkt M der Planchette lothrecht über A' steht, und bringe das Tischblatt mittelst der bekannten drei Schrauben und des Niveaus in horizontale Lage. Endlich lege man die Kippregel wieder an ab und orientire den Tisch, ohne denselben sonst im Geringsten zu verrücken, genau nach B, so wird man jederzeit zugleich das Loth der in den Punkt a gebrachten Gabel mit aller irgend erforderlichen Genauigkeit über dem auf dem Erdboden gegebenen Stationspunkte A einspielen sehen, und hierdurch also eine völlig genaue Aufstellung des Tisches bewirkt sein. Angenommen wird hierbei, dass der Punkt B eine merklich grosse Entfernung von dem Punkte A habe, was man aber bei Operationen mit dem Messtische, namentlich bei Anwendung der mit einem Fernrohr versehenen Kippregel, anzunehmen gewiss immer vollkommen berechtigt sein wird.

Bemerken will ich übrigens, dass man, nachdem man den Mittelpunkt des Tisches lothrecht über A gebracht und das Tischblatt horizontal gestellt hat, wenn man mit völliger geometrischer Strenge verfahren wollte, eigentlich erst durch M eine Parallele mit ab auf dem Tischblatte ziehen, die Kippregel an diese Parallele legen, den Tisch nach B orientiren, und dann weiter wie vorher verfahren müsste. Das Unpraktische dieser Procedur liegt aber zu sehr auf der Hand, als dass ich darüber noch ein Wort verlieren sollte, und auch durch das erstere Verfahren wird man sich hoffentlich, wenn nur der Punkt B ziemlich weit entfernt ist, was die zuletzt erreichte vollkommen richtige Stellung des Tisches betrifft, stets vollkommen befriedigt finden.

Freilich aber wird man gegen das angegebene Verfahren sogleich zwei Einwände machen.

Erstens, wird man sagen, ist das zweimalige Aufstellen des Tisches auf demselben Stationspunkte zeitraubend. Hierauf kann ich nichts weiter entgegnen, als dass nach meiner Erfahrung dieses zweimalige Aufstellen des Tisches auf demselben Stationspunkte, in der Weise nämlich wie es oben gelehrt worden ist, nicht zeitraubender ist als das gewöhnliche Verfahren durch mehrfaches Probiren und das dadurch nöthig gemachte öftere Verrücken des Tisches, dass aber, wenn auch selbst das vorgeschlagene neue Verfahren etwas mehr Zeit als das gewöhnliche kosten sollte, man dafür durch die völlig regelrechte und sichere Procedur bei dem neuen Verfahren und die grössere Genauigkeit des Endresultats vollkommen entschädigt wird.

Digitized by Google

Zweitens, wird man einwenden, entspricht das Uebertragen der Entfernung aM nach $a'M$ an der an aM liegenden Kippregel nur wenig einer gesunden Praxis. Auch dies zuzugeben, bin ich im Ganzen geneigt, glaube aber, dass sich diesem Uebelstande durch eine neue Einrichtung der Gabel vollkommen abhelfen lässt. Ich würde nämlich der Gabel etwa die in Taf. II. Fig. 3. dargestellte Einrichtung geben. An der gewöhnlichen Gabel ist ein Lineal oder eine Regel $\gamma\gamma'$ angebracht, die in ihrem Mittelpunkte α und in zwei andern zweckmässig gelegenen Punkten β, β' drei ganz kleine völlig gleich lange Spitzen, mit denen die Regel an die Kippregel angelegt werden kann, hat, und eine hinreichend weit getriebene Maasseintheilung trägt, die ihren Nullpunkt bei α hat und von da an nach γ und γ' hin aufgetragen ist. Der Punkt δ, in welchem das Loth hängt, muss bei dem Gebrauche der Gabel an der horizontal gestellten Planchette genau vertikal unter der Spitze α liegen. Der obere Arm der Gabel muss aber in einer Nuthe, an der eigentlich die Regel befestigt ist, etwas verschiebbar sein, und sich mittelst einer oder besser zweier Schrauben, die in der Figur angedeutet sind, in der Nuthe feststellen lassen, weil ohne diese Einrichtung die Spitze α nicht genau an den Mittelpunkt M der Planchette würde gebracht werden können, was, wie sich gleich nachher zeigen wird, erforderlich ist. Der Gebrauch dieser Einrichtung der Gabel bei dem in Rede stehenden Uebertragen von aM nach $a'M$, wobei natürlich die Regel an der an aM gelegten Kippregel und die Spitze α an dem Mittelpunkte M des Tischblattes liegen muss, und dem darauf folgenden Ablothen des Punktes a' auf den Erdboden, wodurch man auf letzterem den a' entsprechenden Punkt A' erhält, wird einem Jeden sogleich erhellen, ohne dass ich darüber noch Etwas zu sagen brauche. Die richtigen Verhältnisse der einzelnen Theile der Gabel zu den Dimensionen der Planchette wird jeder geschickte Mechanikus gleichfalls selbst zu treffen wissen. Nur auf den folgenden Punkt darf ich nicht unterlassen noch aufmerksam zu machen.

Bei dem Ablothen eines auf dem Tische gegebenen Punktes auf den Erdboden sind nämlich oft die Füsse des Tisches und andere Theile des Stativs hinderlich. Dieser Fall kann also auch eintreten, wenn man bei dem in Vorschlag gebrachten neuen Verfahren den Punkt a' auf den Erdboden ablothen soll, um den neuen Aufstellungspunkt A' des Mittelpunkts des Tisches zu erhalten, aber auch nur dann, weil das neue Verfahren sonst das Ablothen keines anderen Punktes auf den Erdboden in Anspruch nimmt. Diesem Uebelstande lässt sich aber bei dem neuen Verfahren sehr leicht begegnen, wenn man nur an der an aM liegenden Kippregel einen anderen Punkt als a' aufsucht, welcher sich, ohne jenes Hinderniss, bequem auf den Erdboden ablothen lässt, und bei zweckmässiger Einrichtung des Stativs des Messtisches gewiss immer gefunden werden kann. Bezeichnen wir diesen Punkt durch a'', und lothen ihn auf den Erdboden ab, wodurch wir auf letzterem den Punkt A'' erhalten, so brauchen wir nur an der Skale der Regel der Gabel, die an der Kippregel liegt, die Entfernung des Punktes a'' von a', d. h. die Linie $a''a'$, zu messen, und eine derselben gleiche Linie auf dem Erdboden von A'' an auf der auf dem Erdboden gegebenen Linie AA'' nach der

gehörigen Richtung hin abzumessen, so ist der Endpunkt dieser abgemessenen Linie der gesuchte Punkt *A'*, wie auf der Stelle erhellet. Also auch dem bei dem gewöhnlichen Verfahren öfters eintretenden Uebelstande, dass die Füsse des Tisches oder andere Theile des Stativs einem genauen Ablothen der Punkte auf dem Tische auf den Erdboden hinderlich sind, wird durch das neue Verfahren so gut wie ganz abgeholfen, was demselben vielleicht auch zu einiger Empfehlung dienen wird.

Ich glaube, dass man dem hier besprochenen Gegenstande in neuerer Zeit zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt, und sich zu sehr bei dem Glauben beruhigt hat, dass nicht sehr grosse Excentricitätsfehler bei der Aufstellung des Tisches der Genauigkeit der Operationen keinen wesentlichen Eintrag thun*). Ich halte den Messtisch bei richtiger Anwendung und recht zweckmässiger Einrichtung für ein sehr genaues geometrisches Constructions-Instrument, und bin daher der Meinung, dass man alle Quellen, aus denen Fehler entspringen können, soviel als irgend möglich zu verstopfen suchen muss. Ein kleiner Mehraufwand von Zeit, wenn derselbe sich wirklich ergeben sollte, darf dabei nicht in Anschlag gebracht werden. Leider wird, wenigstens in einigen Ländern, der Messtisch jetzt bei Weitem nicht mehr so häufig in Anwendung gebracht wie früher, und droht fast ganz durch andere Instrumente, namentlich durch die Boussole, verdrängt zu werden. Ohne manche von der Boussole, bei welcher allerdings namentlich Excentricitätsfehler in der Aufstellung nicht vorkommen können, dargebotene Vortheile irgend in Abrede stellen zu wollen, vermag ich die Einführung dieses Instruments auf Kosten des Messtisches doch nicht für einen Fortschritt in den Vermessungsgeschäften zu erkennen, und wünsche sehr, dass der Messtisch wieder allgemeiner in Gebrauch kommen möge, wie dies auch in manchen Ländern, so viel ich weiss z. B. in Sachsen und Hessen, auch in Oesterreich, mit Recht immer noch der Fall ist. Die obigen Zeilen haben ihren Zweck erreicht, wenn sie dazu Einiges beizutragen geeignet sein sollten.

---

*) In dem Handbuch des Feldmessens und Nivellirens in den gewöhnlichen Fällen von Crelle. Berlin. 1826. 8. S. 82. heisst es z. B.: „Da es aber auf eine solche Genauigkeit selten ankommt, indem es in den meisten Fällen nur einen unmerklichen Unterschied macht, wenn der Punkt auf dem Messtische selbst um einen Fuss spitwärts über dem zugehörigen Punkte am Boden liegt, so ist die Einlothzange eigentlich in der Regel nicht nöthig, und ihr Gebrauch verursacht nur Aufenthalt“ eine Ansicht, der ich durchaus nicht beistimmen kann, denn die Natur des Messtisches erfordert geometrische Genauigkeit. Die so sehr grosse Genauigkeit und Sorgfalt erfordernden Umfangs-Messungen, die man doch öfters nicht umgehen kann, habe ich schon oben besonders hervorgehoben.

Digitized by Google

IV.

Ueber die Bewegung einer Magnetnadel unter dem Einflusse eines unbegränzten galvanischen Stroms.

Von

Herrn Doctor J. Dienger,

Professor an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

---

§. 1.

NS (Taf. II. Fig. 4.) sei eine Magnetnadel, deren Mitte O sei, $ON=OS=l$; in R stehe auf der Ebene der Figur, in der allein die Nadel sich drehen könne, ein unbegränzter Draht senkrecht, in welchem ein positiver galvanischer Strom abwärts steige. Ist N der Nordpol der Nadel, S ihr Südpol, so sucht der Strom den Pol N senkrecht auf NR nach aussen (rechts), den Pol S, senkrecht auf RS nach aussen (links) zu bewegen. Ist μ eine Konstante, so ist die in N wirkende Kraft bekanntlich gleich $\frac{\mu}{NR}$, die in S wirkende $\frac{\mu}{NS}$. Ist der Winkel NOR, den am Ende der Zeit t die Nadel mit der Linie OR, die wir als Axe der x annehmen, bildet, gleich α, und nehmen wir OB als Axe der y an, so ist

$$NR^2=a^2+l^2-2al\cos\alpha,\quad NS^2=a^2+l^2+2al\cos\alpha, \qquad (1)$$

wenn $OR=a$ gesetzt wird.

Die Koordinaten des Punktes R sind $l\cos\alpha$, $l\sin\alpha$; somit ist die Gleichung der Linie RN:

$$y - l\sin\alpha = \frac{l\sin\alpha}{l\cos\alpha - a}(x - l\cos\alpha),$$

die Gleichung der im Punkte N darauf Senkrechten somit

$$y - l\sin\alpha = \frac{a - l\cos\alpha}{l\sin\alpha}(x - l\cos\alpha). \qquad (2)$$

Fällt man vom Punkte O auf diese letztere Linie eine Senkrechte, so ist deren Länge:

$$\pm \frac{l^2\sin^2\alpha - al\cos\alpha + l^2\cos^2\alpha}{l\sin\alpha\sqrt{1 + \left(\frac{a - l\cos\alpha}{l\sin\alpha}\right)^2}}$$

$$= \pm \frac{l^2 - al\cos\alpha}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos\alpha}} = \pm \frac{l(l - a\cos\alpha)}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos\alpha}}. \qquad (3)$$

Man zerlege nun die in N wirkende Kraft in zwei andere, wovon die eine P senkrecht auf ON, die andere Q nach ON gerichtet ist. Das Moment der ersten in Bezug auf O ist Pl. Dieses Moment wird auch gefunden, wenn man die Kraft in N multiplizirt mit der Länge (3), d. h. es ist

$$\pm \frac{\mu}{\sqrt{a^2 + l^2 - 2al\cos\alpha}} \cdot \frac{l(l - a\cos\alpha)}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos\alpha}}$$

$$= \pm \frac{\mu l(l - a\cos\alpha)}{a^2 + l^2 - 2al\cos\alpha}.$$

Um das Vorzeichen zu bestimmen, setze man $\alpha = 0$, so ist das Moment:

$$\pm \frac{\mu l(l - a)}{(a - l)^2}.$$

Da dasselbe die Nadel rückläufig (d. h. umgekehrt, wie die Zeiger einer Uhr) zu drehen strebt, und $a > l$, so ist das obere Zeichen zu wählen, so dass das Moment (Kräftepaar), welches in N die Nadel rechtläufig zu drehen strebt, ist:

$$\frac{\mu l(l - a\cos\alpha)}{a^2 + l^2 - 2al\cos\alpha}.$$

Ganz eben so findet man für das Kräftepaar, das in S die Nadel rechtläufig zu drehen strebt:

$$\frac{-\mu l(l + a\cos\alpha)}{a^2 + l^2 + 2al\cos\alpha}.$$

Das Gesammtmoment, das die Nadel rechtläufig zu drehen strebt, ist also

Digitized by Google

$$\frac{\mu l(l-a\cos\alpha)}{a^2+l^2-2al\cos\alpha}-\frac{\mu l(l+a\cos\alpha)}{a^2+l^2+2al\cos\alpha}=\frac{2\mu l(l^2-a^2)a\cos\alpha}{(a^2+l^2)^2-4a^2l^2\cos^2\alpha}.$$

Da diese Grösse negativ ist, so sucht also die Nadel sich rückläufig zu bewegen, d. h. den Winkel α zu vergrössern. Ist somit k das Trägheitsmoment der Nadel, in Bezug auf O, so ist die Gleichung der Bewegung:

$$k\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=\frac{2\mu l(a^2-l^2)a\cos\alpha}{(a^2+l^2)^2-4a^2l^2\cos^2\alpha}=\frac{2\mu l(a^2-l^2)a\cos\alpha}{(a^2-l^2)^2+4a^2l^2\sin^2\alpha}. \quad (4)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{k}{2\mu}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2al\sin\alpha}{a^2-l^2}\right)+C.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit $\left(=\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)$ im Anfange der Bewegung, für welche $\alpha=\gamma$ sei, Null, so ergiebt sich

$$\frac{k}{2\mu}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha-\sin\gamma)}{(a^2-l^2)^2+4a^2l^2\sin\alpha\sin\gamma)}\right); \quad (5)$$

durch welche Gleichung die Winkelgeschwindigkeit $\left(=\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right.$, in so ferne sie α zu vergrössern strebt) gegeben ist. Daraus folgt nun zunächst, dass, wenn $l=a$, d. h. wenn der Punkt R auf dem Umfange des Kreises ist, den die Pole der Nadel beschreiben, keine Bewegung Statt hat, wo auch anfänglich die Nadel sich befinde, so dass sie also in jeder Lage in Ruhe bleibt, was auch aus (4) folgt. Ist ferner $a>l$, d. h. der Punkt R ausserhalb des Kreises, so folgt aus (4), dass die Nadel anfängt sich nach rechts zu bewegen (rückläufig), wenn $\gamma<\frac{\pi}{2}$, und aus (5) folgt, dass immer $\alpha>\gamma$ sein wird. Ist dagegen $a<l$, d. h. R innerhalb des Kreisumfangs, so wird die Nadel sich anfänglich links bewegen, wenn $\gamma<\frac{\pi}{2}$, und immer $\alpha<\gamma$ sein. Aus (5) ergiebt sich ferner, dass wenn

$a>l$, die Nadel zwischen $\alpha=\gamma$ und $\alpha=\pi-\gamma$ hin- und herschwankt,
$a<l$, „ „ „ $\alpha=\gamma$ „ $\alpha=-(\pi+\gamma)$ „ „ .

Im letztern Falle wird aber der Draht die Bewegung der Nadel hemmen, wenn nicht γ schon negativ ist. R liegt dabei immer auf der Linie OA.

Aus (5) folgt nun

Digitized by Google

$$\sqrt{\frac{2\mu}{k}}\,t=\int_{\gamma}^{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{\text{arc.}\left(\text{tg}=\frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha-\sin\gamma)}{(a^2-l^2)^2+4a^2l^2\sin\alpha\sin\gamma}\right)}};\qquad(6)$$

woraus die Zeit t bestimmt wird. Ist $a>l$, so ist die Zeit, welche von einer äussersten Lage zur andern verschwindet:

$$\sqrt{\frac{k}{2\mu}}\cdot\int_{\gamma}^{\pi-\gamma}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha-\sin\gamma)}{(a^2-l^2)^2+4a^2l^2\sin\alpha\sin\gamma}\right)}}.\qquad(7)$$

Für den besonderen Fall, dass $\gamma=0$, ist diese Grösse:

$$\sqrt{\frac{k}{2\mu}}\cdot\int^{\pi}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2al\sin\alpha}{a^2-l^2}\right)}}.\qquad(7')$$

Aus (5) folgt, dass die rückkehrende Bewegung der hingehenden gleich ist, ja dass die beiden Hälften jeder dieser Bewegungen gleich sind, d. h. die Bewegung ist der eines Pendels ähnlich.

§. 2.

Im Vorstehenden nahmen wir den Punkt R (Draht) (Taf. II. Fig. 5.) als fest an, und untersuchten seine Wirkung auf eine bewegliche Nadel. Nunmehr wollen wir die Nadel NS als unveränderlich betrachten, während der Punkt R seinen Ort ändern könne. Wir nehmen die Axe der Nadel OH als Axe der y, und die darauf Senkrechte OF als Axe der x an; zugleich mögen x, y die Koordinaten des Punktes R sein. Die Gleichung der Linie RN ist:

$$Y-y=\frac{y-l}{x}(X-x),$$

die Gleichung der im Punkte N darauf Senkrechten:

$$Y-l=\frac{x}{l-y}X.$$

Fällt man vom Punkte O aus auf diese eine Senkrechte, so ist deren Länge:

$$\frac{l}{\sqrt{1+\frac{x^2}{(l-y)^2}}}=\pm\frac{l(l-y)}{\sqrt{x^2+(l-y)^2}}.$$

Digitized by Google

Die Kraft, die in N senkrecht auf RN wirkt, ist

$$\frac{\mu}{\sqrt{x^2+(l-y)^2}}.$$

Das Drehungsmoment derselben in Bezug auf O ist

$$\frac{\mu l(l-y)}{x^2+(l-y)^2}, \qquad (8)$$

insofern als die Bewegung wie die Zeiger einer Uhr als rechtläufig angesehen wird. Zerlegt man die Kraft in N in zwei andere, die eine senkrecht auf ON, die andere nach ON gerichtet, und betrachtet man die Kräfte als positiv, welche die Koordinaten zu vergrössern streben, so findet man die erstere, wenn man (8) durch l dividirt, so dass die beiden sind:

$$\frac{\mu(l-y)}{x^2+(l-y)^2}, \quad \frac{\mu x}{x^2+(l-y)^2}. \qquad (9)$$

Für die in S wirkende Kraft erhält man eben so das Drehungsmoment:

$$\frac{-\mu l(l+y)}{x^2+(l+y)^2}, \qquad (10)$$

und die beiden Kräfte:

$$\frac{\mu(l+y)}{x^2+(l-y)^2}, \quad \frac{-\mu x}{x^2+(l-y)^2}. \qquad (11)$$

Fasst man diese Resultate zusammen, so erhält man als Wirkungen des Punktes R auf die Nadel:

a) das Kräftepaar

$$\frac{\mu l(l-y)}{x^2+(l-y)^2}-\frac{\mu l(l+y)}{x^2+(l+y)^2}=\frac{2l\mu y(l^2-x^2-y^2)}{[x^2+(l-y)^2][x^2+(l+y)^2]}, \qquad (12)$$

welches die Nadel rechtläufig zu drehen strebt;

b) die Kraft

$$\frac{\mu(l-y)}{x^2+(l-y)^2}+\frac{\mu(l+y)}{x^2+(l+y)^2}=\frac{2\mu l(l^2+x^2-y^2)}{(x^2+(l-y)^2)(x^2+(l+y)^2)}, \qquad (13)$$

welche den Punkt O parallel der Axe der x, nach der Richtung der positiven x zu bewegen strebt;

c) die Kraft

$$\frac{\mu x}{x^2+(l-y)^2}-\frac{\mu x}{x^2+(l+y)^2}=\frac{4\mu lxy}{[x^2+(l-y)^2][x^2+(l+y)^2]}, \qquad (14)$$

Digitized by Google

welche den Punkt O parallel mit der Axe der y, nach der Richtung der positiven y zu bewegen strebt.

Fasst man die Kräfte (13) und (14) zusammen, so erhält man eine einzige Kraft P, die mit der Axe OF den Winkel β macht, bestimmt durch:

$$P=\frac{2l\mu\sqrt{(l^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}{[x^2+(l-y)^2][x^2+(l+y)^2]}, \qquad (15)$$

$$\cos\beta=\frac{l^2+x^2-y^2}{\sqrt{(l^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}, \quad \sin\beta=\frac{2xy}{\sqrt{(l^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass das Gesagte gilt, wo auch R liege.

Hieraus lassen sich nun folgende Schlüsse ziehen:

I) Die Nadel NS sei nur beweglich um eine auf der Ebene der Figur senkrechte Axe, und es befinde sich der Punkt R im Raume

FCNH, so ist $l^2-x^2-y^2<0$, $y>0$, also geht N von R weg, und S geht gegen R im Anfange der Bewegung;

HNDE, so ist $l^2-x^2-y^2<0$, $y>0$, also geht N gegen R, und S kommt von R im Anfange der Bewegung;

EDSG, so ist $l^2-x^2-y^2<0$, $y<0$, also kommt N von R, und S geht gegen R im Anfange der Bewegung;

GSCF, so ist $l^2-x^2-y^2<0$, $y<0$, also geht N gegen R, und S kommt von R im Anfange der Bewegung;

CON, so ist $l^2-x^2-y^2>0$, $y>0$, also geht N gegen R, und S kommt von R im Anfange der Bewegung;

NOD, so ist $l^2-x^2-y^2>0$, $y>0$, also kommt N von R, und S geht gegen R im Anfange der Bewegung;

DOS, so ist $l^2-x^2-y^2>0$, $y<0$, also geht N gegen R, und S kommt von R im Anfange der Bewegung;

SOC, so ist $l^2-x^2-y^2>0$, $y<0$, also kommt N von R, und S geht gegen R im Anfange der Bewegung.

Liegt R auf dem Kreise um O selbst, so ist

$$l^2-x^2-y^2=0,$$

also hat keine Bewegung Statt; dasselbe hat Statt, wenn R auf der Axe der x liegt.

II) Die Nadel sei senkrecht aufgehängt an einem Faden, sei also nur beweglich parallel mit der Axe x.

Durch die Pole N und S (Taf. II. Fig. 6.) ziehe man die zusammengehörigen Hyperbeln, deren Gleichung

Digitized by Google

$$f^2 + x^2 - y^2 = 0 \qquad (16)$$

sei und es liege R

1) innerhalb der Hyperbeln ANB, CSD, so ist

$$f^2 + x^2 - y^2 < 0,$$

also wird die Nadel (der Punkt O) sich nach der Seite der negativen x (links) bewegen, d. h. scheinbar von R abgestossen werden, wenn R sich im ersten und vierten, angezogen, wenn er sich im zweiten und dritten Koordinatenwinkel befindet;

2) zwischen den beiden Hyperbeln, also im unbegränzten Raume $ANBDSC\ldots$ Alsdann ist

$$f^2 + x^2 - y^2 > 0,$$

also geht O nach der Seite der positiven x (rechts), d. h. die Nadel wird scheinbar angezogen, wenn R sich im ersten und vierten, abgestossen, wenn er sich im zweiten und dritten Koordinatenwinkel befindet;

3) auf einer der Hyperbeln selbst, so ist

$$f^2 + x^2 - y^2 = 0,$$

also hat keine Bewegung Statt.

III) Endlich nehme man an, die Nadel schwimme auf Wasser, könne sich also in ihrer Ebene frei bewegen und untersuche die Bewegungsrichtung des Punktes O. Es liege nun R

a) innerhalb der Hyperbeln ANB, CSD, und zwar:

1) im ersten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta < 0$, $\sin\beta > 0$, d. h. O bewegt sich in den zweiten Koordinatenwinkel;

2) im zweiten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta < 0$, $\sin\beta < 0$, d. h. O bewegt sich in den dritten Koordinatenwinkel;

3) im dritten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta < 0$, $\sin\beta > 0$, d. h. O bewegt sich in den zweiten Koordinatenwinkel;

4) im vierten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta < 0$, $\sin\beta < 0$, d. h. O bewegt sich in den dritten Koordinatenwinkel;

b) zwischen den beiden Hyperbeln, also im Raume $ANBDSC\ldots$, und zwar:

1) im ersten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta > 0$, $\sin\beta > 0$, d. h. O bewegt sich in den ersten Koordinatenwinkel;

2) im zweiten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta > 0$, $\sin\beta < 0$, d. h. O bewegt sich in den vierten Koordinatenwinkel;

3) im dritten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta > 0$, $\sin\beta > 0$, d. h. O bewegt sich in den ersten Koordinatenwinkel;

Digitized by Google

4) im vierten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta > 0$, $\sin\beta < 0$, d. h. O bewegt sich in den vierten Koordinatenwinkel;

c) auf den Hyperbeln und zwar:

1) im ersten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta = 0$, $\sin\beta = 1$, d. h. O bewegt sich gegen N;

2) im zweiten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta = 0$, $\sin\beta = -1$, d. h. O bewegt sich gegen S;

3) im dritten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta = 0$, $\sin\beta = 1$, d. h. O bewegt sich gegen N;

4) im vierten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta = 0$, $\sin\beta = -1$, d. h. O bewegt sich gegen S;

d) auf der Axe der x, und zwar:

1) auf dem positiven Theil, so ist $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach F;

2) auf dem negativen Theil, so ist $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach F, wie so eben;

e) auf der Axe der y, und zwar:

α) innerhalb der Hyperbeln ANB, CSD;

1) im positiven Theil der Axe der y, so ist $\cos\beta = -1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach E;

2) im negativen Theil der Axe der y, so ist $\cos\beta = -1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach E;

β) zwischen den beiden Hyperbeln;

1) im positiven Theil der Axe der y, so ist $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach F;

2) im negativen Theil der Axe der y, so ist $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach F.

Aus diesen Angaben wird man nun leicht die scheinbare Anziehung oder Abstossung ableiten können.

Für den Fall II) wird, je nach der Lage von R, die Spannung des Aufhängefadens vermehrt oder vermindert (14). Ist R nämlich im ersten oder dritten Koordinatenwinkel, so wird dieselbe vermindert um

$$\frac{4\mu l.xy}{[x^2+(l-y)^2][x^2+(l+y)^2]};$$

ist aber R im zweiten oder vierten, so wird sie vermehrt um

$$\frac{4\mu l\sqrt{x^2y^2}}{(x^2+(l-y)^2)\,(x^2+(l+y)^2)},$$

worin natürlich μ ein Gewicht anzeigt, gleich der Einwirkung des Drahtes auf einen Pol in der Entfernung 1.

Digitized by Google

§. 3.

Ist im Falle der Formel (7) γ nahe an $\frac{\pi}{2}$, $a > l$, so ist $\sin\alpha - \sin\gamma$ beinahe immer Null, man wird also ungefähr setzen können:

$$\text{arc}(\text{tg} = \frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha-\sin\gamma)}{(a^2-l^2)^2+4a^2l^2\sin\alpha\sin\gamma}) = \frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha-\sin\gamma)}{(a^2+l^2)^2}.$$

Daraus folgt, dass die Zeit einer Schwingung von einem Aeussersten zum anderen ist:

$$\sqrt{\frac{k}{2\mu}} \cdot \frac{a^2+l^2}{\sqrt{2al(a^2-l^2)}} \int_{\gamma}^{\pi-\gamma} \frac{\partial\alpha}{\sqrt{\sin\alpha-\sin\gamma}}$$
$$= \frac{C.(a^2+l^2)}{2} \sqrt{\frac{k}{al(a^2-l^2)\mu}},$$

wenn C eine Konstante ist. Daraus folgt, dass die Schwingungsdauer im Verhältniss zu $\sqrt{a}$ steht, ein Satz, der bekanntlich nach der Lehre vom Pendel, die für diesen Fall anwendbar ist, zeigt, dass die wirksame Kraft im umgekehrten Verhältniss zu a steht, was eben der Satz ist, von dem wir ausgingen.

Für den Fall, dass l klein ist, so dass man l^2 gegen a^2 vernachlässigen kann, giebt (7) ebenfalls

$$\sqrt{\frac{k}{2\mu}} \cdot \sqrt{\frac{a}{2l}} \int_{\gamma}^{\pi-\gamma} \frac{\partial\alpha}{\sqrt{\sin\alpha-\sin\gamma}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ak}{\mu l}} \int_{\pi}^{\pi-\gamma} \frac{\partial\alpha}{\sqrt{\sin\alpha-\sin\gamma}}.$$

V.

Ueber die Periodicität der Decimalbrüche.

Von

Herrn W. Looff,

Director des Herzoglichen Realgymnasiums zu Gotha.

In meinem „Leitfaden für den Unterricht im praktischen Rechnen und in der Arithmetik, erster Cursus, Gotha 1850“ habe ich in einem Excurse über die Periodicität der Decimalbrüche eine Tabelle derjenigen Primzahlen mitgetheilt welche als Nenner eines gemeinen Bruchs eine Periode von bestimmter Stellenzahl geben. Die bei der Herausgabe meines Leitfadens begonnene Arbeit habe ich fortgesetzt, wobei mir ein Auszug aus den Burckhardt'schen Tafeln der Primzahlen, welcher mir durch die Güte des Herrn Professor Dr. Jacobi mitgetheilt wurde, sehr zu statten kam. Ich erlaube mir daher diese Tabelle in grösserer Ausdehnung, als ich sie in meinem Leitfaden gegeben, hier mitzutheilen, nachdem ich die wenigen nothwendigen Sätze vorausgeschickt habe.

1) Giebt der Bruch $\frac{1}{n}$ eine Periode von k Stellen und bezeichnet man die Periode der Decimalstellen mit P, so ist

$$10^k - 1 = nP.$$

Es müssen daher alle Factoren von $10^k - 1$ eine Periode von k Stellen geben. Eine Periode von einer Stelle giebt daher $10-1=9$, also 3 und 9. Um die Primzahlen, welche eine Periode von 2, 3, u. s. w. Stellen geben, zu finden, braucht man nur die Factoren

Digitized by Google

von $\frac{10^4-1}{9}$ aufzusuchen. Eine Periode von 2 Stellen giebt daher nur 11, von 3 Stellen 37 als Factor von 111, von 4 Stellen 101 als Factor von 1111, von 5 Stellen 41 und 271 als Factoren von 11111. Bei 6 Stellen kann man $\frac{10^6-1}{9}$ durch 3, 11 und 37 dividiren. Der Quotient 91 ist $=7\times13$, die einzigen Primzahlen, welche eine Periode von 6 Stellen geben.

Für sieben Stellen müssen die Factoren von 1111111 gefunden werden. Da aber nur eine solche Primzahl n eine Periode von p Stellen geben kann, welche um 1 verringert durch p theilbar ist, so ist

$$n-1=mp,$$

folglich

$$n=mp+1.$$

Ist p eine ungerade Zahl, m ebenfalls eine ungerade Zahl, so ist mp eine ungerade, folglich $mp+1$ eine gerade Zahl, die nicht Factor von 1111.... sein kann. Man braucht daher für m nur gerade Zahlen zu setzen. Ist dann $m=2c$, so können nur solche Primzahlen Factoren von $\frac{10^p-1}{9}$ (p eine ungerade Zahl) sein, welche die Form $2cp+1$ haben. Für sieben Stellen also musste der Versuch mit allen Primzahlen von der Form $14p+1$ bis zu $\sqrt{1111111}$ gemacht werden. Hieraus ergab sich

$$239\times4649=1111111.$$

Für die Perioden von gerader Stellenzahl, z. B. 8, kann $\frac{10^8-1}{9}$ durch 11 und 101 ohne Rest dividirt werden, daher nur 10001 in die Factoren 73 und 137 zu zerlegen war.

Für 11 Stellen giebt es 129 Primzahlen von der Form $22r+1$, von welchen

$$21649\times513239=11111,111111.$$

Für 13 Stellen wurde die Untersuchung dadurch bedeutend erleichtert, dass von den Zahlen von der Form $26r+1$ schon 53 und 79 aufgingen. Der Quotient 265371653 ist nach einer durch 162 Divisionen geschehenen Ermittelung eine Primzahl.

In der nachfolgenden Tabelle sind die mit ? bezeichneten Zahlen noch nicht als Primzahlen ermittelt.

Digitized by Google

Periodenzahl.	Zahl.
1	3 so wie 3^2 oder 9.
2	11.
3	37.
4	101.
5	41. 271.
6	7. 13.
7	239. 4649.
8	73. 137.
9	333667.
10	9091.
11	21649. 513239.
12	9901.
13	53. 79. 265371653.
14	909091.
15	31. 2906161.
16	17. 5882353.
17	?*)
18	19, 52579.
19	?**)
20	3541, 27961.
21	43, 1933, 10838689.
22	23. 4093. 8779.
23	11111, 111111, 111111, 111111.
24	99990001.
25	1000010000100001000001. ?
26	859. 1058313049.
27	757. 440334654777631. ?
28	29. 281. 121499449.
29	3191. x.
30	211. 241. 2161.
31	2791. 398105020104303515267327521. ?
32	353. 449. 641. 1409. 69857.

*) Bei 17 sind die Untersuchungen mit allen Primzahlen bis 230000 ohne Erfolg gewesen.

**) Bei 19 haben die Untersuchungen aller Primzahlen bis 100000 keinen Erfolg gehabt.

Digitized by Google

Periodenzahl.	Zahl.
33	67. 13446282101132983737
34	103. 4013. 219938333697
35	71. 126761843674776043535217
36	9999990000017
37 — 40	?
41	83. 1231. x.
42	127. 2689. 459691. ($7^4 . 11^2 . 13^2$).
43	173. x.
44	89. 1112470797641561909?
45	2997000029970029999703?
46	47. 139. 2531. 549797184491917
47	?
48	99999999000000017
49	?
50	251. 5051. 71706120210577929117
51	613. 14696588921711270961009949590717
52	521. 19003819767773322437817
53	107. x.
54	999999990000000017
55	1321. x.
56	7841. 1275220010201505037617
57	?
58	59. 154083204930662557781201849.?
59	?
60	61. 16557360491819836049016417

VI.

Eine allgemeine Auflösung der Gleichungen des vierten Grades.

Von dem

Herrn Doctor W. Schlesicke,

Lehrer am Gymnasium zu Luckau.

In Thl. XII. Nr. XII. des Archivs ist bereits eine Auflösung der Gleichungen des vierten Grades gegeben worden, welche im Wesentlichen darauf beruht, dass $x=u+v$ gesetzt und in der so transformirten und nach u geordneten Gleichung die Summe des zweiten und des vierten Gliedes als verschwindend angenommen wurde. Dem am angeführten Orte angewendeten Verfahren liegt aber die Voraussetzung zu Grunde, dass das zweite Glied der gegebenen Gleichung, wenn ein solches vorhanden war, bereits fortgeschafft sei. Es lässt sich indess die ganze Rechnung vollkommen in derselben Weise auch ohne vorhergegangene Fortschaffung des zweiten Gliedes in völliger Allgemeinheit anstellen; nur ist man in diesem Falle genöthigt, ausser der gewöhnlichen Hülfsgleichung des dritten Grades noch eine andere vom zweiten Grade aufzulösen. Dennoch scheint die allgemeine Methode, welche in dieser, übrigens der früheren durchaus folgenden, Abhandlung gezeigt werden soll, an Einfachheit die aus den Formeln 24) und 25) in Theil XII. Nro. XII. sich ergebende einigermassen zu übertreffen, und zugleich wird aus derselben erhellen, dass die Fortschaffung des zweiten Gliedes wenigstens zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades unwesentlich ist.

Digitized by Google

Die gegebene Gleichung des vierten Grades sei:

$$1)\quad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$2)\quad x = u + v,$$

so erhält man

$$(u+v)^4 + a(u+v)^3 + b(u+v)^2 + c(u+v) + d = 0;$$

d. i.

$$3)\quad \left.\begin{aligned} u^4 + (4v+a)u^3 + (6v^2+3av+b)u^2 \\ + (4v^3+3av^2+2bv+c)u \\ + v^4 + av^3 + bv^2 + cv + d \end{aligned}\right\} = 0.$$

Die willkührlichen Grössen u und v wollen wir nun so zu bestimmen suchen, dass in der Gleichung 3) die Summe derjenigen Glieder, welche die ungeraden Potenzen von u enthalten, verschwindet; so dass also

$$(4v+a)u^3 + (4v^3+3av^2+2bv+c)u = 0,$$

oder

$$4)\quad u\{(4v+a)u^2 + 4v^3 + 3av^2 + 2bv + c\} = 0$$

ist. Dieser Gleichung wird genügt, wenn man entweder

$$u = 0 \text{ oder } (4v+a)u^2 + 4v^3 + 3av^2 + 2bv + c = 0$$

annimmt. Die erstere dieser Auflösungen würde nach 2) $x = v$ geben; mithin würde man durch dieselbe in die gegebene Gleichung für die unbekannte Grösse nur ein neues Symbol einführen, ohne dass man zu etwas wesentlich Neuem gelangen könnte. Wir werden daher die zweite Auflösung anzuwenden versuchen müssen und daher

$$5)\quad (4v+a)u^2 + 4v^3 + 3av^2 + 2bv + c = 0$$

annehmen. Hieraus ergiebt sich

$$6)\quad u^2 = -\frac{4v^3 + 3av^2 + 2bv + c}{4v + a},$$

und wenn man diesen Ausdruck in die Gleichung 3) einführt:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{4v^3 + 3av^2 + 2bv + c}{4v + a}\right)^2 - (6v^2 + 3av + b)\frac{4v^3+3av^2+2bv+c}{4v+a} \\ + v^4 + av^3 + bv^2 + cv + d \end{aligned}\right\} = 0,$$

Digitized by Google

oder, indem man mit $(4v+a)^2$ multiplicirt:

$$7)\quad \left.\begin{aligned}(4v^3+3av^2+2bv+c)^2-(4v+a)(6v^2+3av+b)(4v^3+3av^2+2bv+c)\\ +(4v+a)^2(v^4+av^3+bv^2+cv+d)\end{aligned}\right\}=0.$$

Entwickelt man aber diese Gleichung, so erhält man

$$8)\quad \left.\begin{aligned}64v^6+96av^5+(48a^2+32b)v^4+(8a^3+32ab)v^3\\ +(8a^2b+4ac+4b^2-16d)v^2+(2ab^2+2a^2c-8ad)v\\ +abc-a^2d-c^2\end{aligned}\right\}=0,$$

oder, wie auf der Stelle erhellet:

$$9)\quad \left.\begin{aligned}(4v^2+2av+\frac{2}{3}b)^3+(ac-\frac{1}{3}b^2-4d)(4v^2+2av+\frac{2}{3}b)\\ +\frac{1}{3}abc-a^2d-\frac{2}{27}b^3+\frac{8}{3}bd-c^2\end{aligned}\right\}=0^*),$$

d. i. wenn man

$$10)\quad 4v^2+2av+\frac{2}{3}b=\omega,$$

$$11)\quad ac-\frac{1}{3}b^2-4d=\beta,$$

$$12)\quad \frac{1}{3}abc-a^2d-\frac{2}{27}b^3+\frac{8}{3}bd-c^2=\gamma$$

setzt:

$$13)\quad \omega^3+\beta\omega+\gamma=0.^{**})$$

---

*) Es möge noch bemerkt werden, dass man die Gleichung 8) auch auf eine andere Form bringen könnte; setzt man nämlich

$$4v^2+2av=\omega_1,$$

so erhält man aus 8)

$$\omega_1{}^3+2b\omega_1{}^2+(ac+b^2-4d)\omega_1+abc-a^2d-c^2=0,$$

eine Gleichung, welche allerdings etwas einfacher ist, in welcher aber das zweite Glied, welches in 9) fehlt, noch vorkommt. Nimmt man in dieser Gleichung a als verschwindend an, so erhält man die, mit Gleichung 9) in Theil XII. Nro. XII. übereinstimmende, gewöhnliche Hülfsgleichung des dritten Grades.

**) Die oben in 10) durch ω bezeichnete Grösse erhält man offenbar aus dem Coefficienten von u^3 in der transformirten Gleichung 3), wenn man denselben mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt. Bezeichnet man nämlich die Coefficienten der einzelnen Glieder dieser Gleichung der Reihe nach durch V_3, V_2, V_1 und V; so dass also

Somit sind wir zu einer Gleichung des dritten Grades gelangt, auf welche, weil in derselben das zweite Glied fehlt, zur Bestimmung von ω die gewöhnlichen Auflösungsmethoden für Gleichungen dieses Grades unmittelbar angewendet werden können. Hat man vermittelst einer dieser Methoden ω bestimmt, so erhält man v aus der Gleichung 10)

$$4v^2 + 2av + \frac{2}{3}b = \omega.$$

Hieraus folgt

$$(2v + \frac{1}{2}a)^2 = \omega + \frac{1}{4}a^2 - \frac{2}{3}b,$$

oder, wenn wir

$$14) \quad \omega + \frac{1}{4}a^2 - \frac{2}{3}b = k$$

setzen:

$$15) \quad v = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{k}\right\},$$

und

$$u^4 + V_3u^3 + V_2u^2 + V_1u + V = 0$$

ist; so wird aus Gleichung 7):

$$V_1^2 - V_1V_2V_3 + VV_3^2 = 0.$$

Nun ist aber

$$V_1V_2V_3 = (\frac{1}{3}V_2^2 + 4V + ac - \frac{1}{3}b^2 - 4d)V_2,$$

$$VV_3^2 = (\frac{8}{3}V_2 + a^2 - \frac{8}{3}b)V,$$

$$V_1^2 = \begin{cases} \frac{1}{27}V_2^3 + \frac{4}{3}VV_2 + (\frac{8}{3}b - a^2)V + \frac{1}{3}(ac - \frac{1}{3}b^2 - 4d)V_2 \\ -\frac{1}{3}abc + a^2d + \frac{2}{27}b^3 - \frac{8}{3}bd + c^2. \end{cases}$$

Demnach

$$V_1V_2V_3 - V_1^2 - VV_3^2 = \left\{\begin{matrix} \frac{8}{27}V_2^3 + \frac{2}{3}(ac - \frac{1}{3}b^2 - 4d)V_2 \\ +\frac{1}{3}abc - a^2d - \frac{2}{27}b^3 + \frac{8}{3}bd - c^2 \end{matrix}\right\} = 0,$$

welches wieder die obige Gleichung 9), oder wenn man die oben gebrauchten Zeichen einführt, die Gleichung 13) ist.

$$16) \quad 4v + a = \pm 2\sqrt{k}.$$

Führen wir nun aber für ω seinen Werth aus 14)

$$\omega = k - \frac{1}{4}a^2 + \frac{2}{3}b$$

in die Gleichung 13) ein und setzen auch für β und γ ihre entsprechenden Werthe, so erhalten wir die Gleichung

$$17) \quad k^3 + (2b - \frac{3}{4}a^2)\,k^2 + \left(\frac{3}{16}a^4 - a^2b + ac + b^2 - 4d\right)k \\ -\left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist keine andere als diejenige, welche wir erhalten haben würden, wenn wir nach Fortschaffung des zweiten Gliedes in der gegebenen Gleichung 1) des vierten Grades nach den in Theil XII. Nro. XII. gegebenen Formeln gerechnet hätten. Aus der Beschaffenheit des letzten Gliedes dieser Gleichung folgt aber, dass, wenn

$$\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c = 0$$

ist, ein Werth der Grösse k ebenfalls verschwindet; dass dagegen, wenn

$$\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c \gtrless 0$$

ist, es jederzeit einen reellen, positiven und nicht verschwindenden, Werth der Grösse k giebt. Nehmen wir nun zuerst, indem wir zunächst den letzten Fall betrachten, an, es verschwinde die Grösse

$$\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c$$

nicht, so erhellet, dass sich unter der gemachten Voraussetzung auch aus der Gleichung 13) jederzeit ein Werth für ω wird finden lassen, so dass

$$\omega > \frac{2}{3}b - \frac{1}{4}a^2$$

ist. Denken wir uns den, dieser Bedingung genügenden, Werth von ω zur Bestimmung der Grösse k in 14) gewählt, so erhalten wir offenbar nach 15) zwei reelle, von einander verschiedene, Werthe für v. Setzen wir nämlich, wozu wir nach dem Bisherigen offenbar berechtigt sind,

Digitized by Google

$$18) \quad k=4\bar{\omega}^2,$$

so erhalten wir nach 15)

$$19) \quad v=-\frac{1}{4}a\pm\bar{\omega},$$

oder

$$4v+a=\pm 4\bar{\omega}.$$

Aus der Gleichung 6)

$$u^2=-\frac{4v^3+3av^2+2bv+c}{4v+a}$$

ergeben sich demnach ebenfalls zwei reelle von einander verschiedene Werthe für u^2. Es ist nämlich, wie man sogleich findet:

$$u^2=-\frac{4\bar{\omega}^3+2\left(b-\frac{3}{8}a^2\right)\bar{\omega}\pm\left(\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c\right)}{4\bar{\omega}},$$

oder, wenn wir

$$20) \quad b-\frac{3}{8}a^2=A,$$

$$21) \quad \frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=B$$

setzen:

$$22) \quad u^2=-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}\pm B}{4\bar{\omega}},$$

und folglich

$$23) \quad u=\begin{cases}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}\pm B}{\bar{\omega}}}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}\pm B}{\bar{\omega}}},\end{cases}$$

mithin nach 2), 19), 23)

$$24)\quad x=\begin{cases}-\frac{1}{4}a\pm\bar{\omega}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}\pm B}{\bar{\omega}}}\\ -\frac{1}{4}a\pm\bar{\omega}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}\pm B}{\bar{\omega}}}\end{cases}.$$

Somit sind wir unter der gemachten Voraussetzung, dass B nicht verschwindet, zur Bestimmung der vier Wurzeln der gegebenen Gleichung des vierten Grades gelangt. Dieselben sind sämmtlich von einander verschieden, wenn keine der Grössen

$$4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B \text{ und } 4\omega^3+2A\bar{\omega}-B$$

verschwindet. Sie sind sämmtlich reell, sobald

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}>0,\quad -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}>0$$

ist; dagegen sämmtlich imaginär, wenn

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}<0,\quad -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}<0$$

ist. Ferner sind zwei reell und zwei imaginär, wenn entweder

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}>0,\quad -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}<0;$$

oder

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}<0,\quad -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}>0$$

ist. Endlich sind zwei derselben reell und gleich, wenn entweder

$$4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B=0,$$

oder

$$4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B=0$$

ist; die anderen beiden Wurzeln sind dagegen reell oder imaginär, je nachdem respective

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}\gtrless 0 \text{ und } -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}\gtrless 0$$

ist. Uebrigens kann man sich davon, dass man in jedem Falle wirklich alle Wurzeln der gegebenen Gleichung durch die obigen Formeln 24) erhält, völlig in derselben Weise überzeugen, wie

Digitized by Google

ies in Theil XII. Nro. XII. gezeigt ist, weshalb wir hier diese Untersuchung füglich übergehen zu können glauben. Zum Schlusse haben wir nur noch den Fall zu betrachten, wenn die Grösse

$$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=B$$

erschwindet. In diesem Falle ist, wie wir das bereits oben ge eben haben, ein Werth von k und mithin auch von $4v+a$ Null. ür diesen Werth von $4v+a$ ist offenbar eine Auflösung der leichung 5)

$$(4v+a)u^2+4v^3+3av^2+2bv+c=0$$

der oben 6) durchgeführten Weise unstatthaft, weil sowohl die rösse $(4v+a)u^2$, als auch die Grösse

$$4v^3+3av^2+2bv+c=\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=B$$

ür sich verschwindet. Wir sind daher genöthigt, zur Bestimmung on u auf die Gleichung 3) zurückzugehen, welche aber, weil so- ohl das zweite als das vierte Glied derselben für sich verschwin- let, die einfachere Gestalt

$$u^4+(6v^2+3av+b)u^2+v^4+av^3+bv^2+cv+d=0,$$

der, wenn wir auch hier für v seinen Werth $-\frac{1}{4}a$ einführen, ie Form

$$u^4+(b-\frac{3}{8}a^2)u^2-\frac{3}{256}a^4+\frac{1}{16}a^2b-\frac{1}{4}ac+d=0$$

nnimmt, und mithin wie eine quadratische Gleichung aufgelöst werden kann. Behalten wir die oben 20) für $b-\frac{3}{8}a^2$ gebrauchte Bezeichnung bei und setzen wir ferner

$$25)\quad -\frac{3}{256}a^4+\frac{1}{16}a^2b-\frac{1}{4}ac+d=C,$$

so erhalten wir

$$26)\quad u^4+Au^2+C=0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$27)\quad u=\begin{cases}+\sqrt{\frac{1}{2}\left\{-A\pm\sqrt{A^2-4C}\right\}}\\ -\sqrt{\frac{1}{2}\left\{-A\pm\sqrt{A^2-4C}\right\}},\end{cases}$$

Digitized by Google

und demnach sind in diesem Falle die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$28)\quad x=\begin{cases}-\frac{1}{4}a+\sqrt{\frac{1}{2}\left\{-A\pm\sqrt{A^2-4C}\right\}}\\ -\frac{1}{4}a-\sqrt{\frac{1}{2}\left\{-A\pm\sqrt{A^2-4C}\right\}}\end{cases}.$$

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, dass die im Obigen dargestellte Auflösungsmethode der Gleichungen des vierten Grades in einem bestimmten Falle, wenn nämlich

$$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=0$$

ist, ebenfalls darauf führt, die Grösse $4v+a=0$ zu setzen, ganz in der Weise, wie es die Fortschaffung des zweiten Gliedes der gegebenen Gleichung erfordert. Hier aber, wenn auch dasselbe geschieht, ist der Erfolg ein anderer. Mit dem zweiten verschwindet nämlich auch zugleich das vierte Glied der Gleichung. Das Allgemeine bleibt daher nichts desto weniger, dass die gleichzeitige Fortschaffung derjenigen Glieder der Gleichung 3), welche die ungeraden Potenzen von u enthalten, bewirkt wird, und die übliche Fortschaffung des zweiten Gliedes erscheint als ein, dem allgemeinen untergeordnetes, specielleres Verfahren, welches nur in einem gewissen besonderen Falle direct zum Ziele führt. Zugleich scheint es der Beachtung werth, dass die, mit 3 multiplizirten, Wurzeln der durch das obige Verfahren erhaltenen kubischen Hülfsgleichung, gewisse Werthe des zweiten Differentialquotienten von der Funktion der gegebenen Gleichung des vierten Grades darstellen.

Digitized by Google

VII.

Ueber die Abel'schen Funktionen.

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

In den nachfolgenden Zeilen sollen die Additionstheoreme dieser Funktionen nachgewiesen werden, mit Zugrundelegung der Abel'schen Abhandlung: Remarque sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. (Crelle's Journal Bd. III.). Einige Anwendungen mögen als weitere Ausführung folgen.

§. 1.

Es sei

$$\left.\begin{aligned}\theta(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n,\\ \theta_1(x)&=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots\ldots+c_mx^m;\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ferner seien $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ zwei ganze Funktionen von x;

$$\varphi_1(x)\,.\,\varphi_2(x)=\varphi(x)$$

also ebenfalls eine solche Funktion; α eine konstante Grösse;

$$a_0,\ a_1,\ \ldots.\ a_n;\ \ c_0,\ c_1,\ \ldots\ldots c_m$$

entweder alle oder doch einige von ihnen veränderlich; endlich setze man:

Digitized by Google

$$F(x)=(\theta(x))^2\varphi_1(x)-(\theta_1(x))^2\varphi_2(x)=A(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r), \quad (2)$$

so werden $x_1, x_2, \ldots x_r$ bloss von $a_0, a_1, \ldots a_n$; $c_0, c_1 \ldots c_m$ und den als konstant vorausgesetzten Koeffizienten in $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ abhängen, und eben so A von x unabhängig sein. Bezeichnet nun x_e irgend eine der Grössen $x_1, \ldots x_r$; so ist identisch:

$$F(x_e)=0, \qquad (3)$$

worin x_e eine Funktion von den Grössen a und c ist. Eben weil aber die Gleichung (3) eine identische ist, hat man bekanntlich auch:

$$F'(x_e)=0. \qquad (4)$$

Diese letztere Gleichung liesse sich ohnehin auch leicht nachweisen. Denn man gebe den Grössen $a_0, a_1, \ldots\ldots c_0, c_1, \ldots$ die willkührlichen Zuwächse $a'_0, a'_1 \ldots\ldots$ und sei x'_e der daraus hervorgehende Zuwachs von x_e, so ist offenbar auch

$$F(x_e+x'_e)=0,$$

d. h.

$$F(x_e)+x'_eF'(x_e)+\ldots\ldots=0,$$

also nach (3):

$$F'(x_e)+\frac{x'_e}{2}F''(x_e)+\ldots=0,$$

woraus leicht (4) geschlossen wird.

Die Grösse $F(x_e)$ enthält $a_0, a_1, \ldots a_n$; $c_0, c_1, \ldots c_m$ explizite, nebst x_e, also kann (4) auch folgendermassen dargestellt werden:

$$\frac{\partial F(x_e)}{\partial x_e}\partial x_e+\frac{\partial F(x_e)}{\partial a_0}\partial a_0+\frac{\partial F(x_e)}{\partial a_1}\partial a_1+\ldots\ldots=0,$$

wenn

$$\frac{\partial F(x_e)}{\partial x_e}, \quad \frac{\partial F(x_e)}{\partial a_0}, \quad \ldots\ldots$$

die Differenzialquotienten von $F(x_e)$ in Bezug auf $x_e, a_0, \ldots$, insofern diese explizite in $F(x_e)$ enthalten sind, bedeutet. Diese Gleichung kann auch unter der Form:

$$\frac{\partial.F(x_e)}{\partial x_e}\partial x_e+\delta.F(x_e)=0 \qquad (5)$$

dargestellt werden, wenn δ das vollständige Differenzial in Bezug auf die Grössen $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$, insofern sie explizite in $F(x_e)$ enthalten sind, bezeichnet.

Digitized by Google

Aus (2) folgt aber:

$$\delta.F(x_e)=2.\theta(x_e)\varphi_1(x_e).\delta.\theta(x_e)-2\theta_1(x_e).\varphi_2(x_e).\delta.\theta_1(x_e), \qquad (6)$$

also aus (6) und (5):

$$F'(x_e).\partial x_e=2[\theta_1(x_e)\varphi_2(x_e)\delta.\theta_1(x_e)-\theta(x_e)\varphi_1(x_e)\delta.\theta(x_e)]. \qquad (7)$$

Nach (3) ist aber:

$$(\theta(x_e))^2\varphi_1(x_e)-(\theta_1(x_e))^2\varphi_2(x_e)=0,$$

d. h.

$$\theta(x_e).\sqrt{\varphi_1(x_e)}=\varepsilon_e\theta_1(x_e)\sqrt{\varphi_2(x_e)},$$

wenn ε_e entweder $+1$ oder -1, je nachdem die Beschaffenheit der bezüglichen Funktionen diess zulässt. Hieraus ergiebt sich, wenn man beachtet, dass $\varphi_1(x).\varphi_2(x)=\varphi(x)$:

$$\left.\begin{aligned}\theta(x_e).\varphi_1(x_e)&=\varepsilon_e\theta_1(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)},\\ \theta_1(x_e)\varphi_2(x_e)&=\varepsilon_e\theta(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)}.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Setzt man diess in (7), so erhält man:

$$F'(x_e)\partial x_e=2\varepsilon_e[\theta(x_e)\delta.\theta_1(x_e)-\theta_1(x_e)\delta.\theta(x_e)]\sqrt{\varphi(x_e)}.$$

Hieraus folgt, wenn $f(x)$ irgend eine ganze Funktion von x ist:

$$\varepsilon_e\frac{f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} \qquad (9)$$

$$=2\frac{[\theta(x_e)\delta.\theta_1(x_e)-\theta_1(x_e)\delta.\theta(x_e)]}{(x_e-\alpha)F'(x_e)}f(x_e)=\frac{\lambda(x_e)}{(x_e-\alpha)F'(x_e)},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\lambda(x)=2[\theta(x)\delta.\theta_1(x)-\theta_1(x)\delta.\theta(x)]f(x),$$

so dass $\lambda(x)$ immer eine ganze Funktion von x ist.

Bezieht sich nun das Summationszeichen Σ auf die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_r$, so folgt aus (9):

$$\Sigma\frac{\varepsilon_e f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}}=\Sigma\frac{\lambda(x_e)}{(x_e-\alpha)F'(xe)}. \qquad (10)$$

Setzen wir

$$\frac{\lambda(x)-\lambda(\alpha)}{x-\alpha}=\lambda_1(x),$$

so folgt aus (10):

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} = \Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)} + \lambda(\alpha)\,\Sigma \frac{1}{(x_e-\alpha)F'(x_e)}.$$

Nach einem bekannten Satze (siehe die Anmerkung am Schlusse) ist aber:

$$\Sigma \frac{1}{(x_e-\alpha)F'(x_e)} = -\frac{1}{F(\alpha)},$$

also

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} = \Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)} - \frac{\lambda(\alpha)}{F(\alpha)}, \qquad (11)$$

und eben so weiss man, dass der Werth der Grösse $\Sigma \frac{x^r_e}{F'(x_e)}$ gleich ist dem Koeffizienten von $\frac{1}{\alpha^{r+1}}$ in der nach fallenden Potenzen von α vorgenommenen Entwicklung von $\frac{1}{F(\alpha)}$, oder gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{\alpha}$ in der ähnlichen Entwicklung von $\frac{\alpha^r}{F(\alpha)}$. Bezeichnet man nun allgemein durch $K\psi(x)$ den Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ in der nach fallenden Potenzen von x vorgenommenen Entwicklung von $\psi(x)$, so ist also

$$\Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)} = K.\frac{\lambda_1(x)}{F'(x)}.$$

Da aber

$$\frac{\lambda_1(x)}{F(x)} = \frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)} - \frac{\lambda(\alpha)}{(x-\alpha)F(x)},$$

und

$$K\frac{\lambda(\alpha)}{(x-\alpha)F(x)} = 0,$$

da der Nenner mindestens vom zweiten Grade in Bezug auf x ist, so hat man

$$\Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)} = K.\frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)}$$

und

Digitized by Google

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} = -\frac{\lambda(\alpha)}{F(\alpha)} + K\cdot\frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)}$$

$$= -\frac{2[\theta(\alpha)\delta.\theta_1(\alpha)-\theta_1(\alpha)\delta.\theta(\alpha)]f(\alpha)}{(\theta(\alpha))^2\varphi_1(\alpha)-(\theta_1(\alpha))^2\varphi_2(\alpha)}$$

$$+ K.\frac{2[\theta(x)\delta.\theta_1(x)-\theta_1(x)\delta.\theta(x)]f(x)}{[(\theta(x))^2\varphi_1(x)-(\theta_1(x))^2\varphi_2(x)](x-\alpha)}$$

$$= -\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\delta.\log\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}$$

$$+ K\cdot\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\delta.\log\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}},$$

wie man leicht übersieht. Setzt man nun:

$$\int\frac{f(x)\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} = \psi(x),$$

so erhält man hieraus:

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\varepsilon_3\psi(x_3)+\ldots\ldots+\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$= -\frac{f(x)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log.\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)$$

$$+ K\cdot\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

$$+ C, \qquad \text{(I).}$$

Die Grössen ε_e bestimmen sich aus (8).

Dieses Theorem lehrt also die (algebraische) Summe einer Reihe transzendenter Funktionen durch einen logarithmischen und algebraischen Ausdruck finden.

Man wird bei der vorstehenden Differenziation und Integration kaum einen Anstand haben. Zum Ueberfluss könnte man die (Grund-) Gleichung (5) auch so ausdrücken, dass man in Lagrange's Weise die Grössen x_e, a_0, a_1,.... sämmtlich als Funktionen derselben Grösse s betrachtete, wodurch dann die obige Gleichung hiesse:

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e) \frac{\partial(x_e)}{\partial s}}{(x_e - \alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}}$$

$$= -\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} \frac{\delta.}{\delta s} \log\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)$$

$$+ \mathrm{K} \cdot \frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \frac{\delta.}{\partial s} \log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right),$$

woraus sich (I) unmittelbar ergäbe.

Ein Anstand könnte darin gefunden werden, ob

$$\int \mathrm{K} \frac{\delta.}{\partial s} \psi(x) \partial s = \mathrm{K} \int \frac{\delta.}{\partial s} \psi(x) \partial s = \mathrm{K} \cdot \psi(x),$$

wie vorausgesetzt wurde.

Allein sei

$$\psi(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\ldots,$$

so ist $A_1 = \mathrm{K}.\psi(x)$ und

$$\delta.\psi(x) = \frac{\delta.A_1}{x} + \frac{\delta.A_2}{x^2} + \ldots\ldots$$

also

$$\mathrm{K} \cdot \frac{\delta.}{\partial s} \psi(x) = \delta.A_1,$$

$$\int \mathrm{K} \cdot \frac{\delta.}{\delta s} \psi(x) \partial x = A_1 = \mathrm{K}.\psi(x).$$

§. 2.

Es ist oben stillschweigend vorausgesetzt worden, dass x_1, $x_2, \ldots x_r$ verschieden seien, da sonst $F'(x_e)$ für einige dieser Grössen Null wäre. Nimmt man aber zuerst an, diese Werthe seien, statt gleich, um unendlich wenig verschieden, so wird die Formel (I) immer noch gelten, und da x_1, x_2, ... auf ihrer zweiten Seite nicht vorkommen, auch noch, wenn diese Unterschiede Null werden. Ist aber $x_s = x_{s+1}$, so folgt aus (8), dass auch $\varepsilon_s = \varepsilon_{s+1}$ sein muss. Ist also:

Digitized by Google

$$(\theta(x))^2\varphi_1(x)-(\theta_1(x))^2\varphi_2(x)=A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_r)^{m_r},$$

so ist

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1)+m_2\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+m_r\varepsilon_r\psi(x_r)$$
$$=-\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)$$
$$+K\cdot\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)+C. \quad \text{(II)}$$

§. 3.

Setzt man in (II):

$$f(x)=(x-\alpha)\lambda(x),$$

wo also $\lambda(x)$ ebenfalls eine ganze Funktion von x ist, und folglich

$$\psi(x)=\int\frac{\lambda(x)\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

so ist, weil $f(\alpha)=0$:

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1)+m_2\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+m_r\varepsilon_r\psi(x_r)$$
$$=K\cdot\frac{\lambda(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)+C, \quad \text{(III)}$$

worin den Grössen m und ε die obigen Bedeutungen zukommen.

§. 4.

Wird $f(x)$ so gewählt, dass der Grad von $(f(x))^2$ niedriger ist als der von

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x),$$

so hat die Grösse

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right),$$

wenn sie entwickelt wird, die Potenz $\frac{1}{x}$ nicht. Denn

Digitized by Google

$$\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}$$

ist von demselben Grade, wie

$$\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)},$$

folglich enthält

$$\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

bei der Entwicklung nach fallenden Potenzen keine positive Potenz von x, also enthält

$$\frac{1}{x-\alpha}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

höchstens die Potenz $\frac{1}{x}$. Da aber $f(x)$ von niedrigerem Grade ist, als $\sqrt{\varphi(x)}$, so enthält also

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

die Potenz $\frac{1}{x}$ nicht.

In diesem Falle hat man, wenn

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}:$$

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1) + m_2\varepsilon_2\psi(x_2) + \ldots\ldots + m_r\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$= -\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right) + C. \quad \text{(IV)}$$

§. 5.

Setzt man nun in Verbindung von §. 3. und §. 4. voraus, dass

$$f(x) = (x-\alpha)\lambda(x)$$

und der Grad von $x^2(\lambda(x))^2$ niederer als der von $\varphi(x)$, so ist wenn

Digitized by Google

$$\psi(x) = \int \frac{\lambda(x)\,\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} :$$

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1) + m_2\varepsilon_2\psi(x_2) + \ldots\ldots + m_r\varepsilon_r\psi(x_r) = C. \qquad \text{(V)}$$

§. 6.

Differenzirt man die Formel (IV) $(n-1)$mal nach einander in Bezug auf α, setzt also

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)\,\partial x}{(x-\alpha)^n \sqrt{\varphi(x)}},$$

$(f(x))^2$ von niederm Grade als $\varphi(x)$, so ist

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1) + m_2\varepsilon_2\psi(x_2) + \ldots\ldots\ldots + m_r\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(n)}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left[\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log.\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)\right] + C, \qquad \text{(VI)}$$

da die Constante im Allgemeinen von dem Werthe von α abhängen kann.

§. 7.

Ist endlich

$$\psi(x) = \int \frac{X\,\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

und ist X eine beliebige rationale Funktion von x, so wird man setzen können:

$$X = f_0(x) + \frac{f_1(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}} + \frac{f_2(x)}{(x-\alpha_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{f_s(x)}{(x-\alpha_s)^{n_s}},$$

worin $f_0(x), f_1(x), \ldots\ldots, f_s(x)$ ganze Funktionen von x sind.

Genügen nun $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots f_s(x)$ der Bedingung, welcher $f(x)$ in §. 6. genügen muss, so folgt aus §. 3. und §. 6.:

Digitized by Google

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1)+m_2\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots.+m_r\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$=K\frac{f_0(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\log\sigma(x)-\frac{1}{\Gamma(n_1)}\frac{\partial^{n_1-1}}{\partial\alpha_1^{n_1-1}}\left(\frac{f_1(\alpha_1)}{\sqrt{\varphi(\alpha_1)}}\log\sigma(\alpha_1)\right)-\ldots.$$

$$\ldots.-\frac{1}{\Gamma(n_s)}\frac{\partial^{n_s-1}}{\partial\alpha_s^{n_s-1}}\left(\frac{f_s(\alpha_s)}{\sqrt{\varphi(\alpha_s)}}\log\sigma(\alpha_s)\right)+C, \quad \text{(VII)}$$

worin

$$\sigma(x)=\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}.$$

§. 8.

Man setze in §. 3.

$$\varphi_1(x)=x, \quad \varphi_2(x)=1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots.+\alpha_{2n}x^{2n},$$
$$\theta(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots.+a_nx^n, \quad \theta_1(x)=c;$$

so ist

$$F(x)=x(\theta(x))^2-c^2(\varphi_2(x))=(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{2n+1})$$
$$=x^{2n+1}+\beta_1x^{2n}+\ldots.+\beta_{2n+1} \quad (12)$$

eine ganze Funktion vom Grade $2n+1$. Ist nun noch $\lambda(x)=x^m$, so wird, so lange $2m+2<2n+1$, $2m<2n-1$, also $m\leqq n-1$, der Satz §. 5. gelten, also, für

$$\psi(x)=\int\frac{x^m\partial x}{\sqrt{x(1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_{2n}x^{2n})}}:$$

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots.+\varepsilon_{2n+1}\psi(x_{2n+1})=C, \quad \text{(VIII)}$$

worin allgemein ε_e durch die Gleichung

$$x_e\theta(x_e)=\varepsilon_ec\sqrt{x_e\varphi_2(x_e)}$$

bestimmt wird.

Ist aber $m\geqq n$, so tritt §. 3. in sein Recht. Sei $m=n+r$ und

$$\frac{1}{\sqrt{x\varphi_2(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{x}+c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{x}-c\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)=\frac{A_0}{x^{n+1}}+\frac{A_1}{x^{n+2}}+\ldots.,$$

Digitized by Google

so ist klar, dass

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_{2n+1}\psi(x_{2n+1})=C+A_r. \qquad \text{(IX)}$$

Setzt man

$$\frac{c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{F(x)}}=y,$$

so ist, da

$$\sqrt{x}\,.\,\theta(x)=\sqrt{F(x)+c^2\varphi_2(x)},$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{x\varphi_2(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{x}+c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{x}-c\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x\varphi_2(x)}}\log\left(\frac{\sqrt{F(x)+c^2\varphi_2(x)}+c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{F(x)+c^2\varphi_2(x)}-c\sqrt{\varphi_2(x)}}\right),$$

auch

$$\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{x}+c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{x}-c\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

$$=\log\left(\frac{\sqrt{1+y^2}+y}{\sqrt{1+y^2}-y}\right)=2\int_0^y\frac{\partial y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$=2y-\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4.5}y^5-\frac{3.5}{4.6.7}y^7+\ldots\ldots,$$

daher

$$\frac{A_0}{x^{n+1}}+\frac{A_1}{x^{n+1}}+\ldots=\frac{2c}{\sqrt{xF(x)}}-\frac{1}{3}\frac{c^3\varphi_2(x)}{\sqrt{x}\sqrt{F(x)^3}}$$

$$+\frac{3}{4.5}\frac{c^5(\varphi_2(x))^2}{\sqrt{x}\sqrt{F(x)^5}}-\ldots,$$

woraus leicht folgt, dass

$$A_0=2c.$$

Aus (12) folgt

$$c=\sqrt{x_1x_2\ldots x_{2n+1}}.$$

Demnach erhält man aus (IX):

$$\varepsilon_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 \psi(x_2) + \ldots\ldots + \varepsilon_{2n+1} \psi(x_{2n+1}) = C + 2\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{2n+1}}, \qquad (X)$$

wenn

$$\psi(x) = \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{x \varphi_2(x)}}.$$

§. 9.

Man setze in §. 7.

$$X = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{-\frac{1}{2}a}{-a+x} + \frac{\frac{1}{2}a}{a+x},$$

so ist dort:

$$f_0(x) = 0, \quad f_1(x) = -\frac{1}{2}a, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}a, \quad n_1 = n_2 = 1,$$

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = -a.$$

Ferner sei

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = (1-x^2)(1-c^2x^2), \quad c^2 \leqq 1,$$

und endlich seien $\theta(x)$ und $\theta_1(x)$ so beschaffen, dass die erste lauter gerade, die andere lauter ungerade Potenzen von x enthalte. Alsdann wird man setzen können:

$$F(x) = (\theta(x))^2 - (\theta_1(x))^2 \varphi_2(x) = A(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \ldots (x^2 - x_r^2)$$

und also, wenn

Digitized by Google

$$\psi(x) = \int \frac{\partial x}{(1-\frac{x^2}{a^2})\sqrt{\varphi(x)}} :$$

$$= \varepsilon_1\psi(x_1) + \varepsilon'_1\psi(-x_1) + \varepsilon_2\psi(x_2) + \varepsilon'_2\psi(-x_2) + \ldots\ldots + \varepsilon_r\psi(x_r) + \varepsilon'_r\psi(-x_r)$$
$$= \frac{a}{2\sqrt{\varphi_2(a)}}\log\left(\frac{\theta(a)+\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}{\theta(a)-\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}\right) - \frac{a}{2\sqrt{\varphi_2(x)}}\log\left(\frac{\theta(-a)+\theta_1(-a)\sqrt{\varphi_2(a)}}{\theta(-a)-\theta_1(-a)\sqrt{\varphi_2(a)}}\right)+C. \quad (13)$$

Da aber, der Annahme nach,

$$\theta_1(-a) = -\theta_1(a), \quad \theta(a) = \theta(-a);$$

so ist die zweite Seite:

$$\frac{a}{\sqrt{\varphi_2(a)}}\log\left(\frac{\theta(a)+\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}{\theta(a)-\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}\right)+C. \quad (14)$$

Die Vorzeichen ε_ϱ und ε'_ϱ bestimmen sich aus:

Digitized by Google

$$\theta(x_e)=\varepsilon_e\theta_1(x_e)\sqrt{\varphi_2(x_e)},$$
$$\theta(-x_e)=\varepsilon'_e\theta_1(-x_e)\sqrt{\varphi_2(x_e)}; \qquad (15)$$

also da

$$\theta_1(-x_e)=-\theta_1(x_e),$$

so ist $\varepsilon'_e=-\varepsilon_e$, und da auch

$$\psi(-x_e)=-\psi(x_e), \quad \varepsilon'_e\psi(-x_e)=\varepsilon_e\psi(x_e)$$

und folglich

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_r\psi(x_r)$$
$$=\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{\theta(a)+\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}{\theta(a)-\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}\right)+C, \quad \text{(XI)}$$

wo ε_e durch die erste Gleichung (15) bestimmt ist.

Die hier betrachteten Funktionen $\psi(x)$ sind sogenannte elliptische Funktionen der dritten Art.

§. 10.

Setzt man im vorigen Paragraphen $a=\infty$ und also

$$\psi(x)=\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

so ist:

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_r\psi(x_r)=C. \qquad \text{(XII)}$$

Die hier betrachteten Funktionen sind elliptische Funktionen der ersten Art.

§. 11.

Bezeichnet man durch $K_n f(a)$ den Koeffizienten von a^{-n} in der Entwicklung von $f(a)$ nach fallenden Potenzen von a, so erhält man, wenn man beide Seiten der Gleichung (XI) nach fallenden Potenzen von a entwickelt und setzt

$$\psi(x)=\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \varphi(x)=(1-x^2)(1-c^2x^2):$$

Digitized by Google

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$=\frac{K_2}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{\theta(a)+\theta_1(a)\sqrt{\varphi(a)}}{\theta(a)-\theta_1(a)\sqrt{\varphi(a)}}\right)+C. \quad \text{(XIII)}$$

Die hier vorkommenden Funktionen sind elliptische Funktionen der zweiten Art. (Archiv. Theil XIII. S. 12.).

§. 12.

Man setze in §. 4.

$$f(x)=1, \quad \varphi_2(x)=-(x-m_1)(x-m_2)\ldots\ldots(x-m_{2n}),$$

$$\varphi_1(x)=(x-m_{2n+1})(x-m_{2n+2}),$$

$$\theta_1(x)=1, \quad \theta(x)=C(x-A_1)(x-A_2)\ldots(x-A_{n-1});$$

so hat man zur Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ die Gleichung:

$$C^2(x-A_1)^2(x-A_2)^2\ldots(x-A_{n-1})^2(x-m_{2n+1})(x-m_{2n+2})$$
$$+(x-m_1)(x-m_2)\ldots(x-m_{2n})=0, \quad (16)$$

deren Wurzeln jene Grössen sind. Ist also

$$\psi(x)=\int\frac{\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \varphi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x);$$

so hat man:

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_{2n}\psi(x_{2n})$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\left(\frac{\theta(a)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)+C, \quad (17)$$

worin ε_e durch die Gleichung

$$\theta(x_e)\sqrt{\varphi_1(x_e)}=\varepsilon_e\sqrt{\varphi_2(x_e)}$$

bestimmt wird.

Setzt man

$$\varphi_2(x)=-\lambda(x),$$

so ist der zweite Theil der Gleichung (17):

Digitized by Google

$$C-\frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{\varphi_1(\alpha)\lambda(\alpha)}}\log\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\sqrt{-1}\sqrt{\lambda(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\sqrt{-1}\sqrt{\lambda(\alpha)}}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\varphi_1(\alpha)\lambda(\alpha)}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{\theta(\alpha)\varphi_1(\alpha)}{\sqrt{\varphi_1(\alpha)\lambda(\alpha)}}\right)+C,$$

also ist

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_{2n}\psi(x_{2n})$$
$$=C+\frac{2}{\sqrt{-\varphi(\alpha)}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{\theta(\alpha)\varphi_1(\alpha)}{\sqrt{-\varphi(\alpha)}}\right), \qquad \text{(XIV)}$$

wo

$$\varphi(x)=-(x-m_1)(x-m_2)\ldots\ldots(x-m_{2n+2}),$$

während $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{2n}$ auf die so eben angegebene Weise zu bestimmen sind.

§. 13.

Im Vorstehenden wurden $x_1, x_2, \ldots x_r$ (§. 1. ff.) als Funktionen der Grössen $a_0, a_1, \ldots a_n; c_0, c_1, \ldots c_m$ angesehen. Nun kann man umgekehrt einige der Grössen $x_1, x_2, \ldots$ als gegebene Veränderliche ansehen und aus ihnen die Grössen $a_0, a_1, \ldots; c_0, c_1 \ldots$ zu bestimmen suchen. Man sieht leicht, dass es der Allgemeinheit keinen Abbruch thut, wenn man eine dieser letztern gleich 1 setzt, so dass noch $m+n+1$ solcher Grössen übrig bleiben. Sei $m+n+1=r'$, und nehmen wir r (§. 1. (2)) gleich oder grösser als r', so kann man sämmtliche r' Grössen $a_0, \ldots a_n; c_0, \ldots c_m$, von denen eine gleich 1 ist, bestimmen durch die r' Gleichungen:

$$\theta(x_1)\sqrt{\varphi_1(x_1)}=\varepsilon_1\theta_1(x_1)\sqrt{\varphi_2(x_1)},$$
$$\theta(x_2)\sqrt{\varphi_1(x_2)}=\varepsilon_2\theta_1(x_2)\sqrt{\varphi_2(x_2)},$$
$$\vdots$$
$$\theta(x_{r'})\sqrt{\varphi_1(x_{r'})}=\varepsilon_{r'}\theta_1(x_{r'})\sqrt{\varphi_2(x_{r'})};$$

in denen die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_{r'}$ beliebig gleich ± 1 gesetzt werden können. Man setze z. B.

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3\ldots=\varepsilon_{r_1}=+1, \quad \varepsilon_{r_1+1}=\varepsilon_{r_1+2}=\ldots=\varepsilon_{r'}=-1;$$

so hat man zur Bestimmung von $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
\theta(x_1)\sqrt{\varphi_1(x_1)} &= \theta_1(x_1)\sqrt{\varphi_2(x_1)},\\
\theta(x_2)\sqrt{\varphi_1(x_2)} &= \theta_1(x_2)\sqrt{\varphi_2(x_2)},\\
&\vdots\\
\theta(x_{r_1})\sqrt{\varphi_1(x_{r_1})} &= \theta_1(x_{r_1})\sqrt{\varphi_2(x_{r_1})},\\
\theta(x_{r_1+1})\sqrt{\varphi_1(x_{r_1+1})} &= -\theta_1(x_{r_1+1})\sqrt{\varphi_2(x_{r_1+1})},\\
&\vdots\\
\theta(x_{r'})\sqrt{\varphi_1(x_{r'})} &= \theta_1(x_{r'})\sqrt{\varphi_2(x_{r'})}.
\end{aligned}\right\} \qquad (18.)$$

Diese Gleichungen geben nun die Werthe von $a_0', a_1, \ldots, c_0, c_1 \ldots$ vollständig als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_r (r \overset{=}{>} r')$, und der in $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ enthaltenen Koeffizienten. Setzt man diese Werthe von $a_0, \ldots, c_0, \ldots$ in die Gleichung (2), so wird ihre erste Seite durch $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{r'})$ theilbar, und man findet:

$$\frac{(\theta(x))^2\varphi_1(x) - (\theta_1(x))^2\varphi_2(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{r'})} = A(x-x_{r'+1})(x-x_{r'+2})\ldots(x-x_r) = R,$$

Setzt man nun:

$$x_{r'+1} = y_1, \; x_{r'+2} = y_2, \ldots x_r = y_s;$$

so sind $y_1, y_2, \ldots y_s$ die Wurzeln der Gleichung

$$R = 0, \qquad (19)$$

welche vom Grade $s = r - r'$ ist. Es wird somit immer möglich sein, diese Grössen zu bestimmen. Die nachfolgenden Grössen (± 1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_s$ ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\theta(y_1)\sqrt{\varphi_1(y_1)} &= \varepsilon_1\,\theta_1(y_1)\sqrt{\varphi_2(y_1)},\\
\theta(y_2)\sqrt{\varphi_1(y_2)} &= \varepsilon_2\,\theta_1(y_2)\sqrt{\varphi_2(y_2)},\\
&\vdots\\
\theta(y_s)\sqrt{\varphi_1(y_s)} &= \varepsilon_s\,\theta_1(y_s)\sqrt{\varphi_2(y_s)}
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

und man findet (§. 7.), wenn man setzt:

$$\psi(x) = \int \frac{X\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

X, $\varphi(x)$ was in §. 7. und denselben Bedingungen genügend:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_{r_1}) - \psi(x_{r_1+1}) - \psi(r_1+2) \ldots - \psi(x_{r'})$$
$$+ \varepsilon_1\psi(y_1) + \varepsilon_2\psi(y_2) + \ldots + \varepsilon_s\psi(y_s) = V + C, \qquad (XV)$$

wo V sich aus §. 7. ergiebt.

Aehnlich kann man in die übrigen Formeln substituiren.

Sei ϱ_1 der Grad von $\varphi_1(x)$, ϱ_2 der von $\varphi_2(x)$, $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$ der von $\varphi(x)$, so ist der Grad der Funktion $F(x)$ (§. 1.) entweder $2n+\varrho_1$ oder $2m+\varrho_2$; er sei z. B. $=2n+\varrho_1$, also

$$r = 2n + \varrho_1$$

und folglich

$$r \overset{=}{>} 2m + \varrho_2,$$

mithin auch

$$2r \overset{>}{=} 2m + \varrho_2 + 2n + \varrho_1,$$

$$r \overset{=}{>} m + n + \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \overset{=}{>} m + n + \frac{\varrho}{2},$$

also, da

$$s = r - r' = r - (m+n+1),$$

auch

$$s \overset{=}{>} m + n + \frac{\varrho}{2} - (m+n+1)$$

$$\overset{=}{>} \frac{\varrho}{2} - 1.$$

Der kleinste Werth, den also s haben kann, ist $\frac{\varrho}{2} - 1$, wenn ϱ gerade, und $\frac{\varrho - 1}{2}$, wenn ϱ ungerade ist. Man sieht, dass dieser Werth von $m+n$ gar nicht abhängt.

§. 14.

Wir wollen ferner annehmen, man mache die Voraussetzung des §. 9., und nehmen wir an, in $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ seien gerade r Koeffizienten, also, da einer $=1$ zu setzen ist, ihrer $r-1$ zu bestimmen. Beiläufig bemerken wir auch, dass in §. 9. Alles dasselbe bleiben würde, wenn man annähme, in $\theta(x)$ seien nur ungerade und in $\theta_1(x)$ nur gerade Potenzen von x.

Sei nun r gerade, $=2n$.

Digitized by Google

Man setze:

$$\theta(x)=a_0+a_1x^2+\ldots.+a_{n-1}x^{2n-2}+x^{2n},$$
$$\theta_1(x)=(b_0+b_1x^2+\ldots.+b_{n-2}x^{2n-4})\,x,$$

$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_{2n-1}=-1$, so werden $a_0,\ldots$ $b_0\ldots$ bestimmt durch:

$$\left.\begin{array}{l}\theta(x_1)+\theta_1(x_1)\sqrt{\varphi_1(x_1)}=0,\\ \theta(x_2)+\theta_1(x_2)\sqrt{\varphi_2(x_2)}=0,\\ \quad\vdots\\ \theta(x_{2n-1})+\theta_1(x_{2n-1})\sqrt{\varphi(x_{2n-1})}=0\end{array}\right\}\quad(21)\quad\varphi(x)=(1-x^2)(1-c^2x^2),$$

wenn die $2n-1=r-1$ Grössen x_1, $x_2,\ldots x_{2n-1}$ als gegeben angesehen werden. Ist diese Bestimmung geschehen, so hat man in §. 7:

(22)

$$(\theta(x))^2-(\theta_1(x))^2\varphi(x)=(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_{2n-1}^2)(x^2-y^2),$$

woraus leicht folgt:

$$y=\frac{a_0}{x_1x_2\ldots.x_{2n-1}}.\qquad(23)$$

Sei zweitens r ungerade, $=2n+1$.

Alsdann setze man:

$$\theta(x)=(a_0+a_1x^2+\ldots.+a_nx^{2n})x,$$
$$\theta_1(x)=b_0+b_1x^2+\ldots.+b_{n-1}x^{2n-2};$$

bestimme ferner $a_0,\ldots$ $b_0\ldots.$ durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\theta(x_1)+\theta_1(x_1)\sqrt{\varphi(x_1)}=0,\\ \quad\vdots\\ \theta(x_{2n})+\theta_1(x_{2n})\sqrt{\varphi(x_{2n})}=0;\end{array}\right\}\qquad(24)$$

so erhält man

$$y=\frac{b_0}{x_1x_2\ldots x_{2n}}.\qquad(25)$$

Setzt man nun die Werthe von x_1, $x_2,\ldots.x_{r-1}$, y in die Formeln (XI.), (XII.), (XIII.), so erhält man Theoreme über die ellipti-

Digitized by Google

schen Funktionen. Dabei ist zu bemerken, dass $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots\ldots=\varepsilon_{r-1}=-1$ genommen wurde, $x_r=y$, und ε_r aus der Gleichung

$$\theta(y)=\varepsilon_r\theta_1(y)\sqrt{\varphi(y)} \qquad (26)$$

bestimmt wird.

§. 15.

Setzt man, um ein Beispiel zu wählen, im vorigen Paragraphen $r=3$, so ist

$$\theta(x)=(a_0+x^2)x,\quad \theta_1(x)=b_0,\quad \varphi(x)=(1-x^2)(1-c^2x^2);$$

also werden a_0 und b_0 durch die Gleichungen

$$(a_0+x_1^2)x_1+b_0\sqrt{\varphi(x_1)}=0,$$

$$(a_0+x_2^2)x_2+b_0\sqrt{\varphi(x_2)}=0$$

bestimmt, woraus folgt:

$$a_0=\frac{x_2^3\sqrt{\varphi(x_1)}-x_1^3\sqrt{\varphi(x_2)}}{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}-x_2\sqrt{(\varphi x_1)}},\qquad b_0=\frac{x_2x_1^3-x_1x_2^3}{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}-x_2\sqrt{\varphi(x_1)}};$$

$$y=\frac{b_0}{x_1x_2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}-x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}$$

$$=\frac{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}+x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}{1-c^2x_1^2x_2^2},\quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=-1.$$

Zur Bestimmung von ε_3 hat man:

$$(a_0+y^2)y=\varepsilon_3b_0\sqrt{\varphi(y)},\quad (a_0+y^2)=\varepsilon_3x_1x_2\sqrt{\varphi(y)}.$$

Denken wir uns x_1, x_2 unendlich klein, so wird

$$\sqrt{\varphi(x_1)}=\sqrt{\varphi(x_2)}=1,$$

also (24) sind x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\theta(x)+\theta_1(x)=0,$$

d. h. von

$$(a_0+x^2)x+b_0=0.$$

Diese Gleichung hat noch eine dritte Wurzel z, und es ist offenbar

Digitized by Google

$$zx_1x_2 = -b_0,\quad z = -y;$$

also ist

$$-(a_0+y^2)y + b_0 = 0,$$
$$(a_0+y^2)y = b_0;$$

also

$$1 = \varepsilon_3\sqrt{\varphi(y)},$$

und für x_1, x_2 unendlich klein, auch $\sqrt{\varphi(y)}=1$, ist $\varepsilon_3 = 1$.

Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung:

$\int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$ durch $F_1(x)$,

$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$ durch $F_2(x)$,

$\int \frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{\varphi(x)}}$ durch $F_3(x)$;

$\varphi(x) = (1-x^2)(1-c^2x^2)$

$c^2 \leqq 1$, x_1 und x_2 nicht über 1 und unter -1:

so findet man nach (XII.), (XIII.) und (XI.):

(26)

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1)+F_1(x_2) &= F_1(y)+C,\\ F_2(x_1)+F_2(x_2) &= F_2(y)-K_2\left[\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a+b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a-b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right)\right]\\ &\quad + C,\\ F_3(x_1)+F_3(x_2) &= F_2(y)-\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a+b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a-b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right)+C; \end{aligned}\right\}$$

worin:

$$y = \frac{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}+x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}{1-c^2x_1^2x_2^2}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a+b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a-b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right) = \frac{b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a}+\frac{1}{3}\left(\frac{b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a}\right)^3+\ldots,$$

$$\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a+b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a-b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right) = \frac{b_0}{a_0+a^2}+\frac{1}{3}\frac{b_0^3\varphi(a)}{a^2(a_0+a^2)^3}+\ldots$$

Digitized by Google

Demnach ist der Koeffizient von $\frac{1}{a^2}$ gleich b_0, und folglich werden die obigen Gleichungen definitiv zu:

$$F_1(x_1)+F_1(x_2)=F_1(y)+C,$$

$$F_2(x_1)+F_2(x_2)=F_2(y)-b_0+C,$$

$$F_3(x_1)+F_3(x_2)=F_3(y)-\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a+b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a-b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right)+C\Bigg\}\text{(XV}$$

worin

$$y=\frac{b_0}{x_1\,x_2},$$

a_0, b_0 bestimmt durch die Formeln des §. 15. Die Formeln (XVI.) enthalten die Additionstheoreme für zwei elliptische Funktionen der verschiedenen Arten.

Da für $x_1=x_2=0$ auch $a_0=b_0=0$ und $y=0$, so sind die Konstanten in diesen Formeln Null, wenn man 0 als untere Gränze der Integration nimmt. Setzt man $x=\sin\varphi$, so ist

$$F_1(x)=\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},\quad F_2(x)=\int_0^{\varphi}\frac{\sin\varphi^2\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

$$F_3(x)=\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{a^2}\right)\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}.$$

Darnach stellen sich diese Gleichungen auch so dar:

(27)

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}+\int_0^{\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\int_0^{\psi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

(28)

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{\sin\varphi^2 \partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}} + \int_0^{\varphi_2} \frac{\sin\varphi^2 \partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}} = \int_0^{\psi} \frac{\sin\varphi^2 \partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}} - \frac{\sin\varphi_2 \sin\varphi_1{}^3 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2{}^3}{\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_2{}^2} - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_2{}^2}},$$

(29)

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{a^2}\right)\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}} + \int_0^{\varphi_2} \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{a^2}\right)\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}} = \int_0^{\psi} \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{a^2}\right)\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

$$- \frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}} \log \left(\frac{a\sin\varphi_2{}^3 \cos\varphi_1 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_1{}^2} - a\sin\varphi_1{}^3 \cos\varphi_2 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_2{}^2} + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 (\sin\varphi_1{}^2 - \sin\varphi_2{}^2) \sqrt{\varphi(a)} + a^3}{a\sin\varphi_2{}^3 \cos\varphi_1 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_1{}^2} - a\sin\varphi_1{}^3 \cos\varphi_2 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_2{}^2} - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 (\sin\varphi_1{}^2 - \sin\varphi_2{}^2) \sqrt{\varphi(a)} + a^3} \right)$$

Digitized by Google

worin ψ bestimmt ist durch:

(30)

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_2{}^2} + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_1{}^2}}{1-c^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2}.$$

Die Gleichung (30) ist nichts Anderes als die Gleichung (1) in Archiv Theil XI. S. 395. ff. §. 4.

Die Integrale in (28) gehören zu den in Archiv Theil XIII. S. 12. ff. betrachteten und zwar zu der dortigen Gattung $\int_0^v \mathrm{sn}^2 v \partial v$; die in (29) zu den dort S. 19. ff. betrachteten.

Bezeichnen wir den Werth von

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \qquad (31)$$

durch v, so ist (Archiv Theil XI. S. 395. ff. §. 2.) $x = \mathrm{sn} v$, wenn c der Modulus ist, während die obige Grösse φ nichts anderes als die Amplitude von v ist. Bezeichnen wir durch v_1, v_2, w das, was aus (31) wird, wenn man x_1, x_2, y an die Stelle von x setzt, so giebt die Gleichung (27) oder die erste (XVI.):

$$v_1 + v_2 = w,$$

während $\sin\psi = \mathrm{sn} w$, $\sin\varphi_1 = \mathrm{sn} v_1$, $\sin\varphi_2 = \mathrm{sn} v_2$; also nach (30):

$$\mathrm{sn}(v_1+v_2) = \frac{\mathrm{sn}v_1 \mathrm{cn}v_1 \mathrm{dn}v_2 + \mathrm{sn}v_2 \mathrm{cn}v_1 \mathrm{dn}v_1}{1-c^2\mathrm{sn}^2v_1\mathrm{sn}^2v_2}, \qquad (32)$$

was absolut die Gleichung (1) des §. 5. a. a. O. ist. Von dieser ausgehend, ist die ganze dortige Theorie leicht zu entwickeln.

Da aber für x_1, x_2 keine besonderen Bezeichnungen festgestellt wurden, so gilt die Formel (32) für alle möglichen Werthe von x_1 und x_2, so wie von c, was die Herleitung der Formeln der §. 6. und §. 11. sehr erleichtert.

Die Grösse

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi \partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$

wurde in Archiv Theil XIII. S. 1. ff. §. 18. durch $\int_0^v \mathrm{sn}^2 v \partial v$ bezeichnet, worin v den obigen Werth hat. Diese letztere Grösse fand sich dort

$$\frac{1}{c^2}(v - E(v)),$$

also giebt (28) oder die zweite Gleichung (XVI.):

$$E(v_1) + E(v_2) = E(v_1+v_2) + \frac{c^2 \mathrm{sn}v_1 \mathrm{sn}v_2 (\mathrm{sn}^2 v_1 - \mathrm{sn}^2 v_2)}{\mathrm{sn}v_1 \,\mathrm{cn}v_2 \mathrm{d}n v_2 - \mathrm{sn}v_2 \mathrm{cn}v_1 \mathrm{d}n v_1}$$
$$= E(v_1+v_2) + c^2 \mathrm{sn}v_1 \mathrm{sn}v_2 \mathrm{sn}(v_1+v_2),$$

was eben die Gleichung (1) in §. 19. a. a. O. ist.

Auch hier ist keine Beschränkung für die Werthe vorhanden.

Eben so gehört endlich $F_3(x)$ (XVI.) zu den mit J in §. 23. a. a. O. bezeichneten Funktionen der dritten Art, und zwar ist sie:

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1 - \frac{\mathrm{sn}^2 v}{a^2}}.$$

Ist also

$$a^2 = \frac{1}{c^2 \mathrm{sn}^2 b},$$

so ist sie gleich

$$v + c^2 \mathrm{sn}^2 b J(v, b)$$

nach (4) des angeführten §. 23. Die Gleichung (29) drückt dann ebenfalls eine Summirungsformel dieser Grössen aus, deren Entwicklung nicht schwer ist. Dass hieraus die Theorie der drei Arten elliptischer Funktionen fliesst, ist klar. Das Gesagte mag aber für den Augenblick genügen.

Es bleibt uns zum Schlusse noch die in §. 1. versprochene Entwicklung der vor (11) stehenden Gleichung übrig.

Der schönste Beweis ist wohl der, den Liouville in seinem Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome XI. pag. 462. gegeben, der auf das Folgende herauskommt. Man habe die Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$, so beschaffen, dass

$$\psi(x) = x^m + a_0 x^{m-1} + \ldots.$$

$$\varphi(x) = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots.$$

dass also, wenn b_0, b_1,... nicht Null sind, $\varphi(x)$ vom Grade $m-1$ ist, wenn $\psi(x)$ vom Grade m. Sei nun β irgend eine Grösse, so bestimmt, dass

$$\psi(x)+\beta\varphi(x)=0, \qquad (33)$$

und bezeichne $\Sigma(x)$ die Summe der Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$\Sigma(x)=-a_0-b_0\beta,$$

also, da diese Wurzeln von β abhängen:

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial\beta}=-b_0. \qquad (34)$$

Differenzirt man aber (33) in Bezug auf β, so ist

$$[\psi'(x)+\beta\varphi'(x)]\frac{\partial x}{\partial\beta}+\varphi(x)=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\beta}=-\frac{\varphi x}{\psi'(x)+\beta\varphi'(x)}.$$

Demnach in (34):

$$\Sigma\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)+\beta\varphi'(x)}=+b_0. \qquad (35)$$

Da β ganz willkührlich ist, so setzen wir es $=0$, so ist:

$$\Sigma\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}=b_0. \qquad (36)$$

oder wenn $\varphi(x)=1$, also $b_0=0$:

$$\Sigma\frac{1}{\psi'(x)}=0. \qquad (37)$$

Sei nun

$$\psi(x)=(x-\alpha)F(x),$$

und habe $F(x)$ die Wurzeln x_1, x_2,.... x_r, so ist

$$\psi'(x)=F(x)+(x-\alpha)F'(x),$$

und die Gleichung (37) heisst eigentlich:

$$\frac{1}{F(\alpha)} + \frac{1}{(x_1-\alpha)F'(x_1)} + \frac{1}{(x_2-\alpha)F'(x_2)} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{1}{(x_r-\alpha)F'(x_r)} = 0,$$

da α, $x_1, \ldots x_r$ die Wurzeln von $\psi(x)=0$ sind. Diess ist aber

$$\frac{1}{(x_1-\alpha)F'(x_1)} + \frac{1}{(x_2-\alpha)F'(x_2)} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{1}{(x_r-\alpha)F'(x_r)} = -\frac{1}{F(\alpha)},$$

also wenn das Zeichen Σ sich bloss auf die Wurzeln von $F(x)=0$ bezieht:

$$\Sigma \frac{1}{(x-\alpha)F'(x)} = -\frac{1}{F(\alpha)}, \qquad (38)$$

was eben die zu beweisende Gleichung ist.

Digitized by Google

VIII.

De Integralibus quibusdam definitis.

Auctor Christianus Fr. Lindman,
Lector Strengnesensis.

1.

In Tom. VI. praec. pag. 187. seqq. Cel. Arndt integralia definita

$$\int_0^{n\pi} l\,\mathrm{Sin}\varphi\,d\varphi, \quad \int_0^{n\pi} \varphi l\sin\varphi\,d\varphi$$

tractat, ubi $n=$ num. integro. Beneficio theorematis

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{b-a} f(a-x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

quod in Tom. IV. praec. pag. 119. commemoratum et in Calc. integr. Cel. Moigno pag. 45. quoque inest, illa integralia paullo brevius inveniri videntur, ita ut sequitur.

Ut maximam generalitatem consequamur, pro $l\,\mathrm{Sin}\varphi$ ponamus

$$l((\mathrm{Sin}\varphi)) = l\,\mathrm{Sin}\varphi \pm 2k\pi\sqrt{-1}$$

et pro $l(-\mathrm{Sin}\varphi)$ itidem

$$l((-\mathrm{Sin}\varphi)) = l\,\mathrm{Sin}\varphi \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}\,^{*}).$$

Ex theoremate (α) habebimus

---

*) Vide Cauchy, Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique, pag. 319.

Digitized by Google

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \frac{\pi}{2} l\frac{1}{2} \pm k\pi^2\sqrt{-1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l((-\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \frac{\pi}{2} l\frac{1}{2} \pm \frac{2\lambda+1}{2}\pi^2\sqrt{-1}\ ^*);$$

unde beneficio theorematis notissimi inveniemus:

$$\int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} l((\mathrm{Sin}_\varphi))d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} l((\mathrm{Sin}\,\varphi))\,d\varphi$$

$$= \pi l\frac{1}{2} \pm 2k\pi^2\sqrt{-1},$$

$$\int_0^{\pi} l((-\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l((-\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} l((-\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} l((-\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi$$

$$= \pi l\frac{1}{2} \pm (2\lambda+1)\pi^2\sqrt{-1}.$$

Ex theoremate nuper citato sequitur, ut sit

$$\int_0^{n\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = \int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi + \ldots.$$

$$\ldots. + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi.$$

Quum vero secundum theorema (α) sit (m = num integro):

$$\int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \int_0^{\pi} l\,((\mathrm{Sin}\,(2m\pi-\varphi)))d\varphi = \int_0^{\pi} l\,((-\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi,$$

$$\int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = \int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}(\overline{2m+1}, \pi-\varphi))\,d\varphi = \int_0^{\pi} l\,((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi;$$

habebimus·

---

*) Vide Grunert Archiv Tom. IV. pag. 120.

dum est $n = \text{num. par} = 2m$

$$\int_0^{2m\pi} l((\text{Sin}\varphi))\,d\varphi = m\int_0^{\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi + m\int_0^{\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi$$

$$= m\pi\{2l\tfrac{1}{2} \pm 2k\pi\sqrt{-1} \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}\};$$

dum est $n = \text{num. imp.} = 2m+1$

$$\int_0^{(2m+1)\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi = (m+1)\int_0^{\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi + m\int_0^{\pi} l((-\text{Sin}\varphi))d\varphi$$

$$= \pi\{(2m+1)l\tfrac{1}{2} \pm 2k(m+1)\pi\sqrt{-1} \pm (2\lambda+1)m\pi\sqrt{-1}\}.$$

Jam facillime inveniri potest $\int_0^{n\pi} \varphi l((\text{Sin}\varphi))d\varphi$ (n=num. integ.). Existit enim

$$\int_0^{n\pi} \varphi l((\text{Sin}\varphi))d\varphi = \int_0^{\pi} \varphi l((\text{Sin}\varphi))d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \varphi l((\text{Sin}\varphi))d\varphi + \ldots.$$

$$\ldots. + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \varphi\, l((\text{Sin}\varphi))\,d\varphi$$

et, si est r = num. integro, secundum theorema (α) fit

$$\int_{(2r-1)\pi}^{2r\pi} \varphi\, l((\text{Sin}\varphi))d\varphi = 2r\pi\int_0^{\pi} l((-\text{Sin}\varphi))\,d\varphi - \int_0^{\pi} \varphi l((-\text{Sin}\varphi))d\varphi \ldots\ldots (\beta)$$

$$\int_{2r\pi}^{(2r+1)\pi} \varphi l((\text{Sin}\varphi))d\varphi = (2r+1)\,\pi\int_0^{\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi - \int_0^{\pi} \varphi l((\text{Sin}\varphi))d\varphi \ldots. (\gamma)$$

Praeterea est*)

$$\int_0^{\pi} \varphi\, l((\text{Sin}\varphi))d\varphi = \frac{\pi^2}{2} l\tfrac{1}{2} \pm k\pi^2\sqrt{-1},$$

$$\int_0^{\pi} \varphi l((-\text{Sin}\varphi))d\varphi = \frac{\pi^2}{2} l\tfrac{1}{2} \pm \frac{2\lambda+1}{2}\pi^2\sqrt{-1}.$$

Si ad invenienda integralia, in quae integrale quaesitum distributum est, formulae (β) et (γ) adhibentur, addendo et reputando, coëfficientes termini harum formularum prioris in progressione arithmetica esse obtinebimus:

*) Vide Grunert, Archiv. l. c.

Digitized by Google

$(n = \text{num. par.} = 2m)$

$$\int_0^{2n\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \pi^2 m\{2ml\frac{1}{2} \pm k\pi(2m-1)\sqrt{-1} \pm \frac{2\lambda+1}{2}(2m+1)\pi\sqrt{-1}\}$$

$(n = \text{num. imp.} = 2m+1)$

$$\int_0^{(2m+1)\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi$$

$$= \pi^2(2m+1)\left\{\frac{2m+1}{2}l\frac{1}{2} \pm k\pi(m+1)\sqrt{-1} \pm \frac{2\lambda+1}{2}m\pi\sqrt{-1}\right\}.$$

II.

In Tom. X praec. pag. 341. Cel. Dienger proposuit integrale $\int_0^x \frac{x^{a-1}dx}{1+x^2+x^4}$, quod casus tantum est specialis integralis generalioris

$$J = \int_0^x \frac{x^{a-1}dx}{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2(n-1)}},$$

quod hoc modo inveniri potest. Termini denominatoris sunt in progressione geometrica, cujus summa est $= \frac{1-x^{2n}}{1-x^2}$, quamobrem evadit

$$J = \int_0^x \frac{(1-x^2)x^{a-1}dx}{1-x^{2n}} = \int_0^x \frac{x^{a-1}dx}{1-x^{2n}} - \int_0^x \frac{x^{a+1}dx}{1-x^{2n}}.$$

Posito $x^{2n} = y$, ideoque $x = y^{\frac{1}{2n}}$, $dx = \frac{1}{2n}y^{\frac{1}{2n}-1}dy$, habebimus

$$J = \frac{1}{2n}\int_0^x \frac{y^{\frac{a}{2n}-1}dy}{1-y} - \frac{1}{2n}\int_0^x \frac{y^{\frac{a+2}{2n}-1}dy}{1-y}.$$

Ex cognita vero formula *)

$$\int_0^x \frac{z^{\alpha-1}dz}{1-z} = \pi\mathrm{Cot}\alpha\pi, \quad 1 > \alpha > 0$$

sequitur, ut sit

*) Vid. ex. gr. Moigno, Calc. integr. pag. 69.

$$J=\frac{\pi}{2n}\left\{\operatorname{Cot}\frac{a\pi}{2n}-\operatorname{Cot}\frac{(a+2)\pi}{2n}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2n}\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{Sin}\frac{a\pi}{2n}\operatorname{Sin}\frac{(a+2)\pi}{2n}},\quad 2(n-1)>a>0. \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

Formula (*i*) differentianda respectu ipsius a prodit

$$\int_0^\infty \frac{(1-x^2)x^{a-1}l\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^{2n}}\,dx=\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\frac{\operatorname{Sin}\frac{(a+1)\pi}{n}\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{Sin}^2\frac{a\pi}{2n}\operatorname{Sin}^2\frac{(a+2)\pi}{2n}}.$$

Hic posito $x=y^{\frac{1}{n}}$ prodit

$$\int_0^\infty \frac{(1-y^{\frac{2}{n}})y^{\frac{a}{n}-1}ly}{1-y^2}\,dy=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\operatorname{Sin}\frac{(a+1)\pi}{n}\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{Sin}^2\frac{a\pi}{2n}\operatorname{Sin}^2\frac{(a+2)\pi}{2n}}. \quad \ldots\ldots (k$$

Si ponimus $a=n-2$, invenimus

$$\int_0^\infty \frac{(1-y^{-\frac{2}{n}})\,ly}{1-y^2}\,dy=\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2,$$

ubi necesse est, sit $n>2$, quia alioquin a evadit $=<0$. C Schlömilch hanc formulam proposuit in Tom. XII. praec. pag. 20 ubi contendit fieri non posse, quin quantitas μ sit fractio propr negativa. Quod per μ designat, idem est atque $-\frac{2}{n}$ in forma mea. At vero quum $2(n-1)>a>0$ esse debeat, ut antea demo stratum est, nihil prorsus impedire videtur, quominus in forma (*k*) ex. gr. $a=n$ ponatur, dummodo sit $n>2$. Haec suppositio dab

$$\int_0^\infty \frac{(1-y^{\frac{2}{n}})\,ly}{1-y^2}\,dy=\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

Eodem modo, quo integrale (*i*) inventum est, cognoscere qu que licet

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}.$$

Enimvero quum termini denominatoris sint in progressione geometrica, cujus summa est $=\frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1-x^2}$, evadit

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x^2+x^4\ldots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}} = \int_0^x \frac{(1+x^2)\,x^{a-1}dx}{1-(-1)^n x^{2n}}.$$

Substituendo y pro x^{2n} et formulis cognitis*)

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\alpha\pi},\quad \int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1-z} = \pi\,\mathrm{Cot}\alpha\pi,\quad 1>\alpha>0$$

adhibendis, hac pro $n=$ num. par., illa pro $n=$ num. imp., invenitur:

$(n=$ num. par.$)$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^x \frac{(1+x^2)x^{a-1}}{1-x^{2n}}dx &= \frac{\pi}{2n}\left(\mathrm{Cot}\frac{a\pi}{2n}+\mathrm{Cot}\frac{(a+2)\pi}{2n}\right)\\ n&=\text{num. imp.}\\ \int_0^x \frac{(1+x^2)x^{a-1}}{1+x^{2n}}dx &= \frac{\pi}{2n}\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{a\pi}{2n}}+\frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{(a+2)\pi}{2n}}\right)\end{aligned}\right\} 2(n-1)>a>0.$$

III.

Facillime inveniuntur integralia $(\alpha>0)$

$$\int_0^\alpha \mathrm{Sin}\,uy\,dy = \frac{1-\mathrm{Cos}\alpha u}{u}\ (1),\quad \int_0^\alpha \mathrm{Cos}\,uy\,dy = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha u}{u}\ \ldots\ldots\ (2)$$

quae multiplicata per $e^{-cu}du$ ($c=$ quant. posit.), integratione ab $u=0$ usque ad $u=\infty$ facta, dabunt:

$$\int_0^\infty e^{-cu}du\int_0^\alpha \mathrm{Sin}\,uy\,dy = \int_0^\infty \frac{1-\mathrm{Cos}\alpha u}{u}e^{-cu}\,du,$$

$$\int_0^\infty e^{-cu}du\int_0^\alpha \mathrm{Cos}\,uy\,dy = \int_0^\infty \frac{e^{-cu}\mathrm{Sin}\,\alpha u}{u}du.$$

Ordine integrationum permutato, beneficio formularum

---

*) Vid. Moigno l. c.

Digitized by Google

$$\int_0^\infty e^{-ax}\mathrm{Sin}\,bx\,dx=\frac{b^2}{a^2+b^2},\quad \int_0^\infty e^{-ax}\mathrm{Cos}\,bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2},$$

inveniemus:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cu}\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha u}{u}\,du=\frac{1}{4}\,l\left(1+\frac{\alpha^2}{c^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cu}\mathrm{Sin}\,\alpha u}{u}\,du=\mathrm{Arc\,tg}\frac{\alpha}{c}\ ^{*)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Posito $c=0$ in formula (4), habebimus formulam cognitam

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}.$$

Si my pro y in formula (1) substituitur, differentiatio respectu m dabit

$$\int_0^{\frac{a}{m}} y\,\mathrm{Cos}\,muy\,dy=\frac{\alpha}{m^2}\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha u}{u}-\frac{2}{m^2}\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha u}{u^2}.$$

Hoc quoque integrali per $e^{-cu}\,du$ multiplicato et integratione intra limites $u=0$, $u=\infty$ instituta, prodit:

$$\int_0^\infty e^{-cu}\,du\int_0^{\frac{a}{m}} y\,\mathrm{Cos}\,muy\,dy$$

$$=\frac{\alpha}{m^2}\int_0^\infty \frac{e^{-cu}\,\mathrm{Sin}\,\alpha u}{u}\,du-\frac{2}{m^2}\int_0^\infty \frac{e^{-cu}\,\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha u}{u^2}\,du.$$

Ordine integrationum permutando et formula (4) recordanda obtinebimus

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cu}\,\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha u}{u^2}\,du=\frac{\alpha}{2}\mathrm{Arc\,tg}\frac{\alpha}{c}-\frac{c}{4}\,l\left(1+\frac{\alpha^2}{c^2}\right) \quad \ldots\ldots (5)$$

Posito $\alpha=2$, $c=0$, form. (5) dabit, quia $\frac{c}{4}\,l\left(1+\frac{\alpha^2}{c^2}\right)=0$ pro $c=0$,

---

*) Hoc integrale Cel. Arndt aliunde procedens invenit in Tom. XI. praec. pag. 77.

Digitized by Google

$$\int_0^x \frac{\mathrm{Sin}^2 u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

quod integrale etiam hoc modo probari potest. Per partes integrando reperiemus

$$\int \frac{\mathrm{Sin}^2 u}{u^2}\,du = -\frac{\mathrm{Sin}^2 u}{u} + \int \frac{\mathrm{Sin}2u}{u}\,du,$$

quod intra limites 0 et ∞ sumtum formulam (6) suppeditat. Enimvero quum Sin$u$ pro $n=\infty$ indeterminatus evadat, limites tamen $+1$ et -1 supergredi nequeat, fiat $\frac{\mathrm{Sin}^2 u}{u}=0$ pro $u=\infty$, necesse est.

IV.

De integrali

$$J=\int_0^\infty \frac{lx\,dx}{(a^2+b^2x^2)^n}.$$

Posito $x=\frac{a}{b}\mathrm{tg}\psi$ accipimus

$$J=\frac{1}{a^{2n-1}b}\,l\frac{a}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}^{2(n-1)}\psi\,d\psi + a^{\frac{1}{2n-1}}b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}^{2(n-1)}\psi\, l\,\mathrm{tg}\,\psi\,d\psi.$$

Cognitum vero est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}^{2(n-1)}\psi\,d\psi = \frac{1.3.....(2n-3)}{2^{n-1}.1.2...(n-1)}\cdot\frac{\pi}{2},$$

et per partes integrando invenimus

$$\int \mathrm{Cos}^{2(n-1)}\psi\, l\,\mathrm{tg}\,\psi\,d\psi$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\psi}{2(n-1)}\{\mathrm{Cos}^{2n-3}\psi + \frac{2n-3}{2(n-2)}\cdot\mathrm{Cos}^{2n-5}\psi + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{3.5....(2n-5)\,(2n-3)}{2^{n-2}.1.2.3....(n-2)}\mathrm{Cos}\psi\}\, l\,\mathrm{tg}\,\psi$$

$$+ \frac{1.3.5...(2n-5)\,(2n-3)}{2^{n-1}.1.2.3....(n-1)}\,\psi l\mathrm{tg}\psi$$

$$-\frac{1}{2(n-1)}\int d\psi\left\{\mathrm{Cos}^{2(n-2)}\psi+\frac{2n-3}{2(n-2)}\mathrm{Cos}^{2(n-3)}\psi+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+\frac{3.5\ldots(2n-5)(2n-3)}{2^{n-2}.1.2.3\ldots(n-2)}\right\}$$
$$-\frac{1.3.5\ldots(2n-5)(2n-3)}{2^{n-1}.1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\int\frac{\psi d\psi}{\mathrm{Sin}\psi\mathrm{Cos}\psi}.$$

Quum hoc integrale intra limites sumitur, prima pars dextri membri evanescit, quoniam $\mathrm{Sin}\psi l\mathrm{tg}\psi=0$ pro $\psi=0$, et $\mathrm{Cos}^{2q+1}\psi l\mathrm{tg}\psi=0$ pro $\psi=\frac{\pi}{2}$: terminus secundus et quartus simul sumti aequales sunt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\mathrm{tg}\psi d\psi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\,\mathrm{Sin}\psi\, d\psi-\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\mathrm{Cos}\psi d\psi=0,$$

quamobrem existit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}^{2(n-1)}\psi l\,\mathrm{tg}\,\psi d\psi$$
$$=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{\pi}{2^{n-1}}\left\{\frac{1.3\ldots(2n-5)}{1.2\ldots(n-2)}+\frac{2n-3}{n-2}\cdot\frac{1.3\ldots(2n-7)}{1.2.3\ldots(n-3)}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{3.5\ldots.(2n-5)(2n-3)}{1.2.3\ldots.(n-2)}\right\}$$
$$=-\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3..(n-1)}\cdot\frac{\pi}{2^n}\left\{\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}+\ldots+\frac{1}{3}+1\right\}$$
$$=\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\{C+2Z'(2.\overline{n-1})-Z'(n-1)\},\ (C=0{,}5772\ldots)$$

si functio Γ et $Z'(a)=\frac{d}{da}l\Gamma(a)$ introducuntur.

Quum vero sit

$$2Z'(2a)-Z'(a)=\frac{d}{da}l\frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)}=\frac{d}{da}l\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}2^{1-2a}}=Z'\left(a+\frac{1}{2}\right)+2l2,$$

reperitur

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}^{2(n-1)}\psi\, l\,\mathrm{tg}\,\psi d\psi=\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\{C+Z'\left(n-\frac{1}{2}\right)+2l2\},$$

unde denique

$$J=\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{a^{2n-1}b\,\Gamma(n)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left\{2l\frac{a}{2b}-C-Z'\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Quaestiones ad tirones exercendos.

1. Invenire conditiones necessarias, ut num. integer

$$10^n a+10^{n-1}b+10^{n-2}c+\ldots\ldots+10^2 k+10l+m.$$

divisibilis sit per 3, 9, 11. (Applicatio Theor. binom.)

2. Geometricum invenire locum intersectionum linearum, quae per duos angulos trianguli rectilinei ductae latera opposita sub eodem angulo aut in eandem rationem secent.

3. Invenire triangulum aequicrurum maximum, quod in segmento circulari dato describi possit, ita ut vertex unius anguli in eo puncto jaceat, ubi chorda in duas partes aequales divisa est.

4. Demonstrare formulam integralem

$$\int_0^a \frac{x\,dx}{\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Cos}(a-x)}=\frac{a}{\mathrm{Sin}a}\,l\,\mathrm{Sec}\,a.\left(a<\frac{\pi}{2}\right).$$

IX.

Ueber die Durchschnitts - Curven zweier Flächen des zweiten Grades mit mehrfachen Punkten.

Von dem

Herrn Doctor Beer,

Privatdocenten an der Universität zu Bonn.

Unter den Durchschnitts-Curven zweier Flächen des zweiten Grades, die ihrer Mannigfaltigkeit wegen eben so schwer einen Ueberblick gestatten, als sie sich in Folge ihrer doppelten Krümmung einer klaren Vorstellung entziehen, bieten diejenigen noch die meisten Anhaltspunkte dar, welche mit der einfachsten Singularität, dem Doppelpunkte, versehen sind. Für sie nämlich tritt eine natürliche, d. h. eine durch die Natur der Curve selbst gegebene, Projections-Ebene und ein ebenfalls natürlicher Mittelpunkt der Perspective entgegen, wir meinen bezüglich die durch die Tangenten des Doppelpunktes bestimmte Ebene und den letzteren selbst; dazu kommt, dass sich für die Beziehungen zwischen der Projection der Curve auf die eben erwähnte Ebene und den sich schneidenden Flächen ein fasslicher Ausdruck findet, der obendrein die Classification dieser Curven unmittelbar liefert.

1. Zwei Flächen des zweiten Grades und eine Ebene haben im Allgemeinen und also höchstens vier Punkte gemein, den Fall ausgeschlossen, wo die Flächen sich in ebenen Curven, in Kegelschnitten, schneiden und somit unendlich viele Punkte gleichzeitig auf den drei Oertern liegen können. Eine Folge dieses Factums ist, dass die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades höchstens zwei Doppelpunkte, keinen dreifachen Punkt und unter den mehrfachen Punkten höchstens einen vierfachen Punkt aufweist. Legt man durch zwei hiernach als möglich

Digitized by Google

denkbare Doppelpunkte und einen dritten Punkt einer solchen Curve eine Ebene, so müssen alle Punkte, in welchen diese die eine Fläche schneidet, auch auf der zweiten Fläche liegen. Die beiden Flächen schneiden sich folglich in einer ersten, mithin auch in einer zweiten ebenen Curve. Besitzt also die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades zwei Doppelpunkte, so besteht sie aus zwei Kegelschnitten, die sich in den beiden Doppelpunkten schneiden oder die zusammenfallen und die Doppelpunkte aufnehmen.*)

---

*) Zu diesem Resultate gelangt man auf dem Wege der Rechnung durch folgendes Verfahren, wobei nur der allgemeine Fall vor Augen gehalten wird. Es seien P und P' die beiden Doppelpunkte; in ihnen fallen alsdann die Tangential-Ebenen der beiden sich schneidenden Flächen zusammen (2). Diese Tangential-Ebenen nehme man zu Ebenen der xz und yz, ihre Durchschnittslinie also zur z-Axe, und man lege die x-Axe und z-Axe resp. durch P und P'. In Bezug auf dieses Coordinaten-System seien die Gleichungen der beiden Flächen:

$$f \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + 1 = 0$$

und

$$f' \equiv a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'xy + e'xz + f'yz + g'x + h'y + k'z + 1 = 0.$$

Da nun die x-Axe sowohl, als auch die y-Axe die eine wie die andere Fläche berührt, so ist:

$$g^2 - 4a = 0,\ g'^2 - 4a' = 0;\ h^2 - 4b = 0,\ h'^2 - 4b' = 0;$$
$$a = a';\ b = b'.$$

Die Coordinaten des Punktes P sind alsdann $z=0$, $y=0$, $x = -\frac{1}{\sqrt{a}}$, die des Punktes P' $z=0$, $x=0$, $y = -\frac{1}{\sqrt{b}}$. Und weil die Ebene xz beide Flächen in P berührt, so ist für die Coordinaten dieses Punktes

$$\frac{df}{dy} = 0,\ \frac{df}{dz} = 0,\ \frac{df'}{dy} = 0,\ \frac{df'}{dz} = 0,$$

sowie andererseits, da auch die Ebene yz gemeinschaftliche Tangential-Ebene beider Flächen ist, die Coordinaten des Punktes P' den folgenden Gleichungen Genüge thun müssen:

$$\frac{df}{dx} = 0,\ \frac{df}{dz} = 0,\ \frac{df'}{dx} = 0,\ \frac{df'}{dz} = 0.$$

Ausser den bereits gefundenen erhalten wir hiernach noch folgende Bedingungen:

$$-\frac{e}{\sqrt{a}} + k = 0,\ -\frac{e'}{\sqrt{a'}} + k' = 0,\ -\frac{f}{\sqrt{b}} + k = 0,\ -\frac{f'}{\sqrt{b'}} + k' = 0,$$

so dass die Gleichungen der beiden Flächen, wenn nur die nöthigen Constanten beibehalten werden, in folgende übergehen:

$$f \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + k\sqrt{a}.xz + k\sqrt{b}.yz + 2\sqrt{a}.x + 2\sqrt{b}.y + kz + 1 = 0,$$
$$f' \equiv ax^2 + by^2 + c'z^2 + d'xy + k'\sqrt{a}.xz + k'\sqrt{b}.yz + 2\sqrt{a}.x + 2\sqrt{b}.y + k'z + 1 = 0.$$

Digitized by Google

Denken wir uns, was dem Obigen gemäss noch gestattet ist, die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades mit einem dreifachen Punkte versehen, so schneiden sich in diesem drei verschiedene Aeste. Wenn daher durch den singulären Punkt eine Ebene gelegt wird, welche zwei dieser Aeste schneidet, so muss sie die letzteren ganz enthalten, da sonst einer Ebene und zwei Flächen des zweiten Grades fünf und nicht mehr Punkte gemein wären. Die beiden Flächen schneiden sich hiernach in einer ebenen Curve, mithin auch in einer zweiten ebenen Curve, die aus dem dritten Curvenzweige und einer vierten Geraden bestehen muss. Diese Gerade liegt, da die soeben angestellte Betrachtung auf je zwei der drei Aeste übertragen werden kann, mit einem jeden der letzteren in derselben Ebene, d. h. sie geht durch den singulären Punkt. Die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades kann nie einen dreifachen Punkt besitzen; weist sie einen vierfachen Punkt auf, so besteht sie aus vier geraden Linien, die sich in demselben Punkte schneiden. Von diesen Geraden kann ein Paar oder beide Paare imaginär werden. Wir unterscheiden dem Obigen gemäss folgende Arten der Durchschnitts-Curven zweier Flächen des zweiten Grades:

1) Die Curve besitzt keinen mehrfachen Punkt.

2) Sie weist einen einzigen Doppelpunkt oder einen einzigen vierfachen Punkt auf.

3) Sie hat zwei Doppelpunkte und besteht alsdann aus zwei reellen oder imaginären Kegelschnitten, die sich in den Doppelpunkten schneiden

---

Für die Gleichung einer Fläche des zweiten Grades, die den Durchschnitt von f und f' aufnimmt, ergibt sich hieraus:

$$f+\lambda f' \equiv (ax^2+by^2+2\sqrt{a}.x+2\sqrt{b}.y+1) + \frac{d+\lambda d'}{1+\lambda}.xy+\frac{c+\lambda c'}{1+\lambda}.z^2+\frac{k+\lambda k'}{1+\lambda}\sqrt{a}.xz + \frac{k+\lambda k'}{1+\lambda}\sqrt{b}.yz+\frac{k+\lambda k'}{1+\lambda}.z=0.$$

Vergleichen wir die linke Seite dieser Gleichung mit dem Ausdrucke

$$\varphi \equiv (\sqrt{a}.x+\sqrt{b}.y+\alpha z+1)(\sqrt{a}.x+\sqrt{b}.y+\alpha' z+1)$$
$$\equiv (ax^2+by^2+2\sqrt{a}.x+2\sqrt{b}.y+1)+2\sqrt{ab}.xy + \alpha\alpha' z^2+(\alpha+\alpha')\sqrt{a}.xz+(\alpha+\alpha')\sqrt{b}.yz+(\alpha+\alpha')z,$$

so leuchtet ein, dass jene auf die Form von φ gebracht werde, wenn man λ, α und α' so wählt, dass sei:

$$\frac{d+\lambda d'}{1+\lambda}=2\sqrt{ab},\quad \alpha\alpha'=\frac{c+\lambda c'}{1+\lambda},\quad \alpha+\alpha'=\frac{k+k'\lambda}{1+\lambda}.$$

$\varphi=0$ stellt aber alsdann zwei Ebenen dar, deren Durchschnitt die Punkte P und P' enthält, woraus wir entnehmen, dass sich die Flächen f und f' in zwei ebenen Curven schneiden.

Digitized by Google

4) Jeder Punkt der Durchschnitts-Curve ist ein Doppelpunkt, und die Flächen schneiden sich in zusammenfallenden ebenen Curven, d. h. sie berühren sich in einem Kegelschnitte.

Bei den im Folgenden mitgetheilten Entwicklungen haben wir aus den im Eingange vorgeführten Gründen unser Augenmerk nur auf den zweiten Fall gerichtet, dessen analytische Auffassung die Fälle 3) und 4) involvirt.

2. In dem Punkte P, der den beiden Flächen f und f' vom zweiten Grade gemein ist, seien an diese Tangential-Ebenen e und e' gelegt. Der Durchschnitt von e und e' berührt den der Flächen f und f', so dass die Tangente dieser Curve in dem Punkte P, dessen Coordinaten x, y, z seien, durch folgende Gleichungen dargestellt wird:

$$e \equiv \frac{df}{dx}(x-x_1)+\frac{df}{dy}(y-y_1)+\frac{df}{dz}(z-z_1)=0,$$

$$e' \equiv \frac{df'}{dx}(x-x_1)+\frac{df'}{dy}(y-y_1)+\frac{df'}{dz}(z-z_1)=0.$$

Der Punkt P tritt nun erstlich als singulärer auf, sobald die Durchschnittslinie von e und e' dadurch unbestimmt wird, dass die beiden Berührungs-Ebenen e und e' zusammenfallen, also für die Flächen in P ein Contact eintritt. Der analytische Ausdruck für diese Bedingung ist das Besteben folgender zwei Gleichungen:

$$A)\quad \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}=\frac{\frac{df'}{dx}}{\frac{df'}{dz}},\quad \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}=\frac{\frac{df'}{dy}}{\frac{df'}{dz}}.$$

Wird diesen Gleichungen von den Werthen der Coordinaten des Punktes P Genüge geleistet, so lässt sich zur Bestimmung der Geraden, welche die Curve in dem singulären Punkte P berühren, folgender Weg einschlagen.

Es seien z und z' bezüglich die Ordinaten von f und f', und aus den Gleichungen $f=0$ und $f'=0$ ergebe sich $z=z_{x,y}$, $z'=z'_{x,y}$. Für einen der Projection (x_1, y_1) von P zunächst gelegenen Punkt (x_1+dx, y_1+dy) drückt sich alsdann die Differenz Δ der z-Ordinaten beider Flächen so aus:

$$\Delta=(z-z')+\left(\frac{dz}{dx}-\frac{dz'}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}-\frac{dz'}{dy}\right)dy$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z'}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{2!}+2\left(\frac{d^2z}{dxdy}-\frac{d^2z'}{dxdy}\right)\frac{dx\,dy}{2!}$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2z'}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{2!}+\ldots.$$

Es reducirt sich dieser Ausdruck, da P beiden Flächen gemeinsam ist, und in Folge der Gleichungen A.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz'}{dx} \text{ und } \frac{dz}{dy}=\frac{dz'}{dy}$$

ist, auf:

$$\Delta=\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z'}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{2!}+2.\left(\frac{d^2z}{dxdy}-\frac{d^2z'}{dx\,dy}\right)\frac{dxdy}{2!}$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2z'}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{2!}+\ldots$$

Sollen nun x_1+dx und y_1+dy einem Punkte entsprechen, der auf f und f' befindlich und dem Punkte P nächst anliegend ist, so muss sein:

$$B')\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z'}{dx^2}\right)dx^2+2\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{d^2z'}{dxdy}\right)dx\,dy$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2z'}{dy^2}\right)dy^2=0.$$

Hiernach gibt es zwei durch $\frac{dy}{dx}=m$ bestimmte Richtungen, nach welchen dem Punkte P ein Punkt der Durchschnitts-Curve nächst anliegt. Zwei nach eben diesen Richtungen durch P gelegte Gerade berühren die Curve. Diese Tangenten liegen in den zusammenfallenden Tangential-Ebenen e und e' und die Gleichung ihrer Projection auf die Ebene xy ist:

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

Berühren sich also zwei Flächen des zweiten Grades in einem Punkte, so ist dieser ein Doppelpunkt der Durchschnitts Curve. Wenn die beiden aus B') sich ergebenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ reell sind, so ist der singuläre Punkt ein eigentlicher Doppelpunkt, d. i. der Durchschnitt zweier reeller Zweige, und wenn ausserdem die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich sind, so ist P eine Spitze oder es berühren sich in ihm zwei reelle oder imaginäre Curven-Aeste. Liefert aber andererseits die Gleichung B') für $\frac{dy}{dx}$ imaginäre Werthe, so tritt der singuläre Punkt als eigentlicher Einsiedler, d. i. als der Durchschnitt zweier imaginärer Curven-Zweige auf.

Um in der Gleichung B') die Functionen f und f' in Evidenz zu bringen, differentiire man die Gleichungen $f=0$, $f'=0$ der beiden Flächen zweimal nach x, zweimal nach y und einmal nach x und y. Man erhält alsdann, nachdem

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx'}, \frac{dz}{dy} \text{ und } \frac{dz'}{dy}$$

Digitized by Google

mit Hülfe der ersten partialen Differentialien jener Gleichungen eliminirt werden, sechs Gleichungen des ersten Grades zur Bestimmung von

$$\frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dy^2},\ \frac{d^2z}{dxdy},\ \frac{d^2z'}{dx^2},\ \frac{d^2z'}{dy^2}\ \text{und}\ \frac{d^2z'}{dxdy},$$

sodass alsdann an die Stelle dieser Ausdrücke in die Gleichung B') Ausdrücke in Differentialien von f und f' gesetzt werden können.

Lassen wir, was der Allgemeinheit der Betrachtungen keinen Abbruch thut, die z-Axe mit der gemeinsamen Normalen der beiden Flächen zusammenfallen, so nehmen die Gleichungen der letzteren diese Gestalt an:

$$f\equiv ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gz=0,$$

$$f'\equiv a'x^2+b'y^2+c'z^2+d'xy+e'xz+f'yz+g'z=0.$$

Da, wie wir unterstellt haben, weder f noch f' in dem Doppel-Punkte P, dem jetzigen Anfangspunkte der Coordinaten, mit einer Singularität behaftet ist, so ist es gestattet für g und g' die Einheit zu setzen, und dadurch erhalten wir nach Ausführung der soeben erwähnten Substitution zur Bestimmung der Tangenten der Durchschnitts-Curve in P folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}-\frac{d^2f'}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2f}{dxdy}-\frac{d^2f'}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2f}{dy^2}-\frac{d^2f'}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

oder:

$$B'')\ \frac{d^2(f-f')}{dx^2}+2.\frac{d^2(f-f')}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d^2(f-f')}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Die Gleichung $f-f'=0$ gehört, da sie nur Glieder der zweiten Dimension enthält, einer allgemeinen Kegelfläche des zweiten Grades an, auf deren Singularität (der Spitze oder der Kante) der Anfangs-Punkt der Coordinaten, oder der singuläre Punkt der Curve gelegen ist und die den Durchschnitt von f und f' aufnimmt. Die Richtungen der beiden Geraden, in denen diese Kegelfläche von der Ebene xy geschnitten wird, bestimmen sich durch eine mit B'') identische Gleichung, woraus wir schliessen, dass jene Geraden die Durchschnitts-Curve von f und f' berühren. Schneiden sich also zwei Flächen des zweiten Grades in einer Curve mit einem Doppelpunkte, der durch das Zusammenfallen der Tangential-Ebenen beider Flächen entstanden ist, so liegt die Durchschnitts-Curve auf einer Kegelfläche des zweiten Grades, deren Singularität durch den Doppelpunkt geht, und die gemeinschaftliche Berührungs-Ebene schneidet diesen Kegel in den Tangenten des singulären Punktes der Durschnitts-Curve. Eine Perspective, deren Mittelpunkt in der Singularität einer Curve der erwähnten Art liegt, liefert mithin als Ansicht der letzteren einen Kegelschnitt.

3. Wenn die Coefficienten einer der beiden Gleichungen $e=0$, $e'=0$ (S. Anfang der vorigen Nummer) z. B. der ersteren, verschwinden, so wird die entsprechende Ebene, also e, und alsdann auch der Durchschnitt von e und e' unbestimmt; die Durchschnitts-Curve weist in P eine Singularität auf, die sie dem Umstande verdankt, dass eine der Flächen, nämlich f, in demselben Punkte eine Singularität besitzt, oder, was dasselbe besagt, dass f eine Kegelfläche ist, deren Singularität durch P geht. Obgleich nun hiernach die hierher gehörigen Curven sich von den sub. 2. betrachteten in Nichts unterscheiden*), so wollen wir dennoch den Weg zeigen, auf dem sich hier die Natur der Singularität unmittelbar finden lässt. Es sei f die konische, f' die andere Fläche. Eine erste partiale Differentiation liefert:

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0,\quad \frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0,$$
$$\frac{df'}{dx}+\frac{df'}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dx}=0,\quad \frac{df'}{dy}+\frac{df'}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dy}=0;$$

woraus sich für $\frac{dz'}{dx}$ und $\frac{dz'}{dy}$ bestimmte Werthe ergeben, während die von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftreten, (indem wir immer ein orthogonales Coordinaten-System unterstellen, dessen Anfangspunkt in den singulären Punkt P, und dessen z-Axe mit der Normalen von f' in P zusammenfällt.)

Sucht man nun den wahren Werth von $\frac{dz}{dx}$ z. B., so findet man:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d^2f}{dxdz}\left\{\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right\}}{\frac{d^2f}{dxdz}+\frac{d^2f}{dydz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2f}{dz^2}\left\{\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right\}}.$$

Ein ähnlicher Ausdruck ergibt sich für $\frac{dz}{dy}$. Wir setzen zur Abkürzung $\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\equiv V$; alsdann wird:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{X+l.V}{Z+p.V},\quad \frac{dz}{dy}=\frac{Y+m.V}{Z+p.V}.$$

Die Ausdrücke X, Y, Z und V sind in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom ersten Grade, l, m, p vom nullten, d. i. constant. Durch Verbindung der beiden letzten Gleichungen erhalten wir die neue:

---

*) Dies leuchtet auch daraus ein, dass $f+\lambda f'=0$ die Gleichung einer Fläche des zweiten Grades ist, die ohne Kegelfläche zu sein, durch den Durchschnitt von f und f' geht, und die Fläche f' in P berührt: gerade der in 2. betrachtete Fall.

Digitized by Google

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\equiv V=\frac{\left(X+Y\frac{dy}{dx}\right)+V\left(l+m\frac{dy}{dx}\right)}{Z+pV},$$

woraus:

$$p.V^2+\left\{Z-l-m\frac{dy}{dx}\right\}V-X-Y\frac{dy}{dx}=0.$$

Bezeichnen wir dem Früheren analog $\frac{dz'}{dx}+\frac{dz'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ mit V', so muss für die durch $\frac{dy}{dx}$ bestimmte Richtung, nach welcher man von dem singulären Punkte P aus fortschreiten muss, um zu dem ihm nächst anliegenden Punkte der Durchschnitts-Curve zu gelangen, $V=V'$ sein. Zur Bestimmung der Tangenten der Curve erhalten wir sonach die Gleichung

$$pV'^2+V'\left\{Z-l-m\frac{dy}{dx}\right\}-X-Y\frac{dy}{dx}=0.$$

Diese Gleichung ist, wie zu erwarten war, in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ quadratisch; P ist folglich wiederum ein Doppelpunkt.

Lassen wir die Ebene xy die Fläche f' in P berühren und legen wir durch P die z-Axe, so verschwinden $\frac{dz'}{dx}$ und $\frac{dz'}{dy}$, und demzufolge auch V'. Unsere letzte Gleichung geht alsdann in die folgende über:

$$X+Y.\frac{dy}{dx}\equiv\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Diese Gleichung entspricht, wie leicht einzusehen, vollständig der Gleichung B'') in 2.; wie dort $f-f'$, so bezeichnet hier f die homogene Function des zweiten Grades mit drei Veränderlichen.

4. Wenn, was den dritten möglichen Fall ausmacht, die Coefficienten in $e=0$ und $e'=0$ sämmtlich verschwinden, so sind beide Flächen konisch, und ihre Singularitäten gehen durch den Punkt P. Dehnen wir hier das in der vorigen Nummer für f beobachtete Verfahren auch auf f' aus, so gelangen wir zur Bestimmung der Tangenten des singulären Punktes der Durchschnitts-Curve zu folgenden zwei Gleichungen:

$$pV^2+V\left\{Z-l-m\frac{dy}{dx}\right\}-X-Y.\frac{dy}{dx}=0,$$

$$pV'^2+V'\left\{Z'-l'-m'\frac{dy}{dx}\right\}-X'-Y'\frac{dy}{dx}=0.$$

Digitized by Google

Ausserdem hat man $V = V'$, so dass sich V und V' eliminiren lassen und dadurch eine Gleichung resultirt, die in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom vierten Gerade ist. Der singuläre Punkt ist hiernach ein vierfacher, und die Durchschnitts-Curve besteht aus vier Geraden, die sich in demselben Punkte begegnen, ein Resultat, welches leicht a priori hätte gewonnen werden können. Von jenen Geraden können je zwei zusammenfallen, sowie ein oder beide Paare imaginär werden.

5. In dem Vorhergehenden haben wir dargethan, dass es für die Durchschnitts-Curven zweier Flächen des zweiten Grades mit einem mehrfachen Punkte immer eine konische Projection des zweiten Grades gebe, oder, was dasselbe besagt, dass sich jene Curven als Kegelschnitte konisch projiciren lassen. Die Singularität des projicirenden Kegels geht durch den singulären Punkt. Sehen wir uns andererseits nach einer einfachen cylindrischen Projectionsart um, so bietet sich uns am ehesten diejenige dar, deren Axe in dem allgemeinen Falle mit der Normale der Curve im singulären Punkte zusammenfällt, und deren Projections-Ebene die beiden Tangenten des singulären Punktes enthält. Ausser dem letzteren liegt alsdann kein Punkt der Curve in jener Ebene. Nehmen wir wiederum diese zur Ebene xy, die Normale zur z-Axe, so ist die allgemeinste Form der Gleichungen beider sich schneidenden Flächen die folgende:

$$F \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gz$$
$$\equiv (ax^2 + by^2 + dxy) + cz^2 + (ex + fy + g)z \equiv f_2 + cz^2 + fz = 0$$

und

$$F' \equiv (a'x^2 + b'y^2 + d'xy) + c'z^2 + (e'x + f'y + g')z \equiv f_2' + c'z^2 + f'z = 0.$$

In dem allgemeinsten Falle, wo weder F noch F' dadurch, dass g oder g' verschwindet, sich auf eine Kegelfläche zurückzieht, erhält man durch Verbindung der beiden Gleichungen für die Projection der Durchschnitts-Curve auf die Ebene xy folgende neue:

$$\Phi \equiv (f_2 c' - f_2' c) + (fc' - f'c)z \equiv \varphi_2 + \varphi z = 0$$

und

$$K \equiv (f_2 g' - f_2' g) + (cg' - c'g)z^2 + (fg' - f'g)z \equiv k_2 + \alpha z^2 + kz = 0.$$

Wir können nun die fragliche Curve als den Durchschnitt der beiden Flächen Φ und K betrachten. An die Stelle von Φ tritt, wenn c oder c' verschwindet, bezüglich F oder F', und wenn beide Constanten verschwinden, irgend eine dieser Flächen.

Wenn im Besonderen g oder g', z. B. das letztere, der Null gleich wird, so führen wir die Fläche K nicht ein, sondern be-

Digitized by Google

trachten die Curve als Durchschnitt der Flächen Φ und F'. Verschwindet aber ausser g' auch noch c', so führen wir gar keine neue Fläche ein.

Verschwinden endlich g und g' zumal, so führen wir nur in dem Falle die Fläche Φ ein, wenn weder c noch c' verschwindet, und betrachten dann die Curve als den Durchschnitt von Φ und einer der beiden Flächen F und F'.

Wenn wir auf die angegebene Weise verfahren, so können wir die fraglichen Curven hinstellen als den Durchschnitt zweier Flächen Φ und K, deren Gleichungen die folgenden sind:

$$\text{I. } \Phi \equiv \varphi_2 + \varphi z = 0, \quad \text{II. } K \equiv k_2 + \alpha z^2 + kz = 0,$$

wo φ_2 und k_2 homogene Functionen des zweiten Grades, k und φ aber allgemeine Functionen des ersten Grades bedeuten. Als allgemeinster Fall ist alsdann derjenige zu betrachten, wo k homogen ist, während derjenige ausser Acht gelassen werden kann, wo k sowohl als auch φ Constanten enthalten. Als besonderer Fall scheidet sich hiernach derjenige endlich noch ab, in welchem k eine Constante enthält, φ aber homogen ist.

6. Indem wir zunächst den allgemeinen Fall unserer Betrachtung unterziehen, nehmen wir an, dass k homogen sei. Wir zerlegen φ_2 in die Factoren p und q vom ersten Grade, sowie k_2 in die Factoren r und s, und setzen, um eine homogene Bezeichnung zu erhalten, $\varphi \equiv t$ und $k \equiv u$; die Gleichungen I. und II. schreiben sich alsdann wie folgt:

$$\text{I. } \Phi \equiv pq + tz = 0, \quad \text{II. } K \equiv rs + \alpha z^2 + uz = 0.$$

Die Gleichung I. stellt eine nicht geschlossene Fläche des zweiten Grades dar, welche von der Ebene xy im Anfangspunkte der Coordinaten berührt, und gleichzeitig in den beiden Geraden $p=0$, $q=0$ geschnitten wird. Die z-Axe ist eine Asymptoten-Richtung dieser Fläche, da diese von jeder mit jener Axe parallelen Geraden nur in einem einzigen in endlicher Entfernung gelegenen Punkte geschnitten wird. Es wird diese Fläche von zwei durch die z-Axe und die Geraden p und q gelegten Ebenen in zwei mit der z-Axe parallelen Geraden geschnitten, die in der Ebene $t=0$ liegen. Die Gleichung II. gehört einer Kegelfläche an, deren Singularität durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und die von der Ebene xy in der Geraden r und s geschnitten wird. Zwei Ebenen, welche die z-Axe und die Geraden r und s aufnehmen, schneiden jene Kegelfläche in einem Paar anderer Geraden r' und s', die in einer Ebene liegen, deren Gleichung $\alpha z + u = 0$ ist. Diese schneidet die Ebene xy in der Geraden u. Die Natur der Fläche Φ liefert uns die Unterscheidung von drei Fällen: es können nämlich p und q beide reell und ungleich oder reell und gleich oder endlich beide imaginär sein. Wir wollen diese Fälle einzeln untersuchen. Es seien nun erstlich p und q reell und ungleich. Die Fläche Φ gehört alsdann im Allgemeinen einem hyperbolischen Hyperboloide an und geht im Besonderen in ein hyperbolisches Paraboloid oder in einen Kegel über. Das Product rs lässt sich immer auf die Form $\beta p^2 + \gamma q^2 + \delta pq$ bringen, so dass sich also für die Gleichung der

Projection der Durchschnitts-Curve auf die Ebene xy die folgende ergibt:

$$C. \quad \alpha p^2q^2 + \beta p^2t^2 + \gamma q^2t^2 + pqt(\delta t - u) = 0,$$

wo:

$$u \equiv \varkappa q + \pi p \quad \text{und} \quad t \equiv \varkappa' q + \pi' p + \eta',$$

so dass sich für $C.$ auch schreiben lässt:

$$\alpha p^2q^2 + \beta p^2t^2 + \gamma q^2t^2 + pqt(\delta t - \varkappa q - \pi p) = 0.$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Form derjenigen einer Curve des vierten Grades mit drei Doppelpunkten. Diese liegen in den Durchschnitten der drei Geraden p, q und t; denn für $t=0$ z. B. wird die Gleichung durch $p^2=0$ und $q^2=0$ befriedigt, so dass also t in seinem Durchschnitte mit p und mit q je zwei Punkte mit der Curve gemein hat, ohne sie jedoch zu berühren, da auch p und q in denselben Punkten die Curve zweimal schneiden. Es verrücken diese Doppelpunkte der Projection ihre Lage nicht, so lange Φ dieselbe Fläche bleibt und wie auch die Kegelfläche K der Gestalt und Lage nach sich ändern möge. — Wir wollen sehen, wie die Lage der Doppelpunkte von der Natur der Fläche Φ und ihrer Lage abhängig sind. Wenn t die allgemeine Function des ersten Grades darstellt und sowohl p als auch q enthält, so ist Φ ein hyperbolisches Hyperboloid. Alsdann besitzt die Projection ausser dem Punkte (p, q) noch zwei in endlicher Entfernung gelegene Doppelpunkte. Verschwindet in t der Coefficient einer der beiden Variabeln, so dass also die Gerade t einer der Geraden p und q parallel läuft, so geht Φ in ein hyperbolisches Paraboloid über, und die Curve behält ausser dem Punkt (p, q) nur mehr einen in endlicher Entfernung gelegenen Doppelpunkt. Dadurch dass der dritte Doppelpunkt, welcher (p, t) sei, in das Unendliche rückt, erlangt die Curve zwei Asymptoten, die den Geraden p und t parallel sind. — Die Axe des eben erwähnten Paraboloides fällt mit der Normalen des singulären Punktes P zusammen, sobald sich t auf eine Constante zurückzieht. In Folge dessen rücken die Doppelpunkte (p, t) und (q, t) unendlich weit weg, und die Projection behält nur den einzigen Doppelpunkt (p, q), während gleichzeitig ihre Gleichung in die folgende übergeht:

$$pq\{\alpha' pq - \varkappa' q - \pi' p\} + \beta' p^2 + \gamma' q^2 + \delta' pq = 0.$$

Wir ersehen aus ihrer Form, dass die beiden Geraden p und q und ein zweites Paar ihnen paralleler Linien $p - \frac{\varkappa'}{\alpha'}$, $q - \frac{\pi'}{\alpha'}$ als Asymptoten der Projection auftreten. Die Grund-Curve der letzteren besteht aus zwei durch den singulären Punkt gehenden Geraden. — Wenn endlich t in die homogene Function des ersten Grades übergeht, so artet Φ in eine Kegelfläche aus. In der Gleichung der Projection erscheinen dann nur Glieder von vier Dimensionen, sie gehört also vier geraden Linien an, die sich im Anfangspunkte der Coordinaten begegnen.

Digitized by Google

Die Gleichung *C.* hört auf einer eigentlichen Curve des vierten Grades anzugehören, wenn k in zwei sich schneidende Ebenen übergeht. In diesem Falle nämlich lässt sich die linke Seite der Gleichung II. in zwei Factoren des ersten Grades und folglich auch die der Gleichung *C.* in zwei Factoren des zweiten Grades zerlegen, so dass diese letztere Gleichung zwei Kegelschnitte (reelle oder imaginäre) darstellt, die den Punkt P gemein haben. — Eine besondere Lage der Kegelfläche K bedingt eine Reduction des Grades der Gleichung *C.* Fällt nämlich die Normale in P mit einer Seite des Kegels zusammen, so verschwindet in der Gleichung II. der Coefficient α, und anstatt der Gleichung *C.* erhalten wir die folgende:

$$D. \quad \beta p^2 t + \gamma q^2 t + pq(\delta t - \varkappa q - \pi p) = 0,$$

und diese stellt eine Curve des dritten Grades dar, für die der Punkt (p, q) ein Doppelpunkt ist. Geht die Kegelfläche in dieser ihrer Lage in zwei Ebenen über, so zerfällt die Curve des dritten Grades in einen Kegelschnitt und eine Gerade, die mit jenem den Punkt (p, q) gemein hat. Wir überheben uns der weiteren Specification der möglichen Fälle, um zur Betrachtung der Natur der Doppelpunkte überzugehen. Die Tangenten des Doppelpunktes (p, q) werden repräsentirt durch Gleichungen von der Form:

$$p + \lambda_1 q = 0, \quad p + \lambda_2 q = 0$$

und die Werthe von λ_1 und λ_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$1) \qquad \beta\lambda^2 - \delta\lambda + \gamma = 0.$$

Aus den Coefficienten dieser Gleichung ersehen wir, dass die Tangenten mit den beiden Geraden r und s, in welchen der Kegel K von der Ebene xy geschnitten wird, zusammenfallen. Jenachdem $\delta^2 - 4\beta\gamma$ positiv oder negativ oder der Null gleich wird, d. h. jenachdem K von der Ebene xy in zwei reellen sich schneidenden oder zusammenfallenden Geraden oder nur in einem Punkte, dem Durchschnitte zweier imaginärer Kegelseiten, geschnitten wird, ist P ein eigentlicher Doppelpunkt, eine Spitze oder ein isolirter Punkt. An die Stelle der Spitze tritt in dem Falle, wo der Kegel in zwei Ebenen ausartet, der Berührungspunkt zweier reeller oder imaginärer Curvenzweige.

Die Tangenten der beiden auf t gelegenen Doppelpunkte haben Gleichungen von der Form:

$$p + \mu_1 t = 0, \quad p + \mu_2 t = 0; \quad q + \nu_1 t = 0, \quad q + \nu_2 t = 0.$$

Die Werthe von μ_1, μ_2 etc. bestimmen sich durch die quadratischen Gleichungen:

$$2) \quad \alpha\mu^2 - \varkappa\mu + \gamma = 0, \qquad 3) \quad \alpha\nu^2 - \pi\nu + \beta = 0.$$

Um die Abhängigkeit der Natur dieser Doppelpunkte von den Flächen Φ und K kennen zu lernen, bringen wir den Ausdruck K auf die Form

$$(\alpha z^2 + \varkappa qz + \gamma q^2) + p(\beta p + \delta q + \pi z),$$

so dass in Folge der Gleichung 2) die Gleichung der Kegelfläche übergeht in:

$$(z + \mu_1 q)(z + \mu_2 q) + p(\beta p + \delta q + \pi z) = 0.$$

$z + \mu_1 q = 0$, $z + \mu_2 q = 0$ sind hiernach die Projectionen der beiden Geraden, in welchen K von der Ebene $p = 0$ geschnitten wird, auf eine durch z und q gelegte Ebene. Wir folgern hieraus, dass der Punkt (p, t) ein eigentlicher Doppelpunkt, eine Spitze oder ein isolirter Punkt ist, jenachdem eine durch die Normale in P und die Gerade p gelegte Ebene mit der Kegelfläche K zwei reelle sich schneidende oder zusammenfallende oder zwei imaginäre Gerade gemein hat. Ganz Gleichlaufendes gilt für den Punkt (q, t). Von Wichtigkeit ist hier folgende Bemerkung. Für einen jeden Punkt der Projection mit Ausnahme der zuletzt betrachteten Doppelpunkte liefert die Gleichung I. einen bestimmten Werth von z, so dass es nur für diese Punkte unentschieden bleibt, ob ihnen ein reeller Punkt der Durchschnitts-Curve entspreche. Es rührt dies von dem Umstande her, dass die Gleichung, welche durch Substitution des aus I. gewonnenen Werthes von z in die Gleichung II. erhalten wird, zur Herstellung der Gleichung C. mit dem Factor t multiplicirt wurde. Wenn nun aber der Kegel K von der Ebene $p = 0$ in zwei reellen Geraden geschnitten wird, so trifft die Gerade $(p = 0, t = 0)$ die Kegelfläche in zwei Punkten, deren gemeinsame Projection in den Doppelpunkt (p, t) fällt. Sind aber die Geraden, die jenen beiden Oertern gemein sind, imaginär, so sind es im Allgemeinen auch die Durchschnitte der Geraden $(p = 0, t = 0)$ und des Kegels K, während jedoch ihre reellen Projectionen in den Punkt (p, t) fallen. Nur, wenn im Besonderen der Kegel in zwei imaginäre Ebenen zerfällt, und deren reelle Durchschnittslinie die Gerade $(p = 0, t = 0)$ trifft, entspricht dem isolirten Punkte (p, t) ein reeller Punkt der Durchschnitts-Curve, der ebenfalls ein Einsiedler ist. Besteht also die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades mit einem Doppelpunkte nicht aus zwei ebenen Curven, so entspricht einem isolirten Punkte ihrer Projection auf die Tangential-Ebene des Doppelpunktes kein reeller Punkt der Curve. — Das Factum, dass für die den Doppelpunkten entsprechenden Punkte der Curve $\frac{z}{q} = \frac{p}{t}$ und $\frac{z}{p} = \frac{q}{t}$ ist, bietet ein leichtes Mittel dar die Tangenten jener Punkte zu construiren. — Wir bemerken noch, dass, so oft die Fläche Φ ein hyperbolisches Paraboloid ist, die Function t dadurch, dass man die z Axe mit der Axe des Paraboloides zusammenfallen lässt, auf eine Constante reducirt wird. Projicirt man also nach der Richtung jener Axe, so verliert die Curve C. zwei ihrer Doppelpunkte, und es bleibt nur mehr der Punkt (p, q) als solcher zurück.

Digitized by Google

7. Wenn, was den zweiten der zu Anfang der vorigen Nummer aufgezählten Fälle ausmacht, die Linie q mit der Linie p zusammenfällt, so stellt die Gleichung I. im Allgemeinen einen Kegel dar, dessen Singularität durch den Punkt (p, t) geht, und der von der Ebene $t=0$ und der Ebene xy in zwei zusammenfallenden Geraden, und zwar von der ersteren in solchen, die der z-Axe parallel sind, von der zweiten in den zusammenfallenden Geraden p und q geschnitten wird. Die Gleichungen der Flächen Φ und K lassen sich durch gehörige Wahl der in der Ebene xy durch P gehenden Geraden o umformen in:

$$\Phi \equiv p^2 + tz = 0, \quad K \equiv (\beta p^2 + \gamma o^2) + \alpha z^2 + uz = 0,$$

woraus sich für die Projection der Durchschnitts-Curve folgende Gleichung ergibt:

$$C^v. \qquad \alpha p^4 + \beta p^2 t^2 + \gamma o^2 t^2 - p^2 ut = 0.$$

In dem allgemeinen Falle, d. i. wenn t sowohl als auch p und o eine Constante aufweist, und sonach Φ einen Kegel darstellt, gehört die Gleichung $C^v.$ einer Curve des vierten Grades mit zwei Singularitäten an, von denen die eine in dem Doppelpunkte (p,o), die andere darin besteht, dass sich zwei Curvenzweige in dem Punkte $(p=0,\ t=0)$ berühren; von den drei im allgemeinsten Falle zum Vorschein kommenden drei Doppelpunkten fallen die beiden auf t befindlichen zusammen. Die Tangenten des ersteren Punktes fallen wiederum mit den Durchschnitten des Kegels K und der Ebene xy zusammen, wie in den Fällen der vorhergehenden Nummer; die gemeinsame Tangente der sich tangirenden Curvenzweige ist die Gerade t. — Geht die letztere Gerade durch den Punkt P, so treffen sich die Singularitäten der beiden Kegelflächen, da sich denn auch die linke Seite der Gleichung $C^v.$ in vier Factoren des ersten Grades zerlegen lässt und die Projection wie die Durchschnitts-Curve selbst in vier gerade Linien übergeht. — Die Fläche Φ geht in einen hyperbolischen Cylinder über, wenn die Gerade t der Geraden p parallel wird. Die Axe dieses Cylinders läuft mit t und p parallel, und die Gleichungen seiner asymptotischen Ebenen sind, wenn $t \equiv \pi p + \eta$ ist,

$$t \equiv \pi p + \eta = 0 \text{ und } \pi p + \pi^2 z - \eta = 0.$$

Dadurch, dass der Berührungspunkt (p, t) zweier Aeste auf t unendlich weit rückt, fallen in diese Linie zwei Asymptoten der Curve, oder, was dasselbe besagt, es wird t eine vierpunktig osculirende Asymptote der Curve. — Die Fläche Φ kann endlich in einen parabolischen Cylinder ausarten, was eintritt, sobald sich t auf eine Constante zurückzieht. Die Gleichung $C^v.$ bringen wir dann auf die Form

$$p^2 rs + (\beta p^2 + \gamma o^2)\mu = 0,$$

und ersehen aus ihr, dass zwei der Asymptoten der Curve mit p zusammenfallen, während die beiden andern den singulären Punkt durchsetzen. Die Grund-Curve besteht in dem Durchschnite der

Digitized by Google

Ebene xy und des Kegels K. — Was den unmittelbaren Einfluss des Kegels K auf die Gestalt der Projection betrifft, so tritt, wenn α verschwindet, an die Stelle der Gleichung C'. die folgende:

$$D'. \qquad \beta p^2 t + \gamma o^2 t - p^2 u = 0.$$

Sie gehört einer Curve des dritten Grades an, die in $(p=0, o=0)$ einen Doppelpunkt besitzt, und von der Geraden t in deren Durchschnitt mit p berührt wird. — Geht der Kegel K in zwei Ebenen über, so besteht die Projection aus zwei Kegelschnitten, die sich im Allgemeinen im Punkte P schneiden, während sie in dem Punkte (p, t) von der Geraden t gleichzeitig berührt werden. — Für eine speciellere Unterscheidung der hier möglichen Fälle ist in den obigen Bemerkungen eine Ueberblick gewährende Grundlage gegeben.

8. Die Betrachtungen und Entwicklungen der sechsten Nummer übertragen sich leicht auf die dritte Art der Curven, welche den Vorwurf dieser Abhandlung ausmachen, auf diejenigen nämlich, welche sich durch den Umstand, dass die beiden Geraden p und q, die in der Gleichung I. in Evidenz treten, imaginär werden, zusammenreihen. Die Fläche Φ ist alsdann im Allgemeinen ein elliptisches Hyperboloid. Dasselbe wird von der Ebene xy im Punkte P berührt, und mit einer Seite seines Asymptoten-Kegels lauft die z-Axe parallel. Die Gleichung der Projection lässt sich wiederum auf die Form C. bringen, und wir ersehen aus ihr, dass von den drei Doppelpunkten, welche jener im Allgemeinen zukommen, hier nur einer, nämlich P, reell wird, während die beiden anderen, als die Durchschnitte der reellen Geraden t und der imaginären Geraden p und q imaginär werden. Die Natur des ersten Punktes wird auf dieselbe Weise wie in 6. erkannt. Die Fläche Φ kann nun erstlich in einen Kegel ausarten — ein leicht zu discutirender Fall — ferner auch in ein elliptisches Paraboloid, wenn nämlich t keine der Variabeln enthält. Wenn letzteres eintritt, so rücken die beiden imaginären Doppelpunkte ins Unendliche. Sämmtliche Asymptoten der Curve werden imaginär, und zwar bestimmt sich der eine Asymptoten-Punkt durch die Gleichungen

$$p=0, \quad q=0$$

und der zweite durch solche von der Form

$$p+(m+ni)=0, \quad q+(m-ni)=0.$$

Da die Modificationen der Projection, welche eine Folge der Veränderung des Kegels K in Gestalt und Lage sind, leicht übersehen werden können, und überdies in den Betrachtungen der sechsten Nummer ihr Analogon finden, so überheben wir uns ihrer Angabe.

9. Es erübrigt nun noch den in 5. bezeichneten Ausnahmefall zu betrachten, dessen Charakter darin besteht, dass φ eine

Digitized by Google

homogene, k eine nicht homogene Function des ersten Grades darstellt. Auch hier nimmt die Gleichung der Projection die Form $C.$ an, unter der Voraussetzung jedoch, dass jetzt t homogen, u aber als mit einer Constanten versehen gedacht werde. Die Gleichung $C.$ stellt dann ersichtlich eine Curve des vierten Grades dar, die in P einen dreifachen Punkt besitzt; alle drei Doppelpunkte des allgemeinen Falles sind in einen einzigen Punkt zusammengerückt. Die Curve wird in ihrem dreifachen Punkte von den Geraden p, q und t berührt. Was die Bedeutung der Gleichungen I. und II. betrifft, so stellt Φ einen Kegel dar, dessen eine Apotheme mit der Normalen in P, mit der z-Axe, coincidirt. Die Gleichung II. aber kann irgend einer Fläche des zweiten Grades, die Kegelfläche ausgeschlossen, angehören. Wir bemerken schliesslich noch, dass, wofern man die im Obigen immer beibehaltene ausgezeichnete Projections-Ebene aufgeben will, die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades mit einem Doppelpunkte im Allgemeinen immer so projicirt werden kann, dass die Projection einen dreifachen Punkt erhält; man braucht zu dem Ende nur als Projections-Ebene eine solche anzunehmen, die durch den Doppelpunkt geht und auf einer Seite des die Durchschnitts-Curve aufnehmenden Kegels senkrecht steht, oder allgemeiner noch: man braucht nur als Projections-Richtung die einer Geraden zu wählen, welche den Doppelpunkt mit irgend einem anderen Punkte der Durchschnitts-Curve verbindet.

X.

Einige Sätze aus der Zahlenlehre.

(Frei nach den Annales de Mathématiques von Terquem. Septembre 1849.)

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

---

§. 1.

Wie viel Ziffern sind in der Reihe der Zahlen von 1 bis $10^{n+1}-1$?

Von 10^n bis $10^{n+1}-1$ sind offenbar $10^{n+1}-10^n=9.10^n$ mal $n+1$ Ziffern, also im Ganzen

$$9(n+1).10^n=9n.10^n+9.10^n.$$

Die verlangte Summe ist also

$$\sum_0^n(9n.10^n+9.10^n),$$

wo $\sum_0^n$ bedeutet, dass man n alle Werthe von 0 bis n beilegen soll.

Nach den in Theil VII. Abhandlung XLVII. niedergelegten Grundsätzen erhält man:

$$\sum_0^r(n+1)x^n=\frac{1-x^{r+1}-(r+1)(1-x)x^{r+1}}{(1-x)^2},$$

also für $r=n$, $10=x$:

$$9.\sum_0^n(n+1)x^n=\frac{1-10^{n+1}+(n+1).9.10^{n+1}}{9}$$

$$=(n+1).10^{n+1}-\frac{10^{n+1}-1}{9},$$

welches die verlangte Anzahl ist.

§. 2.

Man soll die Anzahl der Ziffern finden, die in der Reihe der Zahlen von 1 bis N enthalten sind.

Sei $N \geqq 10^{n+1}$ und $< 10^{n+2}$, also $= 10^{n+1}+k$. Von 1 bis $10^{n+1}-1$ sind (§.1.) $(n+1).10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9}$ Ziffern; nun sind noch $k+1$ Zahlen von $10^{n+1}-1$ bis N, jede von $n+2$ Ziffern; demnach hat man im Ganzen

$$(n+1).10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9} + (k+1)(n+2)$$

Ziffern. Es versteht sich von selbst, dass k auch Null sein darf.

§. 3.

Man schreibe alle Zahlen, von 1 an, in eine Linie von rechts nach links, eine nach der andern; welche Ziffer ist an einer gewissen Stelle, von rechts her gerechnet?

Man verlange z. B. die Ziffer, welche die 1849ste Stelle einnimmt. Diese Ziffer gehört zu einer gewissen Zahl, die man zuerst aufzusuchen hat, und die so beschaffen ist, dass die Anzahl der Ziffern aller Zahlen vor ihr, die von ihr zugehörigen mitgerechnet, 1849 beträgt. Sehen wir zuerst, ob sie unter den Zahlen $10^{n+1}-1$ enthalten ist. Die Summe

$$(n+1).10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9}$$ giebt für $n=1$: 189,

$n=2$: 2889.

Die Zahl liegt also zwischen 99 und 999; in der Summe (§. 2.) muss also $n=1$ sein, und k so, dass

$$2.10^2 - \frac{10^2-1}{9} + (k+1).3 = 1849,$$

d. h. $$(k+1)3. = 1660,\ k = \frac{1657}{3} = 552\frac{1}{3};$$

demnach ist in §. 2. $N = 10^2+552 = 652$. Allein $N=652$, also $k=552$ und $n=1$ entsprechen

$$2.10^2 - \frac{10^2-1}{9} + (553)3 = 1848$$

Ziffern; die 1849ste ist also die erste Ziffer rechts der folgenden Zahl, d. h. der Zahl 653; die 1849ste Ziffer ist also 3. (In den Nouvelles Annales ist hierin eine Unbestimmtheit.)

Digitized by Google

§. 4.

Man betrachte die Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

und deren Glieder man findet, wenn man hier $n=1, 2, 3, \ldots$ setzt, wodurch man erhällt:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\ldots (1)$$

Nach den in Theil VII. S. 434. entwickelten Grundsätzen findet man, dass diess die Reihe ist, die man aus

$$\frac{1+x}{1-x-x^2}$$

erhält, wenn man darin $x=1$ setzt. Zugleich folgt hieraus, dass drei auf einander folgende Glieder dieser Reihe durch folgende Gleichung bestimmt werden:

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \ldots\ldots (2)$$

Die nächste Frage sei nun die, wie viel von den Zahlen der Reihe (1) die nämliche Anzahl Ziffern habe?

Wir wollen die Reihe abtheilen in Gruppen, so dass die Zahlen der ersten Gruppe mit 1, die der zweiten mit 2, der dritten mit 3 u. s. f. Ziffern geschrieben werden. Betrachten wir nun die $(m+1)$te Gruppe und nehmen von ihr an, ihre zwei ersten Glieder seien 10^m+A_1, 2.10^m+A_2, wo A_1 und A_2 beide kleiner sind als 10^m, d. h. nehmen wir an, die erste Zahl enthalte als erste Ziffer links 1, die zweite als solche Ziffer 2, so würden nach obigem Gesetze (2) die fünf folgenden Zahlen sein:

$$3.10^m+A_1+A_2,\ 5.10^m+A_1+2A_2,\ 8.10^m+2.A_1+3A_2,$$
$$13.10^m+3A_1+5A_2,\ 21.10^m+5A_1+8A_2;$$

wenn

$$A_1+A_2<10^m,$$

oder

$$4.10^m+B_1,\ 6.10^m+B_1+A_2,\ 10^{m+1}+2B_1+A_2,\ 16.10^m+3B_1+2A_2,$$

wenn $A_1+A_2\gtreqless 10^m$, wo dann $B_1<10^m$. Daraus folgt, dass diese Gruppe höchstens fünf, mindestens aber vier Glieder habe. Fünf Glieder wird diese Gruppe haben, wenn $A_1+A_2<10^m$ und $2A_1+3A_2<2.10^m$, in welchem Falle das erste Glied der folgenden Gruppe mit 1, das zweite mit 2 anfängt. Wäre aber zugleich $2A_1+3A_2\gtreqless 2.10^m$, so hätte die Gruppe bloss vier Glieder, das erste Glied der folgenden Gruppe finge jedenfalls mit 1, und das nächste gleichfalls mit 1 an. Man hätte nämlich, wenn

$$2A_1+3A_2<2.10^m, \text{ auch } \begin{array}{l|l} 3A_1+4A_2<3.10^m & 5A_1+7A_2<5.10^m \\ 3A_1+5A_2<4.10^m & 5A_1+8A_2<6.10^m \end{array}$$

$$2A_1+3A_2\gtreqless 2.10 \atop <3.10, \text{ auch } \begin{array}{l|l} 3A_1+4A_2<4.10^m & 5A_1+7A_2<7.10^m \\ 3A_1+5A_2<5.10^m & 5A_1+8A_2<8.10^m; \end{array}$$

ist aber $A_1+A_2\gtreqless 10^m$, so ist $B_1<10^m$ und die Gruppe hat bloss

vier Glieder. Das erste Glied der folgenden Gruppe fängt, da $2B_1 + A_2 < 10^{m+1}$, mit 1, das zweite kann mit 1 oder 2 anfangen.

Ist $2A_1 + 3A_2 < 2.10^m$, also $3A_1 + 5A_2 < 4.10^m$,

so ist

$$13.10^m + 3A_1 + 5A_2 = 10^{m+1} + C_1,\ C_1 = 3.10^m + 3A_1 + 5A_2,\ C_1 < 10^{m+1}$$

$$21.10^m + 5A_1 + 8A_2 = 2.10^{m+1} + C_2,\ C_2 = 10^m + 5A_1 + 8A_2,\ C_2 < 10^{m+1};$$

ist

$2A_1 + 3A_2 \gtrless 2.10^m$, so ist $8.10^m + 2A_1 + 3A_2 = 10^{m+1} + D_1$, $D_1 < 10^{m+1}$

$13.10^m + 3A_1 + 5A_2 < 2.10^{m+1}$;

ist

$A_1 + A_2 \gtrless 10^m$, so ist $2B_1 + A_2 < 10^{m+1}$,

$3B_1 + 2A_2 < 5.10^m$.

Aus Allem folgt, dass wenn die zwei ersten Glieder einer Gruppe durch

$$10^m + A_1,\ 2.10^m + A_2,\ A_1 < 10^m,\ A_2 < 10^m,$$

dargestellt werden können, diese Gruppe entweder vier oder fünf Glieder hat, und dass die zwei ersten der folgenden Gruppe durch

$$10^{m+1} + B_1,\ 2.10^{m+1} + B_2,\ B_1 < 10^{m+1},\ B_2 < 10^{m+1}$$

dargestellt werden, wobei sogar B_2 negativ sein kann. Wäre oben A_2 negativ gewesen, so hätten offenbar alle Schlüsse um so mehr Statt. In diesem Falle hätte die Gruppe sogar fünf Glieder. Da nun die erste Gruppe ($m=0$), 1, 2, 3, 5, 8 ist, also ihre zwei ersten Glieder der Bedingung

$$10^m + A_1,\ 2.10^m + A_2,\ A_1 < 10^m,\ A_2 < 10^m$$

genügen, so genügen in allen Gruppen die zwei ersten Glieder dieser Bedingung, wobei bemerkt werden muss, dass oft A_2 negativ sein kann, d. h. das zweite Glied auch noch mit 1 anfangen kann; eine solche Gruppe hat dann nothwendig fünf Glieder, während jede andere mindestens vier, höchstens fünf hat. (Der Beweis in den Annales ist ganz ungenügend.)

§. 5.

Eine weitere Frage in Bezug auf die Reihe (1) wäre die, wenn ein Glied der Reihe gegeben wäre, zu finden, das wievielte es sei?

Offenbar kann man diese Aufgabe vermittelst der Form des allgemeinen Gliedes lösen. Allein man kann auch anders verfahren. Es habe die gegebene Zahl p Ziffern, so gehört sie in die $p$te Gruppe (§. 4.). Hätte jede Gruppe fünf Glieder, so wäre das gegebene Glied eines derer vom $(5p-4)$ten bis zum $5p$ten; hätte jede Gruppe bloss vier, so wäre das gegebene Glied eines derer vom $(4p-3)$ten bis zum $5p$ten. Da es aber, wie man sich leicht überzeugen wird, mindestens drei Gruppen von fünf Gliedern giebt, so sieht man leicht, dass das gegebene Glied mindestens das $4p$te, höchstens das $5p$te ist. Setzt man also in

Digitized by Google

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

für n alle ganzen Zahlen von $4p$ bis $5p$, so wird einmal der Werth des gegebenen Gliedes herauskommen und man wird also n finden.

§. 6.

Da

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

und auch

$$a_{n-1}=a_{n+1}-a_n,$$

so folgt hieraus, dass zwei auf einander folgende Glieder keinen Faktor gemeinschaftlich haben können, der grösser als 1 ist, da, wie man aus vorstehenden Gleichungen ersehen kann, sonst sämmtliche Glieder diesen Faktor hätten. Da aber die drei ersten 1, 2, 3 keinen solchen Faktor haben, so ist diess unmöglich. (Die Annales behaupten, alle Glieder seien zu einander theilerfremd, was falsch ist.)

Macht man die gleiche Rechnung, als wenn man den grössten gemeinschaftlichen Theiler zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern suchen wollte, so werden die nach einander zum Vorschein kommenden Reste offenbar alle den zwei vorangegangenen Glieder sein, d. h. die Anzahl der nöthigen Divisionen, bis der Rest 0 erscheint, wird angegeben durch den Rang des geringeren Gliedes. Nimmt man also z. B. das 19te und 20ste Glied, so sind 19 Divisionen nöthig.

§. 7.

Sind zwei Zahlen zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern der Reihe enthalten, so kann keine das Doppelte, oder mehr als das Doppelte der anderen sein. Denn a_{n+2} selbst ist $<2a_{n+1}$. Eben so ist der Unterschied jener zwei Zahlen kleiner, als das Glied der Reihe, das den genannten zwei vorangeht. Denn sind die zwei Zahlen zwischen a_{n+1} und a_{n+2} enthalten, so ist ihr Unterschied kleiner als $a_{n+2}-a_{n+1}$, d. h. kleiner als a_n.

§. 8.

Sucht man den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen, so hat man nicht mehr Divisionen zu machen, als durch die fünffache Zifferanzahl der kleineren Zahl angegeben ist, bis man den Rest 0 erhält.

Sei P die kleinere Zahl, R der erste Rest, und sei P zwischen a_n und a_{n+1}; wenn $\frac{P}{R}>2$, so ist $R<a_n$ (§. 7.); ist $\frac{P}{R}<2$, so kann R zwischen a_n und a_{n+1} sein (§. 7.); aber alsdann ist der folgende Rest $P-R<a_{n-1}$ (§. 7.); daraus folgt, dass man nicht mehr male zu dividiren habe, als wenn es sich um die Zahlen a_n und a_{n+1} handelt, d. h. nicht mehr als n mal (§. 6.). Hat a_n nun p Ziffern, so ist n nicht grösser als $5p$ (§. 5.), also hat man nicht mehr als $5p$ mal zu dividiren. Da die Zahl der Ziffern von P nicht kleiner als p ist, so ist damit der Satz bewiesen.

XI.

Ueber den Zusammenhang einiger das Tetraëder betreffenden Aufgaben.

Von dem

Herrn Doctor R. Baltzer,

Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden.

Die Gleichung zwischen den Cosinus der Winkel, welche von vier beliebigen Richtungen im Raume gebildet werden, ist bekannt und rührt, wie es scheint, von Sturm her, welcher im XV. Bande S. 330 ff. von Gergonne's Annalen dieselbe durch die Methode der rechtwinkligen Projectionen entwickelt. Bezeichnet man die vier Richtungen mit x, y, z, r, und den Winkel, um welchen die Richtung x in bestimmtem Sinne gedreht werden muss, bis sie mit der Richtung y (nicht mit der entgegengesetzten) zusammenfällt, mit xy u. s. w., so ist

$$\begin{aligned}&\sin^2 yz\cos^2 xr + \sin^2 zx\cos^2 yr + \sin^2 xy\cos^2 zr\\ &-2(\cos xy - \cos yz\cos zx)\cos xr\cos yr - 2(\cos yz - \cos zx\cos xy)\cos yr\cos zr\\ &-2(\cos zx - \cos xy\cos yz)\cos zr\cos xr\\ &= 1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2\cos xy\cos yz\cos zx. \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung für das Tetraeder soll im Folgenden nachgewiesen werden. Das Tetraeder sei $OFGH$,

$$OF = f,\ OG = g,\ OH = h$$

und die gegenüberliegenden Kanten

$$GH = a,\ HF = b,\ FG = c.$$

I.

OF, *OG*, *OH* haben die Richtung x, y, z, der Durchmesser d der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel habe die Richtung r, so ist

$$\cos xr : \cos yr : \cos zr : 1 = f : g : h : d,$$

mithin nach (A)

$$\begin{aligned} &f^2\sin^2yz + g^2\sin^2zx + h^2\sin^2xy - 2fg(\cos xy - \cos yz\cos zx) \\ &\quad - 2gh(\cos yz - \cos zx\cos xy) - 2hf(\cos zx - \cos xy\cos yz) \\ &= d^2(1 - \cos^2xy - \cos^2yz - \cos^2zx + 2\cos xy\cos yz\cos zx). \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Gleichung zur Berechnung des Durchmessers der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus drei zusammenstossenden Kanten und deren Winkel hat Legendre in seinen Elementen (Anm. V.) gegeben.

Anmerkung 1. Um sämmtliche Kanten des Tetraeders statt der Winkel in diese Gleichung einzuführen, hat man

$$\cos yz = \frac{g^2+h^2-a^2}{2gh},\quad \cos zx = \frac{h^2+f^2-b^2}{2hf},\quad \cos xy = \frac{f^2+g^2-c^2}{2fg}$$

und giebt der linken Seite L der obigen Gleichung die Form:

$$\begin{aligned} L = {} & f^2 + g^2 + h^2 - 2fg\cos xy - 2gh\cos yz - 2hf\cos zx \\ & + 4fg\cos yz\cos zx - (f\cos yz + g\cos zx - h\cos xy)^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & f^2 + g^2 + h^2 - 2fg\cos xy - 2gh\cos yz - 2hf\cos zx \\ & + 4fg\cos yz\cos zx = \frac{c^2h^2 - a^2f^2 - b^2g^2 + f^2g^2 + a^2b^2}{h^2}, \end{aligned}$$

$$f\cos yz + g\cos zx - h\cos xy = \frac{c^2h^2 - a^2f^2 - b^2g^2 + 2f^2g^2}{2fgh},$$

und daher

$$\begin{aligned} 4f^2g^2h^2L &= 4f^2g^2a^2b^2 - (c^2h^2 - a^2f^2 - b^2g^2)^2 \\ &= (af + bg + ch)(af + bg - ch)(af - bg + ch)(-af + bg + ch). \end{aligned}$$

Nimmt man hinzu, dass, wie bekannt (vgl. Anm. 2.),

$$fgh\sqrt{1-\cos^2xy-\cos^2yz-\cos^2zx+2\cos xy\cos yz\cos zx}$$

das 6fache Tetraeder V bedeutet, so erhält man

(2)

$$144\,V^2d^2=(af+bg+ch)(af+bg-ch)(af-bg+ch)(-af+bg+ch),$$

eine Gleichung, welche Crelle (Sammlung mathem. Aufsätze I. S. 117.) direct entwickelt hat.

Will man auch V durch die Kanten ausdrücken, so braucht man nicht bei dem Ausdruck stehen zu bleiben, welchen Legendre a. a. O. gegeben hat, indem er

$$g^2+h^2-a^2=F,\quad h^2+f^2-b^2=G,\quad f^2+g^2-c^2=H$$

abkürzend einführt, wobei mehrere gleiche und entgegengesetzte Glieder ungetilgt bleiben. Die weitere Entwickelung giebt

$$\begin{aligned}4f^2g^2h^2(1-\cos^2xy-\cos^2yz-\cos^2zx+2\cos xy\cos yz\cos zx)\\ =\ a^2f^2(g^2+h^2-f^2+b^2+c^2-a^2)\\ +b^2g^2(h^2+f^2-g^2+c^2+a^2-b^2)\\ +c^2h^2(f^2+g^2-h^2+a^2+b^2-c^2)\\ -a^2g^2h^2+b^2h^2f^2-c^2f^2g^2-a^2b^2c^2,\end{aligned}$$

wie schon Meier Hirsch (Geom. Aufg. II. S. 112.) bemerkt hat, ohne den symmetrischen Bau des Ausdrucks durch geeignete Bezeichnung kenntlich zu machen.

Anmerkung 2. Es scheint unbeachtet geblieben zu sein, dass aus (3) sich unmittelbar die Gleichung zwischen den Seiten und Diagonalen eines ebenen Vierecks hinschreiben lässt, welche Lexell, Euler und zuletzt Carnot (Géom. de posit. §. 331.) ohne Zusammenfassung der Glieder entwickelt haben. Es ist im Allgemeinen

$$\begin{aligned}1-\cos^2xy-\cos^2yz-\cos^2zx+2\cos xy\cos yz\cos zx\\ =\sin^2xy\sin^2yz\sin^2Y\\ =\sin^2yz\sin^2zx\sin^2Z\\ =\sin^2zx\sin^2xy\sin^2X,\end{aligned}\qquad(4)$$

wo X der Winkel der Ebenen ist, von denen eine x und y. die andere x und z parallel ist u. s. f., und nach der sphärischen Fundamentalformel

$$\cos X=\frac{\cos yz-\cos zx\cos xy}{\sin zx\sin xy}\quad\text{u. s. f.}$$

Die obigen Gleichungen (4) ergeben sich hieraus sofort durch Entwickelung von

$$(1-\cos^2 X)\sin^2 zx \sin^2 xy \text{ u. s. f.}$$

und bedeuten das Quadrat des 6fachen Tetraeders $OFGH$, dessen Kanten f, g, h Längeneinheiten sind, dessen Grundfläche z. B. $OFG = \frac{1}{2}\sin xy$, und dessen Höhe $\sin zx \sin X$ ist. Sind nun die Richtungen x, y, z derselben Ebene parallel, so ist X, Y, Z und das Tetraeder $=0$, mithin

$$1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy\cos yz\cos zx=0,$$

und daher

$$\begin{aligned} &a^2f^2(g^2+h^2-f^2+b^2+c^2-a^2)\\ &+b^2g^2(h^2+f^2-g^2+c^2+a^2-b^2)\\ &+c^2h^2(f^2+g^2-h^2+a^2+b^2-c^2)\\ &-a^2g^2h^2-b^2h^2f^2-c^2f^2g^2-a^2b^2c^2=0. \end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen gelangt man direct, wenn man davon ausgeht, dass in diesem Falle die Winkel

$$xy+yz+zx=2m\pi$$

sind, wo m eine ganze Zahl oder 0 ist, daher

$$\cos xy=\cos(yz+zx) \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung 3. Aus $1+\cos X$ und $1-\cos X$, welche in Factoren zerlegbar sind, findet man bekanntlich $\sin^2 X \sin^2 zx \sin^2 xy$ oder

$$\begin{aligned} &1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy\cos yz\cos zx\\ &=4\sin\frac{xy+yz+zx}{2}\sin\frac{xy+yz-zx}{2}\sin\frac{xy-yz+zx}{2}\sin\frac{-xy+yz+zx}{2}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für das 6fache Tetraeder, dessen zusammenstossende Kanten die Richtungen x, y, z haben und Längeneinheiten sind, hat unverkennbare Analogie mit dem bekannten Ausdruck zur Berechnung der Dreiecksfläche aus den Seiten, welche sich wie folgt erklären lässt. Es sei O Mittelpunkt einer Kugel, auf deren Oberfläche die Punkte F, G, H liegen, so dass

$$OF=OG=OH=r$$

und

$$OFGH^2=\frac{r^6}{36}(1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy\cos yz\cos zx).$$

Ist p der Abstand des Mittelpunkts O von der Ebene FGH, so hat man auch

$$OFGH^2 = \frac{p^2}{9} FGH^2,$$

und daher

$$FGH^2 = \frac{r^6}{4p^2}(1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2\cos xy \cos yz \cos zx)$$

$$= \frac{r^6}{4p^2} \sin^2 zx \sin^2 xy \sin^2 X \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{r^6}{p^2} \sin \frac{xy+yz+zx}{2} \sin \frac{xy+yz-zx}{2} \sin \frac{xy-yz+zx}{2} \sin \frac{-xy+yz+zx}{2}.$$

Für $r = \infty$ fallen die Bogen FG, GH, HF mit ihren Sehnen a, b, c, die Sinus der verschwindenden Mittelpunktswinkel mit den Winkeln, p mit r zusammen, und da der Bogen das Product seines Winkels mit dem Radius ist, so kommt

$$FGH^2 = \frac{1}{4}(bc \sin A) \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2},$$

wo der Winkel A, der im Dreieck FGH der Seite a gegenüberliegt, kein anderer ist, als X.

Da zugleich das Verhältniss des sphärischen Dreiecks FGH zur Kugelfläche verschwindet, so ist

$$X + Y + Z - 2 \text{ Rechte} = 0 \text{ oder } A + B + C = 2 \text{ Rechte.}$$

Dieser neue stereometrische Beweis des alten Satzes von der Summe der Dreieckswinkel setzt die Gleichheit zwischen einem sphärischen Dreieck und seinem Gegendreieck voraus, welche sich ohne Parallelentheorie durch Congruenzen beweisen lässt.

II.

In der Gleichung (A) sind die Gleichungen zwischen den Winkeln des Tetraeders, sowie zwischen den Seiten und Diagonalen eines sphärischen Vierecks, enthalten, welche Meier Hirsch (Geom. Aufg. II. §. 107. und §. 55.) durch gesonderte Methoden gewinnt.

Digitized by Google

Sind nämlich zuerst x, y, z, r die Richtungen der Normalen auf den Innenseiten OGH, OHF, OFG, FGH des Tetraeders $OFGH$, und bezeichnet OF den Winkel der Ebenen OFG und OFH u. s. w., so ist

$$\cos OF = -\cos yz, \quad \cos OG = -\cos zx, \quad \cos OH = -\cos xy;$$

$$\cos GH = -\cos xr, \quad \cos HF = -\cos yr, \quad \cos FG = -\cos zr;$$

folglich

$$\begin{aligned} &1 - \cos^2 OF - \cos^2 OG - \cos^2 OH - 2\cos OF \cos OG \cos OH \\ &= \sin^2 OF \cos^2 GH + \sin^2 OG \cos^2 HF + \sin^2 OH \cos^2 FG \\ &\quad + 2(\cos OH + \cos OF \cos OG)\cos GH \cos HF \\ &\quad + 2(\cos OF + \cos OG \cos OH)\cos HF \cos FG \\ &\quad + 2(\cos OG + \cos OH \cos OF)\cos FG \cos GH. \end{aligned} \tag{5}$$

Sind zweitens x, y, z, r die Richtungen von den Radien MF, MG, MH, MO der Kugel, deren Mittelpunkt M ist und welche dem Tetraeder $OFGH$ umgeschrieben ist, und bezeichnet man die Seiten und Diagonalen des zugehörigen sphärischen Vierecks wie die gleichnamigen Kanten des Tetraeders, so ist

$$\cos f = \cos xr, \quad \cos g = \cos yr, \quad \cos h = \cos zr;$$

$$\cos a = \cos yz, \quad \cos b = \cos zx, \quad \cos c = \cos xy;$$

$$\begin{aligned} &1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c \\ &= \sin^2 a \cos^2 f + \sin^2 b \cos^2 g + \sin^2 c \cos^2 h \\ &\quad - 2(\cos c - \cos a \cos b)\cos f \cos g \\ &\quad - 2(\cos a - \cos b \cos c)\cos g \cos h \\ &\quad - 2(\cos b - \cos c \cos a)\cos h \cos f. \end{aligned} \tag{6}$$

Führt man die Sinus der halben Bogen ein und schreibt der Kürze halber a statt $\sin\frac{a}{2}$ u. s. w., so nimmt die Gleichung (6) folgende Form an:

$$\begin{aligned} &a^2f^2(g^2 + h^2 - f^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b^2g^2 - c^2h^2 + a^2f^2) \\ &+ b^2g^2(h^2 + f^2 - g^2 + c^2 + a^2 - b^2 - c^2h^2 - a^2f^2 + b^2g^2) \\ &+ c^2h^2(f^2 + g^2 - h^2 + a^2 + b^2 - c^2 - a^2f^2 - b^2g^2 + c^2h^2) \\ &- a^2g^2h^2 - b^2h^2f^2 - c^2f^2g^2 - a^2b^2c^2 = 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man alle Glieder mit der 6ten Potenz des Radius und setzt denselben unendlich, so verschwinden die Winkel und Sinus, während ihre Producte mit dem Radius die Sehnen statt der

Bogen gehen. Dabei gehen die Glieder achter Dimension verloren, welche als endliche Grössen mit zweiter negativer Potenz des Radius multiplicirt erscheinen würden. So bleibt in der That die früher gegebene Gleichung für die Seiten und Diagonalen des ebenen Vierecks übrig.

III.

In (A) ist auch die Gleichung enthalten zwischen den Seiten des Tetraeders, oder allgemeiner, zwischen einem ebenen Flächenstück und seinen Coordinaten, d. h. seinen Projectionen auf je eine von drei willkührlichen Ebenen parallel dem Durchschnitt der beiden andern.

Sind x, y, z, r die Richtungen von OF, OG, OH und der Normale p von O zu FGH, so ist

$$OFGH=\frac{p}{3}\,FGH$$

$$=\frac{fgh}{6}\sqrt{1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy\cos yz\cos zx}\,,$$

folglich, wenn man δ statt der Quadratwurzel schreibt,

$$FGH=\frac{fgh\delta}{2p}\,.$$

Ferner ist

$$OFG=\frac{fg\sin xy}{2}=\frac{fgh\sin xy\cos zr}{2p}\,,$$

weil $h\cos zr=p$ u. s. w. Daher

(7)

$$FGH:OFG:OGH:OHF=\delta:\sin xy\cos zr:\sin yz\cos xr:\sin zx\cos yr\,.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (A) und bemerkt, dass (I. Anm. 2.)

$$\cos xy-\cos yz\cos zx=\sin y z\sin z x\cos Z \text{ u. s. w.,}$$

so erhält man ohne Weiteres

(8) $$FGH^2=OFG^2+OGH^2+OHF^2-2OFG.OGH.\cos Y$$
$$-2OGH.OHF.\cos Z-2OHF.OFG.\cos X\,.$$

Die allgemeine Geltung dieser Gleichung für irgend ein Ebenenstück und seine Coordinaten (im oben angegebenen Sinne) ergiebt sich, wenn man durch den Umfang des Ebenenstücks Pris-

men legt, deren Kanten je einer Coordinatenaxe x, y, z parallel sind. Die Durchschnitte dieser Prismen mit den Coordinatenebenen yz, zx, xy, d. h. die Coordinaten des Ebenenstücks E seien K, L, M, und die Normalen dieser Ebenen r, x', y', z'. Dann ist $E\cos xr = M\cos zz'$ = dem Normalschnitt des Prisma, wodurch E auf xy projicirt worden u. s. w. Folglich

$$E:K:L:M=1:\frac{\cos xr}{\cos xx'}:\frac{\cos yr}{\cos yy'}:\frac{\cos zr}{\cos zz'}.$$

Nun ist $\cos zz'=\sin zx\sin X$, wo X wie oben den Winkel der Coordinatenebenen an der Kante x bedeutet, also (1. Anm. 2.) $\cos zz'=\frac{\delta}{\sin yz}$ u. s. w. und wie in (7):

$$E:K:L:M=\delta:\sin yz\cos xr:\sin zx\cos yr:\sin xy\cos zr,$$

$$E^2=K^2+L^2+M^2-2KL\cos Z-2LM\cos X-2MK\cos Y.$$

Anmerkung Die gefundene Gleichung hat denselben Bau, als die zwischen einer Strecke r und ihren Coordinaten x, y, z bestehende

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2xy\cos xy+2yz\cos yz+2zx\cos zx. \qquad (B)$$

Wie man aus dieser die Summe der Quadrate von den Diagonalen eines Parallelepipeds ableitet (Legendre, Anmerk. V.), so ergiebt sich aus jener die Summe der Quadrate von den Diagonaldreiecken des Parallelepipeds (FGH, $OF'G'$, $OG'H'$, $OH'F'$, wenn OO', FF', GG', HH' die Diagonalen des Parallelepipeds sind, welchem das Tetraeder $OFGH$ angehört).

Auch lässt sich die Gleichung (8) aus (B) ableiten. Errichtet man nämlich auf den innern Seiten des Tetraeders $OFGH$ Normalen x, y, z, r, welche sich wie die Seiten verhalten, worauf sie stehen, so lassen sich diese Strecken zu einem räumlichen Viereck durch parallele Verschiebung zusammensetzen, wie sich durch die Methode der Projectionen leicht beweisen lässt. In diesem Viereck wird eine Seite durch die übrigen nach der Gleichung (B) ausgedrückt, worein man dann die proportionalen Werthe setzt und bemerkt, dass $\cos xy=-\cos Z$ u. s. w.

XII.

Ueber die durch die Gleichung

$$y = \sqrt{x}$$

dargestellten Kurven.

Von

Herrn H. Scheffler,

Bau-Conducteur bei den Herzogl. Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Die Diskussion der Formel

$$y = \sqrt[z]{x} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

als Gleichung einer Kurve, wie sie Herr Professor Hessel in Nr. XIII. des 14. Theiles dieses Archivs niedergelegt hat, führt zu dem Resultate, dass gewisse Theile dieser Kurve keinen stetigen Zusammenhang besitzen, sondern wie punktirte Kurven erscheinen.

Dieses Resultat der unstetigen Bildung von y kann jedoch nur aus der Substitution unstetiger Werthe von x hervorgehen. Stetige Werthe von x führen immer zu stetigen Werthen von y, also auch zu stetigen Kurven, was man mit Hülfe der geometrischen Bedeutung der imaginären Zahlen folgendermaassen einsieht.

Stillschweigende Bedingung ist es, dass jede der beiden Zahlen x und y, z. B. die Zahl y, behuf geometrischer Konstruktion als eine Linie dargestellt werde, deren Länge dem absoluten Werthe, und deren Richtung dem Zeichen von y entspricht. Je nachdem das Zeichen von y gleich $+1$ oder gleich -1 ausfällt, ist diese Länge in der ursprünglich angenommenen, positi-

Digitized by Google

ven oder in der um 180° davon abweichenden, negativen Ordinatenrichtung zu messen. Es ist klar, dass wenn sich y mit dem allgemeineren Zeichen oder Richtungskoeffizienten $e^{\psi\sqrt{-1}}$ einstellen sollte, seine Länge in einer Richtung zu nehmen ist, welche sich unter dem Winkel ψ gegen die positive Ordinatenaxe neigt.

Es versteht sich von selbst, dass in derselben Weise bei der Auftragung der Abszisse x auf das Zeichen derselben Rücksicht zu nehmen ist.

Nimmt man stets den Nullpunkt des Koordinatensystems zum Anfangspunkte von x und den Endpunkt von x zum Anfangspunkte von y; so beschreibt der Endpunkt von y die in Rede stehende Kurve.

Führen wir gleich von vorn herein für x den allgemeineren Ausdruck $re^{\varphi\sqrt{-1}}$, oder, wenn $r=e^{\varrho}$ gesetzt wird, den Ausdruck $x=e^{\varrho+\varphi\sqrt{-1}}$ ein; so kommt

$$y=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}=(e^{\varrho+\varphi\sqrt{-1}})^{e^{-\varrho-\varphi\sqrt{-1}}}=e^{(\varrho+\varphi\sqrt{-1})e^{-\varrho}e^{-\varphi\sqrt{-1}}}$$

$$=e^{e^{-\varrho}(\varrho+\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi-\sin\varphi.\sqrt{-1})}=e^{e^{-\varrho}[(\varrho\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)+(\varphi\cos\varphi-\varrho\sin\varphi)\sqrt{-1}]}$$

$$=e^{e^{-\varrho}(\varrho\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)}e^{e^{-\varrho}(\varphi\cos\varphi-\varrho\sin\varphi)\sqrt{-1}},$$

oder da $e^{-\varrho}=\frac{1}{r}$ ist,

$$y=e^{\frac{\varphi\sin\varphi+\varrho\cos\varphi}{r}}e^{\frac{\varphi\cos\varphi-\varrho\sin\varphi}{r}\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Von den beiden in der Abszisse $x=re^{\varphi\sqrt{-1}}$ vorkommenden Grössen r und φ darf man offenbar nur eine einzige unabhängig variiren lassen, wenn die Gleichung (1) eine Kurve zur Erscheinung bringen soll. (Nähme man sowohl r wie φ als unabhängig veränderlich an; so würde die obige Gleichung ein Flächenstück darstellen). Die meisten Untersuchungen der analytischen Geometrie beschränken sich auf den speziellen Fall, wo die Richtung der Abszissen x, also der Werth von φ, konstant erhalten und nur die Länge r derselben stetig variirt wird. Man nimmt jene konstante Abszissenrichtung gewöhnlich Ein Mal als mit der positiven und Ein Mal als mit der negativen Abszissenaxe zusammenfallend an, wodurch sich zwei besondere Systeme von Kurven ergeben, welche oftmals zwei zusammenhängende Schenkel Ein und derselben grösseren Kurve darstellen.

Durch die Bedingung, dass die Linie x stets in einer gewissen Richtung liegen soll, ist ihr arithmetischer Ausdruck $re^{\varphi\sqrt{-1}}$ noch nicht vollkommen bestimmt. Es muss noch gesagt werden, wie viel ganze Umwälzungen nach der Einen oder anderen

Seite die Linie x stets um den Nullpunkt gemacht haben soll, ehe sie aus der ursprünglichen Abszissenaxe in die um den Winkel φ sich dagegen neigende Lage gekommen ist. Bezeichnet man die Anzahl jener ganzen Umwälzungen durch die ganze Zahl k, welche positiv oder negativ ist, jenachdem die Umwälzungen nach der positiven oder negativen Drehungsrichtung erfolgen sollen; so hat man, wenn φ jetzt den fundamentalen Neigungswinkel von x darstellt, $2k\pi+\varphi$ an die Stelle von φ zu setzen. Hierdurch wird Gleichung (2)

$$y=e^{\frac{(2k\pi+\varphi)\sin\varphi+\varrho\cos\varphi}{r}\sqrt{-1}}\,e^{\frac{(2k\pi+\varphi)\cos\varphi-\varrho\sin\varphi}{r}\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots (3)$$

In dieser Gleichung ist nun, wenn die Abszisse x nach und nach bloss ihre Länge r stetig ändern soll, nicht allein die Grösse φ, sondern auch die Grösse k konstant zu erhalten.

Soll die Länge r von x nur in der Richtung der positiven Abszissenaxe variiren, also für die durch $x=+r$ dargestellten Abszissen, hat man $\varphi=0$, also

$$y=e^{\frac{\varrho}{r}\frac{2k\pi}{r}\sqrt{-1}}=r^{\frac{1}{r}e^{\frac{2k\pi}{r}\sqrt{-1}}}=\sqrt[r]{r}.e^{\frac{2k\pi}{r}\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Soll die Länge r von x nur in der negativen Abscissenaxe variiren, also für die durch $x=-r$ dargestellten Abszissen, hat man $\varphi=\pi$, also

$$y=e^{-\frac{\varrho}{r}-\frac{(2k+1)\pi}{r}\sqrt{-1}}=r^{-\frac{1}{r}}e^{\frac{(2k+1)\pi}{-r}\sqrt{-1}}$$

$$=\sqrt[-r]{r}e^{\frac{(2k+1)\pi}{-r}\sqrt{-1}}=\frac{1}{\sqrt[r]{r}.e^{\frac{(2k+1)\pi}{r}\sqrt{-1}}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

So viel verschiedene Werthe man nun nach und nach für die ganze Zahl k einführt, ebenso viel verschiedene, aber vollkommen stetige Kurven liefert sowohl die Gleichung (4) wie auch die Gleichung (5). Nur dann, wenn man solche Werthe von y, bei welchen k nicht konstant erhalten wäre, zu einem Systeme von Ordinaten zusammenstellen wollte, oder auch dann, wenn man für dasselbe konstante k diejenigen Werthe von y ausschliessen wollte, welche nicht in die Richtung der positiven oder negativen Ordinatenaxe fielen, also auch nicht reell wären, würde man unstetige Kurven erhalten. Man erkennt leicht, dass die in dem obigen Aufsatze Nr. XIII. zum Vorschein kommenden diskontinuirlichen Bildungen zum Theil darin ihren Grund haben, dass unvermerkt für Ein und dieselbe Kurve die Grösse k nicht konstant erhalten ist, zum Theil darin, dass alle nicht reellen Werthe von y ausgeschlossen sind.

Zur weiteren Aufklärung wollen wir hier nur die auf positive Abszissen bezügliche Gleichung (4) etwas näher ins Auge fassen.

Dieselbe stellt, je nachdem man

$$k = \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

setzt, eine unendliche Menge ganz verschiedener Kurven dar.

Für $k=0$ ergibt sich die Kurve

$$y = \sqrt[r]{r} \quad \ldots\ldots\ (6)$$

welche lauter positive Ordinaten besitzt. Da man für $r=0$ auch $y=0$ und für $r=\infty$, $y=1$ hat, so geht die Kurve durch den Nullpunkt, und hat eine in dem Abstande $y=1$ mit der Abszissenaxe parallel gezogene Linie zur Asymptote. Für $r=1$ ist ebenfalls $y=1$ und für $r=e=2{,}718\ldots\ldots$ besitzt die Ordinate

$$y = \sqrt[e]{e} = 1{,}444\ldots\ldots$$

ihr Maximum. Dies gibt die auch auf der dritten Tafel in Theil XIV. abgebildete Kurve *OABCD*.... (Taf. III. Fig. 1.).

Für jede andere durch Gleichung (4) dargestellte Curve hat die Ordinate y dieselbe Länge $\sqrt[r]{r}$, welche demselben Werthe von r in der vorhergehenden Kurve (6) entspricht. Alle diese Kurven gehen also durch den Nullpunkt. Aber die Richtungen der Ordinaten y sind von den früheren verschieden. Der Neigungswinkel ψ einer solchen Ordinate gegen die positive Ordinatenaxe OY ist $\psi = \frac{2k\pi}{r}$. Wir wollen annehmen, die positive Drehungsrichtung der Ordinaten gehe von rechts nach links herum. Da für $r=\infty$, $\psi=0$ wird; so folgt, dass sich die Richtung der Ordinaten aller Kurven von einer gewissen Stelle an immer mehr und mehr der positiven Ordinatenrichtung nähert, je grösser r wird, und dass mithin die vorhin beschriebene Parallele zu OX eine gemeinschaftliche Asymptote für alle diese Kurven ist.

Wenn $r=4k$, ist $\psi = \frac{\pi}{2}$. Die Ordinate y erstreckt sich alsdann nach der Richtung der negativen Abscissenaxe. Für diesen Werth von r passirt die Kurve also die Abszissenaxe.

Für alle Werthe von $r > 4k$, ist $\psi < \frac{\pi}{2}$ und nimmt desto mehr ab, je mehr r zunimmt. Nachdem also $r > 4k$ geworden ist, kann die Richtung der Ordinate y nicht mehr unter die Abszissenaxe fallen; $r=4k$ bezeichnet vielmehr die schon vorhin

erwähnte Stelle, von wo ab die Ordinate immer mehr in die Richtung der positiven Ordinatenaxe zu gelangen strebt.

Für die Werthe von r, welche zwischen 0 und $4k$ liegen, macht die Ordinate y unendlich viele Rotationen; die Kurve durchschreitet die Abscissenaxe eben so viel Mal von oben kommend, wie von unten kommend, und bildet hier eben so viele Schlingen.

In diesem Zwischenraum nimmt die Ordinate y

1) das positive Zeichen $e^{2k'\pi\sqrt{-1}} = +1$, also die Richtung der positiven Ordinatenaxe,

$$\text{für } r = \frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4} \cdots;$$

2) das negative Zeichen $e^{(2k'+1)\pi\sqrt{-1}} = -1$, also die Richtung der negativen Ordinatenaxe,

$$\text{für } r = \frac{2k}{1}, \frac{2k}{3}, \frac{2k}{5}, \frac{2k}{7} \cdots;$$

3) das positiv imaginäre Zeichen $e^{(2k'+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}} = +\sqrt{-1}$, also die Richtung der negativen Abszissenaxe,

$$\text{für } r = \frac{4k}{1}, \frac{4k}{5}, \frac{4k}{9}, \frac{4k}{13} \cdots;$$

4) das negativ imaginäre Zeichen $e^{(2k'+\frac{3}{2})\pi\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$, also die Richtung der positiven Abscissenaxe,

$$\text{für } r = \frac{4k}{3}, \frac{4k}{7}, \frac{4k}{11}, \frac{4k}{15} \cdots$$

an.

Eine Kurve dieser Art, und zwar die für $k=1$ sich ergebende, ist in dem Zuge *OabuAcdcfg* (Taf. III. Fig. 1.) dargestellt.

Keine zwei dieser Kurven sind identisch; aber dieselben haben für gewisse gleiche Längenwerthe r der Abszisse gleiche Ordinaten, also gemeinschaftliche Durchschnittspunkte. Der Punkt A für $r=1$ ist ihnen allen gemein, und überhaupt giebt es in dieser unendlichen Menge von Kurven für Ein und dasselbe rationale r nur eine endliche Menge verschiedener Ordinaten y, deren Anzahl so gross ist, als der Zähler des auf seine kleinste Benennung gebrachten Bruches r Einheiten enthält. Daraus folgt, dass der Punkt A, B, C, D, E....., welcher in der ersten Kurve (6) resp. den Werthen $r=1, 2, 3, 4, 5\ldots$ entspricht, resp. von allen, von der Hälfte, von dem 3ten, 4ten, 5ten ... Theile der in Rede stehenden Kurven passirt wird.

XIII.

Anwendung der perspectivischen Projection auf die analytische Auflösung der Aufgabe „Eine gemeinschaftliche Tangente an zwei Linien zweiten Grades zu finden“. Als Fortsetzung der Untersuchungen in Nr. XIII. des XI. Theils 2. Hefts dieses Archivs.

Von

Herrn Leopold Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

§. 1.

Wir bedienen uns hier der gleichen Bezeichnungen und Annahmen wie in dem so eben angeführten Aufsatze dieses Archivs, und nehmen

$$a^2(Y-g)^2+b^2(X+f)^2=a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

als die Gleichung einer Ellipse an, deren Achsen $2a$ und $2b$, und deren Mittelpunktscoordinaten $-f$ und g sind; auch finden hier, wie in (12) jenes Aufsatzes, folgende Relationen zwischen den Coordinaten X und Y, und den diesen entsprechenden perspectivischen Coordinaten y', z' statt, nämlich:

$$Y-g=\frac{vy'+(g-u)z'-gv}{v-z'}\;;\quad f+X=\frac{fv-(f-t)z'}{v-z'} \quad \ldots \quad (2)$$

In diesen Gleichungen sind t, u, v die Coordinaten des Auges im Raume. Durch die Substitution dieser Werthe von X und Y finden wir endlich für die Gleichung der Perspective der Ellipse 1) folgende:

(3)

$$\left.\begin{array}{l}\{a^2(y-u)^2+b^2(f-t)^2-a^2b^2\}z'^2+a^2v^2y'^2+2a^2(g-u)vy'z' \\ -2\{a^2g(g-u)+b^2f(f-t)-a^2b^2\}vz'-2a^2v^2y'+\{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2\}v^2\end{array}\right\}=0$$

Diese Gleichung drückt im Allgemeinen einen Kegelschnitt aus. Wir wollen nun den geometrischen Ort des Auges (t, u, v) zu bestimmen suchen, wenn dieser Kegelschnitt eine Kreislinie wird. In diesem Falle müssen bekanntlich die beiden Bedingungsgleichungen:

$$a^2(g-u)^2+b^2(f-t)^2-a^2b^2=a^2v^2 \quad \ldots\ldots (4)$$

$$(g-u)v=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

statt finden. Die Gleichung (5) zerfällt aber wieder in

$$v=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und in:

$$g-u=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Nehmen wir zuerst die Gleichungen (4) und (6) als gleichzeitig bestehend an, so sehen wir dass erstere ein eintheiliges Hyperboloid, letztere die Ebene der xy darstellt, beide zugleich geben also die Durchschnittscurve der Ebene xy mit jenem Hyperboloid, welche durch die Gleichung:

$$\frac{(g-u)^2}{b^2}+\frac{(f-t)^2}{a^2}=1 \quad \ldots\ldots (8)$$

dargestellt wird Setzen wir in der Gleichung (3)

$$a^2(g-u)^2+b^2(f-t)^2-a^2b^2=a^2v^2,$$

und hernach $v=0$, so erhalten wir die identische Gleichung $0=0$. Es muss also der Werth $v=0$ verworfen werden. Nehmen wir hingegen die Gleichungen (4) und (7) gleichzeitig bestehend an, so finden wir, weil $g-u=0$ die Gleichung einer auf der Ebene der xy senkrecht stehenden Ebene ist, deren Durchschnitt mit dem Hyperboloid (4) durch die Gleichung:

$$v^2=\frac{b^2}{a^2}\{(f-t)^2-a^2\} \quad \ldots\ldots (9)$$

dargestellt ist: dass die Perspective der Ellipse (1) eine Kreislinie wird, wenn sich das Auge (t, u, v) auf einer durch die Gleichung (9) ausgedrückten Hyperbel befindet, deren Ebene auf der Ebene der gegebenen Ellipse und auf der Tafel senkrecht steht.

Für die Gleichung der Kreislinie selbst, welche die Perspective der Ellipse (1) in diesem Falle vorstellt, finden wir nachstehende:

Digitized by Google

$$x'^2+y'^2-\frac{2b^2}{a^2v}\{f(f-t)-a^2\}x'-2gy'+\frac{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2}{a^2}=0 \quad (10)$$

§. 2.

Geben wir statt der Ellipse (1) eine Hyperbel, deren Gleichung

$$a^2(Y-g)^2-b^2(f+X)^2=-a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

ist, so finden wir durch eine ganz gleiche Untersuchung wie in §. 1. dass ihre Perspective eine Kreislinie wird, wenn sich das Auge (t, u, v) auf einer Ellipse bewegt, deren Ebene durch das Auge geht, und senkrecht auf der Ebene der Hyperbel (11) und auf der Tafel ist. Die Gleichung dieser Ortsellipse ist:

$$v^2=\frac{b^2}{a^2}\{a^2-(f-t)^2\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Gleichung der Kreislinie, welche in diesem Fall die Perspective der Hyperbel (11) vorstellt, wird alsdann folgende:

$$x'^2+y'^2+\frac{2b^2}{a^2v}\{f(f-t)-a^2\}x'-2gy'+\frac{a^2g^2-b^2f^2+a^2b^2}{a^2}=0 \quad \ldots (13)$$

§. 3.

Nehmen wir für die perspectivisch zu projicirende Curve eine Parabel, deren Gleichung:

$$Y-g=-\sqrt{p(f+X)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

ist, und wenden auf diese dasselbe Verfahren an, wie bei der Ellipse (1), so finden wir, dass sich diese Parabel perspectivisch als Kreis projicirt, wenn sich das Auge auf einer zweiten Parabel vom gleichen Parameter bewegt; die Ebene dieser ist ebenfalls auf der Ebene der Parabel (14) und auf der Tafel senkrecht. Die Gleichung der Ortsparabel des Auges ist:

$$v^2=p(t-f) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Der perspectivische Kreis wird aber durch die Gleichung:

$$x'^2+y'^2+\frac{p(2f-t)}{v}x'-2gy'+g^2-fp=0 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

ausgedrückt.

Digitized by Google

§. 4.

Um der Vollendung unserer Aufgabe näher zu rücken, suchen wir die Bedingungen auf, unter welchen irgend eine Linie zweiten Grades in einer ganz beliebigen Lage gegen die Tafel, nur in der gleichen Ebene wie die Curven §. 1. (11) und (14) liegend, sich perspectivisch als Kreis projicirt, und nehmen daher

$$AY^2+2BXY+CX^2+2DY+2EX+F=0 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

als die Gleichung der zu projicirenden Linie an. Die Relationen, welche zwischen den perspectivischen Coordinaten y', z' und den Coordinaten X, Y, Z statt finden, werden durch die Gleichungen:

$$X=\frac{tz'}{v-z'}, \quad Y=\frac{vy'-uz'}{v-z'}$$

dargestellt, m. s. Archiv Theil XI. Heft 2. pag. 121. Nr. I. Durch die Substitution dieser Werthe von X und Y in (17) erhalten wir als Gleichung der Perspective der Curve (17) folgende:

(19)

$$\left.\begin{array}{l}\{Au^2-2But+Ct^2+2Du-2Et+F\}z'^2+Av^2y'^2-2v\{Au-Bt+D\}y'z'\\ -2v\{Du-Et+F\}z'+2Dv^2y'+Fv^2\end{array}\right\}=0.$$

Soll diese Gleichung einem Kreise angehören, so müssen die zwei Bedingungsgleichungen:

$$Au^2-2But+Ct^2+2Du-2Et+F=Av^2 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

$$Au-Bt+D=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

statt finden; eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen die Grösse u, so erhalten wir:

$$A^2v^2+(B^2-AC)t^2-2(BD-AE)t+D^2-AF=0 \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Diese Gleichung drückt im Allgemeinen eine Linie zweiten Grades aus, auf welcher sich das Auge bewegen muss, damit die Perspective der Curve (17) ein Kreis wird, und zwar befindet sich diese Linie (22) in einer Ebene, welche auf der Ebene der xy, oder auf jener der Curve (17), senkrecht steht, und welche durch die Gleichung (21) dargestellt wird.

Für die Gleichung der Kreislinie, welche die Perspective der Curve (17) ist, erhalten wir:

$$z'^2+y'^2-2\frac{\{(BD-AE)t-(D^2-AF)\}}{A^2v}z'+2\frac{D}{A}y'+\frac{F}{A}=0 \quad \ldots \quad (23)$$

§. 5.

Nehmen wir zuerst an, die durch die Gleichung (17) dargestellte Curve sei eine Ellipse, so muss bekanntlich

$$B^2-AC<0 \text{ und } (BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)>0$$

sein; wir können daher zufolge unserer Annahme

$$B^2-AC=-n \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

$$(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)=m^2 \ldots\ldots (25)$$

setzen; n ist eine numerische, m hingegen eine lineare Grösse. Dadurch wird

$$C=\frac{B^2+n}{A}, \quad F=\frac{(BD-AE)^2+nD^2-m^2}{An};$$

also

$$D^2-AF=\frac{m^2-(BD-AE)^2}{n}.$$

Setzen wir überdies noch der Kürze wegen $BD-AE=c$; so haben wir statt der Gleichungen (17), (22) und (23) folgende:

$$nA^2Y^2+2ABnXY+n(B^2+n)X^2+2nADY+2n(BD-c)X + c^2+nD^2-m^2=0 \ldots, (26)$$

$$A^2v^2n-n^2t^2-2cnt+m^2-c^2=0 \ldots\ldots (27)$$

$$z'^2+y'^2-2\frac{\{c(nt+c)-m^2\}}{A^2nv}z'+2\frac{D}{A}y'+\frac{c^2+nD^2-m^2}{A^2n}=0 \ldots (28)$$

Sind α', β' die Mittelpunktscoordinaten, und r' der Radius des durch die Gleichung (28) dargestellten Kreises, so ist bekanntlich, wenn die Gleichung (27) benutzt wird:

$$\left.\alpha'=-\frac{D}{A}, \ \beta'=\frac{c(nt+c)-m^2}{A^2nv}; \ r'=\frac{tm}{A^2v}\right\} \ldots\ldots (29)$$

Endlich finden wir, mit Berücksichtigung der Gleichung (9), für die Mittelpunktscoordinaten α, β und den Radius r des Kreises (10) folgende Werthe:

$$\left.\alpha=g, \ \beta=\frac{b^2}{a^2v}\{f^2-a^2-ft\}; \ r=\frac{b^2t}{av}\right\} \ldots\ldots (30)$$

§. 6.

Um unsere späteren Folgerungen gehörig begründen zu können, wollen wir auf analytischem Wege erweisen „dass, wenn von irgend „einem Punkte k eine Tangente an die Curve (26) des vorigen „Paragraphen gezogen wird, die perspectivische Projection dieser „Tangente, ebenfalls eine durch die perspectivische Projection k_p des „Punktes k gehende Berührende an den Kreis (28) ist, und „zwar muss diese letztere diesen Kreis in demjenigen Punkte be„rühren, welcher die perspectivische Projection des Berührungs„punktes der erstern Tangente und der Ellipse (26) ist.

Wir nehmen X'', Y'' für die Coordinaten des Punktes k, und X', Y' für die Coordinaten des Berührungspunktes der durch k an die Ellipse (26) gezogenen Tangente an; ferner seien y''', z''' die perspectivischen Coordinaten des Punktes k_p, und y'', z'' jene des Berührungspunktes der durch k_p an den Kreis (28) gezogenen Tangente; so haben wir für die Gleichung der ersteren Tangente:

$$\left.\begin{array}{l} nA(AY'+BX'+D)Y''+n(ABY'+(B^2+n)X'+BD-c)X'' \\ +nADY'+n(BD-c)X'+c^2+nD^2-m^2=0 \end{array}\right\} \quad (31)$$

und für jene der letztern Tangente:

$$z''z'''+y''y'''-\left\{\frac{c(nt+c)-m^2}{A^2vn}\right\}(z''+z''')+\frac{D}{A}(y''+y''')+\frac{F}{A}=0 \quad (32)$$

Es wird unsere im Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Behauptung erwiesen sein, wenn wir in der Gleichung (31) die Werthe von X', Y'; X'', Y'' durch die entsprechenden perspectivischen Coordinaten y'', z'' und y''', z''' ausgedrückt, substituiren, und wenn wir alsdann eine resultirende Gleichung erhalten, die mit der in (32) identisch ist.

Nach §. 4. ist aber

$$X'=\frac{tz''}{v-z''},\ X''=\frac{tz'''}{v-z'''};\quad Y'=\frac{vy''-uz''}{v-z''},\quad Y''=\frac{vy'''-uz'''}{v-z'''};$$

oder, weil wegen der Gleichung 21) §. 4. $u=\frac{Bt-D}{A}$; und aus 28) §. 5. $t=\frac{-c\pm\sqrt{m^2+A^2v^2n}}{n}$; so ist:

$$X'=\frac{[-c\pm\sqrt{m^2+A^2v^2n}]z''}{n(v-z'')},\quad X''=\frac{[-c\pm\sqrt{m^2+A^2v^2n}]z'''}{n(v-z''')};$$

$$Y' = \frac{nAvy'' - [B(-c \pm \sqrt{m^2 + A^2v^2n}) - nD]z''}{An(v - z'')},$$

$$Y'' = \frac{nAvy''' - [B(-c \pm \sqrt{m^2 + A^2v^2n}) - nD]z'''}{An(v - z''')}$$

Durch die Substitution dieser Coordinatenwerthe in der Gleichung (31) erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\{Anvy''' - [B(-c \pm \sqrt{m^2 + A^2v^2n}) - nD]z'''\}(Avy'' + Dv)}{(v - z'')(v - z''')} \\ &+ \frac{\{ABvy'' + z''\sqrt{m^2 + A^2v^2n} + (BD - c)v\}(-c + \sqrt{m^2 + A^2v^2n})z'''}{(v - z'')(v - z''')} \\ &+ \frac{\{ADnvy'' + (-c\sqrt{m^2 + A^2v^2n} + m^2)z'' + cv^2 + nD^2v - m^2v\}(v - z''')}{(v - z'')(v - z''')} \end{aligned}\right\} = 0$$

Reduciren wir diese Gleichung gehörig, und bemerken, dass wegen Gleichung (28)

$$v^2(c^2 + nD^2 - m^2) = v^2FAn$$

und

$$-c\sqrt{m^2 + A^2v^2n} + m^2 = -\{c(nt + c) - m^2\}$$

ist, so wird dieselbe mit der Gleichung (32) identisch. Ganz auf gleiche Art würden wir eine mit der Gleichung (31) identische Gleichung erhalten haben, wenn wir in der Gleichung (32) statt y'', z''; y''', z''' respective die Werthe:

$$\frac{AtY' + (Bt - D)X'}{A(t + X')}, \frac{vX'}{t + X'}; \frac{AtY'' + (Bt - D)X''}{A(t + X'')}, \frac{vX''}{t + X''}$$

substituirt hätten, wodurch also die vorausgeschickte Bemerkung dieses Paragraphen nicht nur gerechtfertigt ist, sondern wir sind dadurch auch berechtigt zu folgern, dass eine Gerade L_p, welche die beiden Kreise, welche durch die Gleichungen (10) §. 1. und (28) §. 5. dargestellt wird, gemeinschaftlich berührt, die Perspective einer gemeinschaftlichen Tangente L an die durch die Gleichungen (1) §. 1. und (2) §. 5. dargestellten Ellipsen ist.

§. 7.

Um zu untersuchen, ob und in welchen Fällen es möglich ist, eine gemeinschaftliche Tangente an die Ellipsen (1) §. 1. und (28) §. 5. zu ziehen, müssen wir zuvor untersuchen, ob es wirklich einen reellen Punkt gibt, in welchem sich das Auge befinden kann, damit die Perspectiven der Ellipsen (1) §. 1. und (28) §. 5.

Digitized by Google

beide zugleich Kreise werden. Dieses wird aber nur dann der Fall sein, wenn es reelle Durchschnittspunkte der Ortscurven, welche durch die Gleichungen (9) §. 1. und (27) §. 5. dargestellt sind, gibt. Diese Curven liegen in den durch die Gleichungen

$$g-u=0 \text{ und } Au-Bt+D=0$$

dargestellten Ebenen; die Gleichungen der Durchschnittslinie dieser Ebenen sind:

$$u=g \text{ und } u=\frac{B}{A}t-\frac{D}{A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

Diese Linie ist also, wie sich schon aus der Lage der genannten Ebenen schliessen lässt, auf der Ebene xy senkrecht. Aus den Gleichungen (33) folgt:

$$g=\frac{Bt}{A}-\frac{D}{A}, \text{ also } t=\frac{A}{B}g+\frac{D}{B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

Führen wir diesen Werth von t in (9) §. 1. ein, so erhalten wir:

$$v=\pm\frac{b}{aB}\sqrt{[[Bf-Ag-D]^2-a^2B^2]}$$

oder

$$v=\pm\frac{b}{aB}\sqrt{[B(f+a)-Ag-D][B(f-a)-Ag-D]} \quad \ldots \quad (35).$$

Soll daher die Auflösung der Aufgabe möglich sein, so muss entweder

$$\left.\begin{aligned} B(f+a) &> Ag+D \\ \text{und zugleich } B(f-a) &> Ag+D \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} B(f+a) &< Ag+D \\ \text{und zugleich } B(f-a) &< Ag+D \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

sein. Wir erhalten aber noch eine andere Beziehungsgleichung, welche die Bedingung der Lösbarkeit der Aufgabe angibt. Nämlich wenn wir die soeben gefundenen Werthe von t und v in der Gleichung (27) §. 5. substituiren, so erhalten wir die Bedingungsgleichung:

$$nA^2b^2[Bf-Ag-D]^2-nA^2B^2a^2b^2-n^2a^2(Ag+D)^2-2a^2cnB(Ag+D) + a^2m^2B^2-a^2c^2B^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

Digitized by Google

§. 8.

Es handelt sich nach dem, was wir im §. 6. und §. 7. gezeigt haben, nur noch darum, die Coordinaten derjenigen zwei Punkte A_p und J_p zu bestimmen, aus welchen äussere und innere Tangenten an die Kreise (10) §. 1. und (28) §. 5. gezogen werden können, und alsdann mittelst dieser Coordinatenwerthe diejenigen von den Punkten in der Ebene der xy oder in der Ebene der beiden Ellipsen (1) §. 1. und (26) §. 5. zu bestimmen, von welchen A_p und J_p die perspectivischen Projectionen sind. Die ersteren sind aber offenbar der directe und der inverse Aehnlichkeitspunkt der obengenannten Kreise. Bezeichnen wir mit y'_1, z'_1 die Coordinaten des Aehnlichkeitspunktes A_p oder J_p der Kreise in (10) und (26), so sind diese bekanntlich:

$$y'_1=\frac{r\alpha'\mp r'\alpha}{r\mp r'},\quad z'_1=\frac{r\beta'\mp r'\beta}{r\mp r'}\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots (36).$$

Führen wir zuvor in den Gleichungen (29) und (30) §. 5. die Werthe von t und v aus (34) und (35) §. 7. ein, und substituiren die so bestimmten Ausdrücke von α, β, r, α', β' und r' in diesen Werthen von y'_1 und z'_1, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} y'_1&=\frac{-ADb^2\mp mag}{A^2b^2\mp am},\\ z'_1&=\frac{bn(Ag+D)[ac\mp fm]+Bb[a(c^2-m^2)\mp nm(f^2-a^2)]}{n(A^2b^2\mp am)\sqrt{[Bf-Ag-D]^2-a^2B^2}}\end{aligned}\right\} (40).$$

Sind endlich X_1 und Y_1 die Coordinaten des dem Punkte A_p oder J_p entsprechenden Punktes A oder J in der Ebene der xy, so haben wir zu deren Bestimmung nach §. 4. die Formeln

$$X_1=\frac{tz'_1}{v-z'_1},\quad Y_1=\frac{vy'_1-uz'_1}{v-z'_1}.$$

Setzen wir in diesen Ausdrücken $u=g$ (Siehe §. 1. (6),

$$t=\frac{Ag+D}{B},\quad v=\frac{b}{aB}\sqrt{[Bf-Ag-D]^2-a^2B^2};$$

und statt y'_1 und z'_1 die in (40) angegebenen Werthe, so haben wir:

---

*) Die obern Zeichen gelten für den directen, die untern für den inversen Aehnlichkeitspunkt.

Digitized by Google

$$X_1 = \frac{a(Ag+D)\left[n(Ag+D)(ac \mp fm) + B\{a(c^2-m^2) - nm(f^2-a^2)\}\right]}{n\left[A^2B^2b^2(f^2-a^2) + (A^2b^2 \mp am)(Ag+D)^2 - B(Ag+D)\{2f(A^2b^2 \mp am) + a^2c\}\right] - a^2B^2(c^2-m^2)},$$

$$Y_1 = \frac{(-ADb^2 \mp amg)\,n\{[Bf-(Ag+D)]^2 - a^2B^2\} - ag\left[n(Ag+D)(ac \mp fm) + B\{a(c^2-m^2) \mp nm(f^2-a^2)\}\right]}{A^2B^2b^2(f^2-a^2)\,n + (A^2b^2 \mp am)(Ag+D)^2\,n - Bn(Ag+D)\{2f(A^2b^2 \mp am) + a^2c\} - a^2(c^2-m^2)\,B^2}. \quad (41).$$

147

Benutzt man die Gleichung (38), so erhält man:

$$X_1 = \frac{n(Ag+D)(ac \mp fm) + B\{a(c^2-m^2) - nm(f^2-a^2)\}}{n\{(Ag+D)(an \mp m) + B(ac \mp fm)\}},$$

$$Y_1 = \frac{(-ADb^2 \mp mag)\,n\{[Bf-(Ag+D)]^2 - a^2B^2\} - Bag\left[n(Ag+D)(ac \mp fm) + B\{a(c^2-m^2) \mp nm(f^2-a^2)\}\right]}{na(Ag+D)\{(Ag+D)(an \mp m) + B(ac \mp fm)\}} \quad (42).$$

Zieht man nun von dem durch diese Coordinaten X_1 und Y_1 bestimmten Punkte eine Tangente an eine der durch die Gleichung (1) §. 1. oder (26) §. 5. dargestellten Ellipsen, so muss diese auch, nach dem was in §. 6. bewiesen worden ist, die andere Ellipse berühren, wie es verlangt wurde.

§. 9.

Nehmen wir jetzt an, die Gleichung (17) §. 4. stelle eine Parabel dar, so muss bekanntlich

$$B^2-AC=0 \text{ und } BD-AE\gtrless 0$$

sein; es sei nun

$$BD-AE=-m \text{ und } B^2-AC=0,$$

wo m eine lineare Grösse ist, so geht der Gleichung (22) §. 4. in folgende über:

$$A^2v^2+2mt+D^2-AF=0.$$

oder da D^2-AF jede reelle Grösse von zwei Dimensionen bedeuten kann, so nehmen wir $D^2-AF=k^2$ an; dadurch wird die letzte Gleichung zu:

$$A^2v^2+2mt+k^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43).$$

Die Gleichung (17) hingegen geht bei diesen Annahmen in folgende über:

$$A^2Y^2+2ABXY+B^2X^2+2ADY+2(BD+m)X+D^2-k^2=0 \quad (44).$$

Statt der Gleichung (33) erhalten wir:

$$x'^2+y'^2+2\frac{mt+k^2}{A^2v}x'+\frac{D}{A}y'+\frac{D^2-k^2}{A^2}=0 \quad \ldots \quad (45)$$

Diese Gleichung drückt denjenigen Kreis aus, welcher die Perspective der Parabel in (44) ist:

Werden wieder die Mittelpunktscoordinaten des in (16) §. 3. dargestellten Kreises mit α, β und dessen Radius mit r bezeichnet, so wie jene des Kreises in (45) mit α', β' und dessen Radius mit r', so ist:

$$\alpha=g,\ \beta=-\frac{p(2f-t)}{2v},\ r=\frac{t\sqrt{p}}{2\sqrt{t-f}} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

Digitized by Google

$$\alpha' = -\frac{D}{A},\ \beta' = -\frac{mt+k^2}{A^2v},\ r' = \frac{mt}{A^2v}\Big\} \quad \ldots\ (47)$$

Da aber die Parabel in (15) §. 3., welche der geometrische Ort des Auges ist, damit die gegebene Parabel in (14) sich als Kreis projicirt, in einer auf die Basis senkrechten Ebene liegt, deren Gleichung $g-u=0$ ist, als auch die Ortscurve (43) sich in der durch die Gleichung

$$Au-Bt+D=0$$

ausgedrückten Ebene befindet, so muss sich das Auge, damit die beiden in (14) und in (44) gegebenen Parabeln sich zugleich als Kreise projiciren, sowohl in der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen, als auch in den Durchschnittspunkten der Curven (15) §. 3. und (43) befinden; diese Durchschnittspunkte (wenn solche möglich sind) können aber nur auf der Durchschnittslinie der durch die Gleichungen

$$g-u=0 \text{ und } Au-Bt+D=0$$

dargestellten Ebenen liegen. Eliminiren wir daher aus diesen Gleichungen die Grösse u, so erhalten wir wieder $t=\frac{Ag+D}{B}$; führen wir diesen Werth von t in der Gleichung (15) §. 2. ein, so kommt:

$$v^2 = p\,\frac{Ag+D-Bf}{B} \quad \ldots\ (48)$$

Dieser Werth von v^2, und jener von t in (43) eingeführt, gibt die Beziehungsgleichung an, welche zwischen den Coefficienten, A, B, D, p u. s. w. statt finden muss, damit die Aufgabe möglich wird; diese ist:

$$(Ag+D)(A^2p+2m)-B(A^2fp-k^2)=0 \quad \ldots\ (49).$$

§. 10.

Durch die Einführung der im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe von t und v in den Gleichungen (46) und (47) erhalten wir:

$$\alpha=g,\ \beta=\frac{[(Ag+D)-2Bf]\sqrt{p}}{2\sqrt{B[(Ag+D)-Bf]}};\ r=\frac{(Ag+D)\sqrt{p}}{2\sqrt{B[(Ag+D)-Bf]}}\Big\} \quad (50)$$

Digitized by Google

$$\alpha' = -\frac{D}{A},\ \beta' = -\frac{(m(Ag+D)+Bk^2)}{A^2\sqrt{pB}(Ag+D)-Bf)};$$

$$r' = \frac{m(Ag+D)}{A^2\sqrt{pB}(Ag+D)-Bf)}\Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots (51)$$

Bezeichnen wir wieder wie in §. 8. die Coordinaten des Aehnlichkeitspunktes A_p oder J_p der Kreise (16) §. 3. und (45) §. 9. mit y'_1 und z'_1, so erhalten wir durch die Einführung dieser Werthe von α, β, r, α', β' und r' in den Gleichungen (39) §. 8:

$$y'_1 = \frac{-DAp \mp 2mg}{A^2p \mp 2m},$$

$$z'_1 = \frac{[-(mAg+D)+Bk^2) \mp m(Ag+D)-2Bf)]\sqrt{p}}{(A^2p \mp 2m)\sqrt{B(Ag+D)-Bf)}}\Bigg\} \quad \ldots (52).$$

Die oberen Zeichen gelten für den directen, die unteren für den inversen Aehnlichkeitspunkt.

Führen wir die Werthe von t, u, v, z'_1, y'_1 in die Formeln

$$X_1 = \frac{tz'_1}{v-z'_1},\quad Y_1 = \frac{vy'_1-uz'_1}{v-z'_1}$$

ein, so erhalten wir für das obere Zeichen in jenen Werthen:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{(Ag+D)(B(2fm-k^2)-2m(Ag+D))}{B(2m(Ag+D)+Bf(A^2p-2m))} \\ Y_1 &= \frac{-ADp(Ag+D)-Bf)+Bgk^2}{A^2p(Ag+D)-Bf)+Bk^2}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots (53)$$

oder, wenn wir die Gleichung (49) benutzen, so wird:

$$Y_1 = \frac{+ADp(Ag+D)-Bf)-Bgk^2}{2m(Ag+D)} \quad \ldots\ldots (54).$$

Für die unteren Zeichen in (52) erhalten wir:

$$X_1 = \frac{-(Ag+D)(2fm+k^2)}{Bf(A^2p+2m)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

$$Y_1 = \frac{-ADp(Ag+D)-Bf)+2mg(Ag+D)+gBk^2}{A^2p(Ag+D)-Bf)+2m(Ag+D)+Bk^2} \quad (56).$$

Digitized by Google

Benutzen wir in diesem letzten Werthe von Y_1 die Gleichung (49), so wird der Nenner zu Null, woraus hervorgeht, dass man die unteren Zeichen nicht nehmen darf, d. h. dass es bei zwei Parabeln nicht zwei Aehnlichkeitspunkte gibt; die Werthe in (55) und (56) sind also unbrauchbar.

Wird aus demjenigen Punkte, dessen Coordinatenwerthe in (43) und (45) dargestellt sind, eine Tangente an eine durch die Gleichungen (14) §. 3. oder (44) §. 9. dargestellten Parabeln gezogen, so muss diese, nach dem, was in §. 6. erwiesen wurde, auch die andere berühren.

Führen wir die Untersuchung ganz auf gleiche Art, wie dies in den früheren Paragraphen bei zwei Ellipsen geschehen ist, bei zwei Hyperbeln, so werden wir, ebenso wie dort, bestimmte Werthe für die Coordinaten eines Punktes erhalten, welcher die Eigenschaft besitzt, dass, wenn man aus ihm eine Tangente an eine der gegebenen Hyperbeln zieht, jene Tangente auch die andere Hyperbel berührt.

Aus dem in §. 6. Erwiesenen lässt sich unmittelbar folgender Satz herleiten. „Wenn man drei Ellipsen von beliebigen „Parametern, und in beliebiger Lage (jedoch in einer Ebene) hat, „und man zieht an je zwei derselben die äussern und die innern „Tangenten, so liegen die drei Durchschnittspunkte der äussern „Tangenten, so wie je zwei innere, mit den nicht zugehörigen „äussern in gerader Linie.“ Sind nämlich, M_1, M_2, M_3 die drei gegebenen Ellipsen, A_1 der Durchschnittspunkt der äussern Tangenten an die Ellipsen M_2 und M_3;

A_2	jener	der äussern	Tangenten	an die Ellipsen	M_1 und M_3
A_3	-	-	-	-	M_1 - M_2
J_1	-	- innern	-	-	M_2 - M_3
J_2	-	-	-	-	M_1 - M_3
J_3	-	-	-	-	M_1 - M_2

so liegen

A_1, A_2, A_3
A_1, J_2, J_3
A_2, J_1, J_3
A_3, J_1, J_2

in gerader Linie.

Denn projicirt man die Ellipsen als drei Kreise Mp_1, Mp_2, Mp_3; und zieht an je zwei die äussern und innern Tangenten, und bezeichnet die Durchschnittspunkte der äussern Tangenten an die

Digitized by Google

Kreise MP_1 und MP_2; MP_1 und MP_3; MP_2 und MP_3 respective mit AP_3, AP_2 und AP_1; ebenso die Durchschnittspunkte der innern Tangenten an die Kreise MP_1 und MP_2; MP_1 und MP_3; MP_2 und MP_3 respective mit JP_3, JP_2 und JP_1. so hat Monge bewiesen, dass die Punkte

$$AP_1,\ AP_2,\ AP_3;\ AP_1,\ JP_2,\ JP_3;\ AP_2,\ JP_1,\ JP_3;\ AP_3,\ JP_1,\ JP_2$$

in gerader Linie liegen. Projicirt man die sechs Punkte

$$AP_1,\ AP_2,\ AP_3,\ JP_1,\ JP_2,\ JP_3$$

wieder in die geometrische Bildfläche nach

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ J_1,\ J_2,\ J_3$$

zurück, so werden auch nach §. 6. diese die Eigenschaft besitzen, dass jede aus ihnen gezogene Tangente an eine der Ellipsen M_1, M_2, M_3 noch eine zweite derselben berührt; ferner werden auch, ebenfalls nach dem vorher Erwiesenen, die Punkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ J_1,\ J_2,\ J_3$$

auf den entsprechenden Linien liegen, auf welchen sich ihre perspectivischen Projectionen befinden, also

$$(A_1\ A_2\ A_3),\ (A_1\ J_2\ J_3),\ (A_2\ J_1\ J_3),\ (A_3\ J_1\ J_2)$$

vier gerade Linien bilden.

XIV.

Die astronomische Wärme- u. Licht-Vertheilung auf der Erdoberfläche.

Von dem

Lehrer Herrn Brenner

zu Tuttlingen.

Die freie Wärme, welche, nebst dem Lichte, hauptsächlich die Existenz der organischen Körperwelt bedingt, wird der Erdoberfläche aus zwei Hauptquellen zugeführt. Die eine ist der Wärmevorrath, den die Erde in ihrem Innern birgt, die andere die Sonne. Da wir nun von der Wärmemenge des Erdkerns, so wie von der Wärmeströmung gegen die Oberfläche noch keine genaue Kenntniss haben, übrigens aber von einzelnen Gegenden (Island, Grönland) wissen, dass sie aus der Erde eine weit grössere Quantität Wärme beziehen, als andere Gegenden, so lässt sich über den Ausfluss dieser Wärmequelle wohl keine allgemeine Regel angeben. Weit mehr Hoffnung scheint vorhanden zu sein zur Bestimmung der von der Erde ausfliessenden Wärmemenge für jede besondere Gegend, besonders wenn man sie mit der von der Sonne gespendeten (Wärmemenge) zu vergleichen sucht. Die letztere aber, die Sonne, verbreitet ihre Wärme auf solche Weise, dass sich die Verhältnisse der Wärmemengen für verschiedene Gegenden genau bestimmen lassen, — Verhältnisse, denen auch die Lichtverbreitung derselben unterworfen ist. In Beziehung auf die Wärme ist zwar bekannt, dass sie durch die Sonne aus den Körpern nur entwickelt (frei) wird; dessen ungeachtet können wir uns, für unsern Zweck, vorstellen, sie sei wirklich ein Ausfluss von der Sonne.

Die von der Sonne herrührende Wärme- und Lichtvertheilung auf der Erdoberfläche nennen wir die astronomische, und die

Wärme- und Lichtverhältnisse, oder auch die Wärme- und Lichtmengen für verschiedene Gegenden zu bestimmen, sei der Gegenstand unserer Beschäftigung.

Es ist bekannt, dass sich die auf gleiche ebene Flächen geworfenen Wärme- und Lichtmengen verhalten wie die Sinus der Neigungswinkel der auffallenden Strahlen. Es werde nun die in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit senkrecht geworfene Wärme- oder Lichtmenge zur Einheit angenommen, so ist dieselbe bei einer Neigung N der Sonnenstrahlen gegen den Horizont

$$=\sin N.$$

Diese Neigung der Sonnenstrahlen ist aber nichts anders, als die Höhe der Sonne. Es sei daher (Taf. III. Fig. 2.) HR der Horizont des Ortes, Z dessen Zenith, AQ der Aequator, P der Nordpol, DE der an einem beliebigen Tage von der Sonne beschriebene Parallelkreis, L der Standpunkt derselben zu einer beliebigen Nachmittagsstunde. Ziehe ich durch L den Vertikalkreis ZU, so wie den Meridian PT, so ist im sphärischen Dreieck ZPL

$$\cos ZL=\cos ZP.\cos PL+\sin ZP.\sin PL.\cos ZPL.$$

Setze ich die Breite des Ortes $=\beta$, die statthabende Declination der Sonne $=\delta$, den Stundenwinkel $=S$, so wie die Höhe der Sonne $=H$, so ist, wenn durch π das bekannte Kreisverhältniss 3,14159.... bezeichnet wird,

$$ZL=\frac{\pi}{2}-H;\ ZP=\frac{\pi}{2}-\beta;\ PL=\frac{\pi}{2}-\delta \text{ und } ZPL=S;$$

folglich

$$1)\qquad \sin H=\sin\delta\sin\beta+\cos\delta\cos\beta\cos S.$$

Bezeichnet man die Zeit mit t, so ist der Zeitmoment dt, und die in einem Augenblick von der Flächeneinheit in Empfang genommene Wärme- oder Lichtmenge

$$=dt.\sin H;$$

folglich hat man, wenn man die Wärme- oder Lichtmenge eines Tages mit M bezeichnet,

$$M=\int dt(\sin\delta\sin\beta+\cos\delta\cos\beta\cos S),$$

wofern dieses Integral zwischen den gehörigen Grenzen genommen wird.

Zur Zeiteinheit nehmen wir die bürgerliche Stunde, und dann ist

$$S:t=2\pi:24,$$

folglich

$$t=\frac{12S}{\pi} \text{ und } dt=\frac{12dS}{\pi}.$$

Diess gibt

$$L=\frac{12}{\pi}\int dS(\sin\delta\sin\beta+\cos\delta\cos\beta\cos S).$$

Zwar ist auch die Declination δ eine Function von t, und folglich auch von S; allein sie variirt in einem Tage so wenig, dass das tägliche Wachsthum derselben auf das Integral keinen merklichen Einfluss ausübt. Nehmen wir jedoch für den Tag, dessen Wärme- und Lichtmenge bestimmt werden soll, die Mittags 12 Uhr stattfindende Declination als constant an, so wird man für den einen halben Tag etwas zu viel, für den andern etwas zu wenig Wärme- oder Lichtmenge haben, so, dass beide Fehler sich beinahe neutralisiren werden. — Somit bekommen wir

$$2) \qquad M=\frac{12}{\pi}(\sin\delta\sin\beta.S+\cos\delta\cos\beta\sin S)+C,$$

wo C die eingegangene Constante ist.

Fassen wir zuerst nur den halben Tag ins Auge, so ist für die eine Grenze dieses Integrals $S=0$, und die andere ergibt sich aus 1), wenn man $H=0$ setzt. Sie ist

$$\cos S=-\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\beta \text{ oder } S=\frac{1}{\cos}(-\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\beta).$$

Nehmen wir dasselbe zwischen diesen Grenzen, verdoppeln es hierauf, setzen $\frac{\pi M}{24}=u$ und behalten S als Hilfsgrösse bei, so haben wir

$$3) \qquad u=\sin\delta\sin\beta.S+\cos\delta\cos\beta\sin S.$$

In Betreff derjenigen Gegenden aber, wo die Sonne gar nicht mehr untergeht, hat man das Integral 2) für einen ganzen Tag, oder vielmehr für die zwischen zwei aufeinanderfolgende tiefste Standpunkte der Sonne fallende Zeit von 24 Stunden, d. i. zwischen den Grenzen $S=0$ und $S=\pi$ zu nehmen und hernach zu verdoppeln. Diess gibt

$$4) \qquad M=24\sin\delta\sin\beta.$$

Man kann nun die Frage aufwerfen: In welcher Breite findet, bei gegebener Declination der Sonne, ein Maximum oder Minimum der in einem Tage gelieferten Wärme- und Lichtmenge statt? Zu diesem Zweck setzen wir die in Beziehung auf β genommenen

Digitized by Google

Differentiale von 3) und 4) gleich Null und entwickeln β. 3) gibt zuerst

$$du_\beta = \sin\delta\cos\beta . S + \sin\delta\sin\beta dS_\beta - \cos\delta\sin\beta\sin S + \cos\delta\cos\beta\cos S dS_\beta .$$

Substituiren wir für $\cos S$ dessen Werth, so heben sich auf der rechten Seite dieser Gleichung das zweite und vierte Glied gegenseitig auf, und es ist alsdann

$$du_\beta = \sin\delta\cos\beta . S - \cos\delta\sin\beta\sin S .$$

Setzen wir nun $du_\beta = 0$, so kommt, wenn wir $\mathrm{tg}\delta = a$ setzen, nachdem die entstandene Gleichung zuvor mit der Gleichung

$$\mathrm{tg}\delta\,\mathrm{tg}\beta = -\cos S$$

multiplicirt worden ist,

$$5) \qquad 2Sa^2 + \sin 2S = 0.$$

Eliminirt man aus 3) und 5) S, so ergibt sich das M. M. selbst

$$u = \frac{\cos\delta}{\cos\beta}\sin S .$$

Ist d^2u_β negativ, so findet ein Maximum, und positiv, ein Minimum statt. Es ist aber

$$d^2u_\beta = -u + dS_\beta(\sin\delta\cos\beta - \cos\delta\sin\beta\cos S)$$

oder, indem sich

$$dS_\beta = \frac{\mathrm{tg}\,\delta}{\sin S . \cos\beta}$$

findet, durch Substitution dieses Werthes, so wie desjenigen von u:

$$d^2u_\beta = \frac{\sin\delta^2 - \cos\delta^2\sin S^2\cos\beta^2}{\cos\delta\sin S\cos\beta^2} .$$

Ist daher der absolute Werth von $\mathrm{tg}\delta \lessgtr \sin S\cos\beta$, so hat man ein

Maximum.
Minimum.

Wenn nun S' ein Werth ist, der die Gleichung 5) beinahe befriedigt, so hat man die Correction

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{2S'a^2 + \sin 2S'}{a^2 + \cos 2S'} .$$

Setzen wir $y = 2Sa^2 + \sin 2S$, so ist

für $S=0$ ..... $y=0$,

„ $S=\frac{\pi}{2}$ ....,... $y=\pi a^2$,

„ $S=\frac{3\pi}{4}$ ..... $y=\frac{3}{2}\pi a^2-1$.

„ $S=\pi$ ....,.. $y=2\pi a^2$.

Im Uebrigen bemerkt man

1) dass für alle Werthe von S zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ jede der Grössen $2Sa^2$ und $\sin 2S$ positiv bleibt, so dass y positiv ist;

2) dass zwischen $S=\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$ die Grösse $2Sa^2$ zwar immer noch stetig wächst, allein $\sin 2S$ von Null an stetig abnimmt, so dass, wenn einmal y negativ geworden ist, dasselbe auch negativ bleibt, bis auf den Werth $S=\frac{3\pi}{4}$. In der That ist auch für den letztern Werth von S .... $y=\frac{3}{2}\pi a^2-1$ negativ, selbst für den grössten Werth, den man a beilegen kann, nemlich für

$$a=\operatorname{tg}23^{0}28'=0{,}434....;$$

3) dass gleicher Weise zwischen $S=\frac{3}{4}\pi$ und π wieder jede jener Grössen wächst, und dass demnach auch y positiv bleibt, wenn es solches einmal geworden ist. Wirklich geht es in diesen Grenzen auch von der Negativität in die Positivität über. Da wir nun dem Stundenwinkel S keinen grössern Werth beilegen dürfen als π, so folgt daraus, dass y ausser $S=0$ noch zweimal durch Null gehen wird, nemlich

für einen Werth von S zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$, so wie

„ „ „ „ „ „ $\frac{3\pi}{4}$ und π.

Sonach bietet die Gleichung 5) drei, aber auch nicht mehr als drei Werthe für S dar.

Die Gleichung 4) aber gibt

$$dM_\beta = 24\sin\delta\cos\beta = 0,$$

also

$$\beta = 90^0 \text{ und } M = 24\sin\delta.$$

$\beta = 90^0$ gibt aber

$$d^2M_\beta = -24\sin\delta,$$

folglich hat man hier ein Maximum und zwar für den Pol.

Man überzeugt sich daher, dass die tägliche Wärme- oder Lichtmenge vier M. M. darbietet.

Für

$$S = 0 \text{ oder } \operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\beta = -1,$$

d. h. für den Fall, wo die Breite β und die Declination δ der Sonne einander entgegengesetzt sind und sich zu einen Rechten ergänzen, ist aber

$$d^2u_\beta = +\infty, \text{ also } u = 0 \text{ ein Minimum.}$$

Hat man hierauf aus der Gleichung

$$2Sa^2 + \sin 2S = 0$$

noch die zwei übrigen Werthe numerisch bestimmt, so wird man vermittelst der Bedingung

$$\operatorname{tg}\delta \lessgtr \sin S.\cos\beta$$

entscheiden, ob man ein Maximum oder Minimum hat. Diese Entscheidung erledigt sich jedoch einfach durch die Bemerkung, dass die Max. und Min. nur abwechslungsweise auf einander folgen können. Da nun der erste, aus der Gleichung

$$2Sa^2 + \sin 2S = 0$$

gezogene Werth, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}$, ein Minimum liefert, so wird der zweite Werth von β ein Maximum und der dritte wieder ein Minimum geben, während vom letzten Werthe für β, nemlich $\beta = 90^0$, bereits bekannt ist, dass er ein Maximum bedingt.

Digitized by Google

Nimmt man z. B. die grösste Declination der Sonne $\delta = 23°28'$, so ergibt sich ausser $S = 0$ auch noch

$$S = 1{,}99691 \ldots \text{ oder } S = 114°25',$$

so wie

$$S = 2{,}51708 \text{ oder } S = 144°13';$$

$\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\delta = -\cos S$ gibt aber

$$\beta = 43°36' \text{ und } \beta = 61°51',$$

und diess gibt ferner

$$u = 1{,}1534 \text{ und } u = 1{,}1369.$$

Man hat daher:

1) ein Minimum ... $u = 0$ oder .... $M = 0$ in der Breite $-66°32'$.

2) ein Maximum ... $u = 1{,}1534$ ... od. $M = 8{,}8112$ .. „ $+43°36'$.

3) ein Minimum ... $u = 1{,}1369$ ... od. $M = 8{,}6851$ ... „ $+61°50'$.

4) ein Maximum . . . . . $M = 9{,}5571$ ... „ $+90°$ od. auf dem Pol.

Von besonderem Interesse ist die Bestimmung der Wärme- und Lichtmenge für einen grössern Theil des Jahres, oder auch für das ganze Jahr. Allein es wäre sehr umständlich, dieselbe für jeden einzelnen Tag zu berechnen, und zuletzt alle zu summiren. Diesen Zweck erreichen wir weit schneller durch die Differenzen-Rechnung.

Es ist hier völlig genügend, uns die Erdbahn kreisförmig und die Sonne im Mittelpunkt befindlich vorzustellen, so dass dieselbe in ihrer Länge täglich um denselben Bogen fortschreitet und alle bürgerlichen Tage einander gleich sind. Diese Annahme können wir um so eher machen, als physikalische oder örtliche Ursachen noch weit bedeutendere Modificationen eintreten lassen.

Die Länge der Sonne bezeichnen wir mit λ und deren tägliches Wachsthum mit h. Unsere Summationen aber können wir in Beziehung auf den Variablen λ und dessen constantes Wachsthum h durchführen, während λ an die Gleichung gebunden ist

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda,$$

wo ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet.

Digitized by Google

Wir sind nun genöthigt, die Formeln 3) und 4) so umzuformen, dass eine Integration in Beziehung auf λ möglich ist. Diess lässt sich in Beziehung auf 3) nur durch eine unendliche Reihe bewerkstelligen.

Setzen wir

$$\frac{u}{\sin\beta} = U \text{ und } \operatorname{tg}\beta = z;$$

so haben wir aus 3)

$$U = \sin\delta \,.\, S + \frac{\cos\delta \,.\, \sin S}{z}.$$

Hiervon ist das Differential in Beziehung auf z

$$dU_z = \sin\delta \,.\, dS_z - \frac{\cos\delta \,.\, \sin S}{z^2} + \frac{\cos\delta \,.\, \cos S \,.\, dS_z}{z}.$$

Eliminiren wir $\cos S$ vermittelst des Werthes $-z\operatorname{tg}\delta$, so ist

$$dU_z = -\frac{\cos\delta \,.\, \sin S}{z^2} = -\frac{1}{z^2}\sqrt{1-\sin\delta^2 \,.\, (1+z^2)}$$

oder

$$dU_z = -\frac{1}{z^2}(1 - c \,.\, \sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}},$$

wenn wir

$$\sin\varepsilon^2(1+z^2) = c$$

setzen.

Nun könnten wir die Wurzelgrösse $(1 - c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln, und hierauf die Potenzen von $\sin\lambda$ in die Sinus und Cosinus von λ und dessen Vielfachen verwandeln. Diesen Zweck können wir jedoch unmittelbar erreichen, und da nur gerade Potenzen von $\sin\lambda$ zum Vorschein kommen, und diese keine Sinus, sondern nur Cosinus erzeugen, so setzen wir

$$(1 - c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}} = a_0 + a_1\cos\lambda + a_2\cos 2\lambda + a_3\cos 3\lambda + \ldots\ldots a_n\cos n\lambda.$$

Nimmt man die Differentiale der Logarithmen beider Seiten in Beziehung auf λ, so kommt

$$\frac{c.\sin 2\lambda}{(2-c)+c.\cos 2\lambda}$$
$$= \frac{a_1\sin\lambda + 2a_2\sin 2\lambda + 3a_3\sin 3\lambda \ldots\ldots + na_n\sin n\lambda}{a_0 + a_1\cos\lambda + a_2\cos 2\lambda + a_3\cos 3\lambda \ldots\ldots + a_n\cos n\lambda}.$$

Da im Allgemeinen ist

$$\sin A.\cos B = \frac{1}{2}\sin(A+B) + \frac{1}{2}\sin(A-B),$$

so hat man, wenn man die Nenner wegschafft, als Coefficient von $\sin n\lambda$:

$$\frac{1}{2}ca_{n-2} - \frac{1}{2}ca_{n+2} - (2-c)na_n - \frac{1}{2}(n-2)ca_{n-2} - \frac{1}{2}(n+c)ca_{n+2}.$$

Setzen wir diesen Coefficienten gleich Null, und ersetzen n durch $n-2$, so entwickelt sich

$$6) \qquad a_n = \frac{5-n}{1+n}a_{n-4} + \frac{2(n-2)}{1+n}\left(1-\frac{2}{c}\right)a_{n-2}.$$

Setzt man

$$(1-c.\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}} = [1 + \frac{c}{4}(e^{\lambda\sqrt{-1}} - e^{-\lambda\sqrt{-1}})^2]^{\frac{1}{2}},$$

so überzeugt man sich, dass bei der binomischen Entwicklung λ in der Potenz $e^{\pm\lambda\sqrt{-1}}$ stets nur in Begleitung eines geraden Coefficienten erscheint, so dass sich die Coefficienten a_n mit ungeradem Stellenzeiger als Null ausweisen. Alle Coefficienten a_n bestimmen sich daher in a_0 und a_2, welche letzteren unmittelbar zu entwickeln sind.

a_0 ist, nebst 1, der Inbegriff aller der Grössen, welche in den Potenzen $(e^{\lambda\sqrt{-1}} - e^{-\lambda\sqrt{-1}})^{2m}$ das mittlere Glied ausmachen; und ebenso ist $\frac{1}{2}a_2$ die Summe aller derjenigen Coefficienten, die jenem mittlern Gliede unmittelbar vorangehen oder auch nachfolgen, d. h. der Coefficienten der Grösse

$$e^{2\lambda\sqrt{-1}} + e^{-2\lambda\sqrt{-1}}.$$

Auf diese Weise findet sich:

$$a_0 = 1 - 2\frac{c}{8} - 4.3.\frac{1.1}{(1.2)^2}\left(\frac{c}{8}\right)^2 - 6.5.4.\frac{1.1.3}{(1.2.3)^2}\cdot\left(\frac{c}{8}\right)^3$$

$$-8.7.6.5.\frac{1.1.3.5}{(1.2.3.4)^2}\cdot\left(\frac{c}{8}\right)^4 .....$$

$$-2m(2m-1)(2m-2)...(m+1).\frac{1.1.3.5....(2m-3)}{(1.2.3....m)^2}\cdot\left(\frac{c}{8}\right)^m ,$$

$$\frac{1}{2}a_2 = \frac{c}{8} + 4.\frac{1.1}{1.2}\left(\frac{c}{8}\right)^2 + \frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{1.1.3}{1.2.3}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{c}{8}\right)^4 ....$$

$$+\frac{2m(2m-1)(2m-2)....(m+2)}{1.2.3....(m-1)}\cdot\frac{1.1.3.5....(2m-3)}{1.2.3...m}\left(\frac{c}{8}\right)^m .$$

Vermehre ich jede dieser Reihen um ein Glied, indem ich das neue Glied aus dem letzten durch Verwandlung des m in $m+1$ gewinne, und dividire hierauf das letzte durch das uneinsletzte, so finde ich für die Verhältnisse zweier aufeinander folgender Glieder:

$$c.\frac{4m^2-1}{4(m+1)^2}$$

und

$$c.\frac{4m^2-1}{4m(m+2)} .$$

Beide Verhältnisse sind kleiner als c, nähern sich aber dieser Grösse desto mehr, je grösser m wird, und gehen nur für $m=\infty$ in c über. Die Convergenz beider Reihen ist daher gesichert, sobald $c<1$, d. h. wenn

$$\sin\varepsilon^2.(1+\mathrm{tg}\beta^2)<1, \text{ oder } \sin\varepsilon < \cos\beta ,$$

mit Worten, wenn die Breite den Polarkreis nicht erreicht.

Um jedoch auf u zurückzukommen, muss dU_z in Beziehung auf z integrirt werden, und es fragt sich, ob obige Reihen auch bei dieser Sachlage noch als brauchbar sich zeigen.

Wir haben daher zu vergleichen

$$\frac{c^m}{z^2} \text{ mit } \int\frac{c^m dz}{z^2} ,$$

oder bei Vernachlässigung des gemeinschaftlichen Coefficienten $\sin\varepsilon^{2m}$:

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} \text{ mit } \int\frac{(1+z^2)^m}{z^2}dz .$$

Es ist aber

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} = \frac{1}{z^2} + m + \frac{m(m+1)}{1.2}.z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^4 + \ldots,$$

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz$$

$$= -\frac{1}{z} + mz + \frac{m(m+1)}{1.2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{z^5}{5} + \ldots$$

z mag positiv oder negativ sein, so ist für alle Werthe von $z \leqq 1$ jedes Glied der obern Reihe grösser, als jedes Glied von derselben Ordnung in der untern Reihe, mit Ausnahme des Falles $z=1$, wo die absoluten Werthe der zwei ersten Glieder einander gleich sind, nemlich $=1$. Es ist daher um so mehr

$$\int \frac{c^m dz}{z^2} < \frac{c^m}{z^2},$$

als das Integral eine Differenz kleinerer Grössen vorstellt, während $\frac{c^m}{z^2}$ eine Summe grösserer Glieder ist.

Für z positiv und >1 ist $\int \frac{(1+z^2)\,dz}{z^2}$ stets positiv, und

für z negativ und >1, „ „ „ negativ,

mit dem einzigen Ausnahmefall $m=0$. Es ist aber

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} \mp \int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + m(1-z) + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2\left(1-\frac{z}{3}\right)$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^4\left(1-\frac{z}{5}\right) + \ldots$$

wo das negative Zeichen für das positive z und das positive für das negative z gilt.

z mag so gross sein, als es will, kann man doch stets m einen Werth beilegen, der diese Differenz (Summe) positiv macht, so dass jedenfalls in der Entwicklung von U die später folgenden Glieder bewirken, dass

$$\int \frac{c^m dz}{z^2} < \frac{c^m}{z^2}$$

wird.

Um diesen Umstand herbeizuführen, hat man nicht einmal nöthig, auf einen hohen Werth von m anzusteigen, denn wir haben uns bereits überzeugt, dass Convergenz nur dann erreicht wird, wenn

$$\cos\beta > \sin\varepsilon,$$

welches gleich ist mit

$$z < \operatorname{cotg}\varepsilon.$$

Nun ist

$$\operatorname{cotg}\varepsilon = 2,3035.....$$

und da z nicht einmal diese Grösse erreichen darf, so zeigt sich in obiger Reihe für

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} \mp \int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}$$

höchstens das dritte Glied als negativ, so dass schon der Werth $m=3$ diese Differenz positiv macht.

Die Reihe für U oder u zeigt sich daher noch brauchbarer als die für dU_z.

In Beziehung auf die Anwendung der Formel 6) zur Bestimmung des Coefficienten a_4 ist zu bemerken, dass das erste Glied in der Entwicklung von $(1-c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ den übrigen conform sein muss, d. h. es muss die Form haben $\nu\cos o\lambda$ oder $\nu\cos o$. Soll aber die Grösse $e^{n\sqrt{-1}} + e^{-n\sqrt{-1}}$ einen Cosinus darstellen, so muss ihm ein Zweier als Nenner untersetzt werden, woraus folgt, dass der Coefficient a_n stets der gedoppelte Coefficient von

$$e^{n\lambda\sqrt{-1}} + e^{-n\lambda\sqrt{-1}}$$

in der Entwicklung für

$$\left[1 + \frac{c}{4}(e^{n\lambda\sqrt{-1}} + e^{-n\lambda\sqrt{-1}})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ist.

Die Grenze des Verlustes, bei beliebiger Abbrechung unserer Reihe

$$\text{a)} \qquad a_0 + a_2\cos 2\lambda + a_4\cos 4\lambda .... + a_{2n}\cos 2n\lambda$$

Digitized by Google

lässt sich am Einfachsten dadurch bestimmen, dass wir das Binomium $(1-c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ unmittelbar entwickeln, wodurch wir erhalten

$$b) \quad 1-\frac{1}{2}c\sin\lambda^2-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1.1}{1.2}c^2\sin\lambda^4-\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.1.3}{1.2.3}c^3\sin\lambda^6\ldots.$$

$$\ldots.-\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1.1.3.5\ldots(2m-3)}{1.2.3\ldots.m}c^m\sin\lambda^{2m}.$$

Die Reihe a) geht aus der Reihe b) hervor, wenn die verschiedenen Potenzen von $\sin\lambda$ in Sinus von λ und dessen Vielfachen verwandelt werden. Es ist auch bekannt, dass der höchste vielfache Bogen in den Verwandlungen von $\sin\lambda^{2m}$ der $2m$fache $(2m\lambda)$ ist, woraus folgt, dass, wenn man in b) mit dem Gliede

$$\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1.1.3.5.\ldots.(2m-3)}{1.2.3\ldots.m}c^m\sin\lambda^{2m}$$

abbricht, in a) keine höhern Potenzen von c erscheinen werden, als c^m, und dass demnach, wenn man $n=m$ macht, und in den Coefficienten

$$a_0,\ a_2,\ a_4\ldots.\ a_{2n}$$

die Potenzen von c nur bis auf c^n ansteigen lässt, in a) auch kein einziges Glied verloren gegangen sein wird, so dass beide Reihen vollständig den gleichen Werth haben werden.

Lässt man nun in b) m um die Einheit wachsen, so erhält man dadurch das $(m+2)$te Glied, und dividirt man diess durch das $(m+1)$ste, so ist das Verhältniss derselben

$$\frac{2m-1}{2m+2}c\sin\lambda^2.$$

Der Coefficient $\frac{2m-1}{2m+2}c$ ist stets kleiner als c und nähert sich bloss der Grösse c, wenn m wächst. Es ist also auch diese Reihe convergent, sobald $c<1$.

Die Summe der geometrischen Progression

$$a+ae+ae^2+\ldots.ae^{n+1}$$

aber ist

$$s = a.\frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Lässt man jedoch die Reihe mit dem Gliede e^m beginnen, so setze man nur $a = e^m$ und dann hat man

$$s = e^m.\frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Ist e ein Bruch, und gleich $\frac{p}{q}$, so gibt diess für $n = \infty$

$$s = \frac{p}{q - p}\left(\frac{p}{q}\right)^{m-1},$$

woraus folgt, dass die Summe der nachfolgenden Glieder gleich ist dem $\frac{p}{q-p}$fachen des vorangegangenen Gliedes. Sind jedoch die Glieder der Progression noch mit fallenden Coefficienten begleitet, wie diess wirklich in b) der Fall ist, wo c für $\frac{p}{q}$ steht, so erreicht die Summe der nachfolgenden Glieder nicht einmal das $\frac{p}{q-p}$fache des vorangegangenen Gliedes.

Hat man sich daher über den Grad der beabsichtigten Schärfe der Rechnung entschieden, so wird man in der Formel b) das Glied bestimmen, mit dem man abzubrechen hat. Ist es das Glied $c^n.\sin\lambda^{2n}$, so wird man auch nur die Coefficienten a bis a_{2n} berechnen, in denselben c bloss bis auf die Potenz c^n steigen lassen und mit dem Gliede $a_{2n}\cos 2n\lambda$ endigen. So wird man endlich haben

$$U = -\int \frac{a_0 + a_2\cos 2\lambda + a_4\cos 4\lambda \ldots\ldots + a_{2n}\cos 2n\lambda}{z^2}\,dz + C,$$

wo C die durch die Integration eingegangene Constante ist, welche im Allgemeinen eine Function von λ sein wird. Um diese Constante zu bestimmen, gehen wir zurück auf die Gleichung

$$dU_z = -\frac{\cos\delta.\sin S}{z^2},$$

deren Integral

Digitized by Google

$$U = -\int \frac{\cos\delta . \sin S}{z^2}\, dz + C$$

ein anderes ist, als das obige. Demnach ist

$$-\int \frac{\cos\delta . \sin S}{z^2}\, dz + C = \sin\delta . S + \frac{\cos\delta . \sin S}{z} .$$

ntegriren wir per partes, so heben sich $\frac{\cos\delta . \sin S}{z}$ gegenseitig
uf, und es ist

$$-\int \frac{dz}{z} \cdot \cos\delta . \cos S dS_z + C = \sin\delta . S .$$

Ersetze ich $\cos S$ durch $-z . \mathrm{tg}\delta$, so ist

$$\int \sin\delta dz dS_z + C = \sin\delta . S$$

oder

$$\sin\delta . S + C = \sin\delta . S,$$

folglich $C = 0$. Somit haben wir

$$7) \quad u = -\sin\beta \int \frac{a_0 + a_2\cos 2\lambda + a_4 \cos 4\lambda .... + a_{2n}\cos 2n\lambda}{z^2}\, dz .$$

Setze ich nun

$$-\sin\beta \int \frac{a_0 dz}{z^2} = A_0,$$

$$-\sin\beta \int \frac{a_2 dz}{z^2} = A_2,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$-\sin\beta \int \frac{a_{2n} dz}{z^2} = A_{2n};$$

so kommt

Digitized by Google

8) $$u = A_0 + A_2\cos 2\lambda \ldots\ldots A_{2n}\cos 2n\lambda.$$

Von den Integralen

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz$$

lässt sich leicht das nachfolgende durch das vorhergehende bestimmen. Man hat nemlich zuerst

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz = \int \frac{(1+z^2)^{m-1}}{z^2}\,dz + \int (1+z^2)^{m-1}\,dz,$$

und hierauf

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz = -\frac{(1+z^2)^m}{z} + 2m\int (1+z^2)^{m-1}\,dz.$$

Eliminire ich nun

$$\int (1+z^2)^{m-1}\,dz,$$

so kommt

$$(2m-1)\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz = \frac{(1+z^2)^m}{z} + 2m\int \frac{(1+z^2)^{m-1}}{z^2}\,dz.$$

Setze ich nun

$$\sin\beta \int \frac{dz}{z^2} = A_0,$$

$$\sin\beta \int \frac{dz\,(1+z^2)}{z^2} = A_1,$$

. . . . . .

$$\sin\beta \int \frac{dz(1+z^2)^r}{z^2} = A_r;$$

so ist

$$A_0 = -\cos\beta,$$

$$A_1 = \sec\beta + 2A_0,$$

$$A_2 = \frac{1}{3}(\sec\beta^3 + 4A_1),$$

Digitized by Google

$$\Lambda_3 = \frac{1}{5}(\sec\beta^5 + 6\Lambda_2),$$

. . . . . .

$$\Lambda_r = \frac{1}{2r-1}(\sec\beta^{2r-1} + 2r\Lambda_{r-1}).$$

Um nun in den Entwicklungen von a_4, a_6, a_8.... die Coefficienten von $\frac{c}{8}$ zu bestimmen, setzen wir

$$a_0 = 1 + \overset{(1)}{\alpha_0}\left(\frac{c}{8}\right) + \alpha_0\left(\frac{c}{8}\right)^2 + \overset{(3)}{\alpha_0}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \overset{(4)}{\alpha_0}\left(\frac{c}{8}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$a_2 = \overset{(1)}{\alpha_2}\left(\frac{c}{8}\right) + \overset{(2)}{\alpha_2}\left(\frac{c}{8}\right)^2 + \overset{(3)}{\alpha_2}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \overset{(4)}{\alpha_2}\left(\frac{c}{8}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$a_4 = \overset{(2)}{\alpha_4}\left(\frac{c}{8}\right)^2 + \overset{(3)}{\alpha_4}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \overset{(4)}{\alpha_4}\left(\frac{c}{8}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$a_6 = \overset{(3)}{\alpha_6}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \overset{(4)}{\alpha_6}\left(\frac{c}{8}\right)^4 + \ldots\ldots$$

. . . . . .

und dann hat man

$$\Lambda_0 = -\Lambda_0 - \overset{(1)}{\alpha_0}\Lambda_1\frac{\sin\varepsilon^2}{8} - \overset{(2)}{\alpha_0}\Lambda_2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2 - \overset{(3)}{\alpha_0}\Lambda_3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3 - \ldots\ldots$$

$$\Lambda_2 = -\overset{(1)}{\alpha_2}\Lambda_1\frac{\sin\varepsilon^2}{8} - \overset{(2)}{\alpha_2}\Lambda_2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2 - \overset{(3)}{\alpha_2}\Lambda_3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3 - \ldots\ldots$$

$$\Lambda_4 = -\overset{(2)}{\alpha_4}\Lambda_2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2 - \overset{(3)}{\alpha_4}\Lambda_3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3 - \overset{(4)}{\alpha_4}\Lambda_4\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^4 - \ldots\ldots$$

. . . . . .

Nun gibt die Formel

Digitized by Google

$$a_n = \frac{5-n}{1+n} a_{n-4} + \frac{2(n-2)}{1+n}\left(1-\frac{2}{c}\right) a_{n-2}$$

nach einander:

$$a_4 = \frac{1}{5}\left(a_0 + 4a_2 - \frac{8}{c} a_2\right),$$

$$a_6 = \frac{1}{7}\left(-a_2 + 8a_4 - 2\cdot\frac{8}{c} a_4\right),$$

$$a_8 = \frac{1}{9}\left(-3a_4 + 12a_6 - 3.\frac{8}{c} a_6\right),$$

$$a_{10} = \frac{1}{11}\left(-5a_6 + 16a_8 - 4.\frac{8}{c} a_8\right),$$

. . . . . .

Macht man nun die gehörigen Substitutionen und vergleicht die Coefficienten derselben Potenzen von $\frac{c}{8}$, so kommt

$$\left.\begin{aligned} \overset{(2)}{\alpha_4} &= \frac{1}{5}\left(\overset{(2)}{\alpha_0} + 4\overset{(2)}{\alpha_2} - \overset{(3)}{\alpha_2}\right) \\ \overset{(3)}{\alpha_4} &= \frac{1}{5}\left(\overset{(3)}{\alpha_0} + \overset{(3)}{\alpha_2} - \overset{(4)}{\alpha_2}\right) \\ \overset{(4)}{\alpha_4} &= \frac{1}{5}\left(\overset{(4)}{\alpha_0} + 4\overset{(4)}{\alpha_2} - \overset{(5)}{\alpha_2}\right) \end{aligned}\right\}$$ wo für alle α_0 deren doppelter Werth zu nehmen ist.

. . . . . .

$$\overset{(3)}{\alpha_6} = \frac{1}{7}\left(-\overset{(3)}{\alpha_2} + 8\overset{(3)}{\alpha_4} - 2\overset{(4)}{\alpha_4}\right)$$

$$\overset{(4)}{\alpha_6} = \frac{1}{7}\left(-\overset{(4)}{\alpha_2} + 8\overset{(4)}{\alpha_4} - 2\overset{(5)}{\alpha_4}\right)$$

$$\overset{(5)}{\alpha_6} = \frac{1}{7}\left(-\overset{(5)}{\alpha_2} + 8\overset{(5)}{\alpha_4} - 2\overset{(6)}{\alpha_4}\right)$$

. . . . . .

$$\overset{(4)}{\alpha_8} = \frac{1}{9}\left(-3\overset{(4)}{\alpha_4} + 12\overset{(4)}{\alpha_6} - 3\overset{(5)}{\alpha_6}\right)$$

$$\alpha_8^{(5)} = \frac{1}{9}(-3\alpha_4^{(5)} + 12\alpha_6^{(5)} - 3\alpha_6^{(6)})$$

. . . . . .

$$\alpha_{10}^{(5)} = \frac{1}{11}(-5\alpha_6^{(5)} + 16\alpha_8^{(5)} - 4\alpha_8^{(6)})$$

. . . . . .

. . . . . .

Berechnen wir nun α numerisch und stellen die ersten Werthe tabellarisch dar, so haben wir

α_0	α_2	α_4	α_6
$\overset{(1)}{\alpha_0} = -2$	$\overset{(1)}{\alpha_2} = 2$		
$\overset{(2)}{\alpha_0} = -3$	$\overset{(2)}{\alpha_2} = 4$	$\overset{(2)}{\alpha_4} = -1$	
$\overset{(3)}{\alpha_0} = -10$	$\overset{(3)}{\alpha_2} = 15$	$\overset{(3)}{\alpha_4} = -6$	$\overset{(3)}{\alpha_6} = 1$
$\overset{(4)}{\alpha_0} = -\frac{175}{4}$	$\overset{(4)}{\alpha_2} = 70$	$\overset{(4)}{\alpha_4} = -35$	$\overset{(4)}{\alpha_6} = 10$
$\overset{(5)}{\alpha_0} = -\frac{441}{2}$	$\overset{(5)}{\alpha_2} = \frac{735}{2}$	$\overset{(5)}{\alpha_4} = -210$	$\overset{(5)}{\alpha_6} = \frac{315}{4}$
$\overset{(6)}{\alpha_0} = -\frac{4851}{4}$	$\overset{(6)}{\alpha_2} = 2079$	$\overset{(6)}{\alpha_4} = -\frac{10395}{8}$	$\overset{(6)}{\alpha_6} = \frac{1155}{2}$
$\overset{(7)}{\alpha_0} = -\frac{14157}{2}$	$\overset{(7)}{\alpha_2} = \frac{99099}{8}$	$\overset{(7)}{\alpha_4} = -\frac{33033}{4}$	$\overset{(7)}{\alpha_6} = \frac{33033}{8}$
$\overset{(8)}{\alpha_0} = -\frac{2760615}{64}$	$\overset{(8)}{\alpha_2} = \frac{306735}{4}$	$\overset{(8)}{\alpha_4} = -\frac{429429}{8}$	$\overset{(8)}{\alpha_6} = \frac{117117}{4}$
$\overset{(9)}{\alpha_0} = -\frac{8890825}{32}$	$\overset{(9)}{\alpha_2} = \frac{15643485}{32}$	$\overset{(9)}{\alpha_4} = -\frac{1422135}{4}$	$\overset{(9)}{\alpha_6} = \frac{3318315}{16}$
$\overset{(10)}{\alpha_0} = -\frac{112285459}{64}$	$\overset{(10)}{\alpha_2} = \frac{51038845}{16}$	$\overset{(10)}{\alpha_4} = -\frac{153116535}{64}$	$\overset{(10)}{\alpha_6} = \frac{1177819}{8}$

α_8	α_{10}	α_{12}	α_{14}
$\alpha_8^{(4)} = -\frac{5}{4}$			
$\alpha_8^{(5)} = -\frac{35}{2}$	$\alpha_{10}^{(5)} = \frac{7}{4}$		
$\alpha_8^{(6)} = -\frac{693}{4}$	$\alpha_{10}^{(6)} = \frac{63}{2}$	$\alpha_{12}^{(6)} = -\frac{21}{8}$	
$\alpha_8^{(7)} = -\frac{3003}{2}$	$\alpha_{10}^{(7)} = \frac{3003}{8}$	$\alpha_{12}^{(7)} = -\frac{231}{4}$	$\alpha_{14}^{(7)} = \frac{33}{8}$
$\alpha_8^{(8)} = -\frac{195195}{16}$	$\alpha_{10}^{(8)} = \frac{15015}{4}$	$\alpha_{12}^{(8)} = -\frac{6435}{8}$	$\alpha_{14}^{(8)} = \frac{429}{4}$
$\alpha_8^{(9)} = -\frac{765765}{8}$	$\alpha_{10}^{(9)} = \frac{546975}{16}$	$\alpha_{12}^{(9)} = -\frac{36465}{4}$	$\alpha_{14}^{(9)} = \frac{109395}{64}$
$\alpha_8^{(10)} = -\frac{11778195}{16}$	$\alpha_{10}^{(10)} = \frac{2375639}{8}$	$\alpha_{12}^{(10)} = -\frac{11778195}{128}$	$\alpha_{14}^{(10)} = \frac{692835}{32}$

Die Gleichung 4) aber gibt

$$9) \quad M = 24 \sin\beta . \sin\varepsilon . \sin\lambda .$$

Nun ist bekanntlich, wenn man das constante Wachsthum von x durch h darstellt:

$$\left.\begin{aligned} S\cos qx &= \frac{\sin q(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + \text{Const.} \\ S\sin qx &= -\frac{\cos q(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + \text{Const.} \end{aligned}\right\}$$

wo S das Summirungszeichen vorstellt.

Will man nun die Summen der $n+1$ Glieder

$$\sin qa + \sin q(a+h) + \sin q(a+2h) \ldots + \sin q(a+nh)$$

und

$$\cos qa + \cos q(a+h) + \cos q(a+2h) \ldots + \cos q(a+nh)$$

haben, so hat man obige Integrale zwischen den Grenzen

$$x = a - h \text{ und } x = a + nh$$

zu nehmen, und diess gibt

$$S\sin qx = \frac{\sin q(a+\frac{1}{2}nh)\sin\frac{1}{2}qh(n+1)}{\sin\frac{1}{2}qh},$$

$$S\cos qx = \frac{\cos q(a+\frac{1}{2}nh)\sin\frac{1}{2}qh(n+1)}{\sin\frac{1}{2}qh}.$$

Da das Wachsthum h in unserm vorliegenden Falle die Längenzunahme der Sonne in einem Tage, folglich kaum $= \frac{1}{58}$ ist, so könnten wir bei unserer beabsichtigten Summation in Beziehung auf 8) in den drei oder vier ersten Gliedern $\frac{1}{2}qh$ statt $\sin\frac{1}{2}qh$ setzen. Ist λ die am ersten Tag, Mittags 12 Uhr, stattfindende Sonnenlänge, so haben wir aus 8) für $m+1$ Tage:

10) $$Su=(m+1)A_0$$
$$+A_2.\frac{\cos 2(\lambda'+\frac{1}{2}mh)\sin h(m+1)}{\sin h}$$
$$+A_4.\frac{\cos 4(\lambda'+\frac{1}{2}mh)\sin 2h(m+1)}{\sin 2h}$$
. . . . . .
. . . . . .
$$+A_{2n}.\frac{\cos 2n(\lambda'+\frac{1}{2}mh)\sin nh(m+1)}{\sin nh}.$$

Eben so liefert 9) für $m+1$ Tage:

11) $$SM=\frac{48\sin\beta.\sin\varepsilon}{h}.\sin(\lambda'+\frac{1}{2}mh)\sin\frac{1}{2}h(m+1).$$

Die Formel 10) reicht beinahe für die ganze bewohnte Erde aus, während 11) nur für die Polarländer anwendbar ist.

Bestimmen wir nun für die gemässigten und Tropenländer die Wärme- oder Lichtmenge eines ganzen Jahres. Nehmen wir das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen an und wählen die Länge eines solchen Ortes, welcher um Mitternacht sein Frühlingsäquinoctium hat, so fällt dieses Aequinoctium nach einem Jahre auf 6 Uhr Morgens, wo also die zweite Hälfte der Nacht weder Wärme noch Licht liefert. Fiele aber das erste Aequinoctium auf Morgens 6 Uhr, so käme das zweite auf Mittags 12 Uhr, so dass hier $\frac{1}{2}$ Tag weiter in Rechnung zu bringen wäre, und zwar bei der Declination $\delta=0$. Man wird daher nur unbedeutend von der mittlern Wärme- oder Lichtmenge abweichen, wenn man der Summe für 365 Tage, das erste Aequinoctium für Mitternacht angenommen, noch $\frac{1}{4}u$, für $\delta=0$, beisetzt, d. h.

$$\frac{1}{4}u=\frac{1}{4}\cos\beta.$$

Noch einfacher erreichen wir unsern Zweck, wenn wir interpoliren, und setzen

$$h(1+m)=2\pi.$$

Da wir nun haben $\lambda'=\frac{1}{2}h$, so ist

$$\lambda'+\frac{1}{2}mh=\pi$$

Digitized by Google

und

$$\sin nh(m+1)=0,$$

folglich die Wärme- oder Lichtmenge eines Jahres

$$Su=\frac{2\pi A_0}{h}=365{,}25\,A_0$$

oder

$$12)\quad SM=\frac{48}{h}A_0=2790{,}3A_0.$$

Wollen wir die Wärme- oder Lichtmenge eines Jahres für den Aequator bestimmen, so ist $\beta=0$ und

$$A_0=A_1=A_2=A_3=\ldots\ldots A_n=-1,$$

folglich

$$\frac{A_0}{}=1-2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)-3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2-10\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3-\frac{175}{4}\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^4-\frac{441}{8}\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^5-\ldots$$

Nun ist

$$\log\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)=0{,}2971462-2$$

und diess gibt

$$A_0=0{,}9591$$

und endlich

$$SM=2676$$

für den Aequator.

Wollen wir die Wärmemenge des Pols suchen, wo $\beta=90^\circ$, so haben wir es hier nur mit einem halben Jahre zu thun, so dass

$$\sin(\lambda'+\frac{1}{2}mh)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

und

$$\sin\frac{1}{2}h(m+1)=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

folglich

$$13)\quad SM = \frac{48 \sin\varepsilon}{h} = 1111$$

für den Pol.

Die dem Aequator in einem Jahre zugeführte Wärme- oder Lichtmenge ist also 2, 4 oder $2^2/_5$ mal grösser, als diejenige des Poles.

Die Fruchtbarkeit eines Landes hängt, unter übrigens gleichen Umständen, hauptsächlich von der demselben zugeführten Wärme- und Lichtmenge ab, und wir dürfen bei den in den irdischen Temperaturen stattfindenden engen Grenzen annehmen, dass für dieselben Gewächse, z. B. für dieselbe Getreideart, die Summen der Wirkungen, um sie gedeihen zu lassen und zur Reife zu bringen, gleich sind.

Wir setzen die in Stunden angegebene Zeit des Gedeihens derselben Fruchtgattung für die Breite β gleich t, für die Breite $\beta' = t'$, die von der Sonne in diesen Zeiten gelieferten Wärme- oder Lichtmengen gleich M und M', so wie die Wärmemenge, die der Erdboden selbst je in einer Stunde gibt, respective gleich m und m'. Setzen wir ferner die Wirkung der Mengen-Einheit der Wärme $= 1$ und die Wirkung der Mengen-Einheit des Lichtes gleich w, so haben wir

$$M + mt + wM = M' + m't' + wM'$$

oder

$$M + \frac{m}{1+w}\, t = M' + \frac{m'}{1+w}\, t'.$$

Da M, M', t und t' bekannte Grössen sind, so gibt diese Gleichung die zwischen $\frac{m}{1+w}$ und $\frac{m'}{1+w}$ stattfindende Relation an. Wollte man für die Breite β und eine neue Breite β'' eine zweite Gleichung aufstellen, so könnte man $1+c$ eliminiren, und dadurch würde sich eine neue Relation zwischen m, m' und m'' darstellen.

Bei absichtlich angestellten Proben hat es der Mensch in seiner Macht, in Beziehung auf den Boden und dessen Befeuchtung Gleichheit der Umstände herbeizuführen.

Wollen wir endlich die Wärme- und Lichtmenge bestimmen, die die Sonne in der Zeit T dem ganzen Erdballe überhaupt zuführt, so können wir uns, da stets Eine Halbkugel von derselben erleuchtet ist, vorstellen, die Sonne stehe im Zenit eines Pols, während die Erde ruht. Dann ist die dem Element $d\beta d\lambda$ in einer Stunde mitgetheilte Menge

$$= R^2 d\beta d\lambda . \sin\beta,$$

Digitized by Google

wobei wir einen Ort mit beliebiger Breite β und beliebiger Länge λ gewählt, und den Halbmesser der Erde $=R$ gesetzt haben.

Die dem ganzen Breitenkreise mitgetheilte Menge ist daher

$$=2\pi R^2 d\beta \sin\beta.\cos\beta = \pi R^2 \sin 2\beta d\beta.$$

Die Integration gibt

$$=\pi R^2 \left(-\frac{1}{2}\cos 2\beta + C\right),$$

und zwischen den Grenzen $\beta=\frac{\pi}{2}$ und $\beta=0$

$$=R^2\pi,$$

folglich so viel, als ein grösster Durchschnitt der Erde, den die Sonne senkrecht bescheint, empfangen würde.

Diess gibt in der Zeit T

$$=TR^2\pi,$$

was für ein ganzes Jahr liefert

$$365{,}25.24.R^2\pi = 27539.R^2.$$

XV.

Ueber die von Polaren und Asymptotenchorden umhüllten Curven.

Von
Herrn O. Bermann,
Hülfslehrer am Gymnasium zu Wetzlar.

(Fortsetzung des Aufsatzes in Theil XIV. S. 382.).

I.

Nachdem die Einhüllungscurven betrachtet worden sind, welche durch Verschiebung des Poles in gegebener Bahn entstehen, wenden wir uns zu denen, deren Entstehung durch Aenderungen der Directrix bei unverändertem Pole bedingt wird. Die Aenderungen der Directrix können ihre Form oder ihre Lage modificiren. Bei solchen der letzteren Art lässt sich immer eine Bewegung des Poles bei ruhender Directrix denken, welche dieselbe Curve erzeugen würde; doch nur in wenigen einzelnen Fällen ist es leicht, Ruhe oder Bewegung von Pol auf Directrix und umgekehrt zu übertragen, so z. B. im Falle einer geradlinigen Bewegung, wo die direct entgegengesetzte in derselben geraden Richtung zu substituiren ist. Das Verschieben der Directrix in gerader Richtung ist demnach auf die früheren Betrachtungen zurückgeführt.

Indem wir hier die Aenderungen in der Form der Directrix nicht weiter betrachten, soll bloss eine von den vielen hinsichtlich der Aenderungen zweiter Art möglichen Annahmen hervorgehoben werden, der Fall nämlich, wo sich der Kegelschnitt um seinen Mittelpunkt dreht. Für die Parabel geht diese Drehung in ein Gleiten längs einer Tangente über, was aber, wie schon erwähnt, auf das Frühere reducirt werden kann. Dass eine

concentrische Kreisbewegung des Poles (in entgegengesetzter Richtung) bei ruhender Directrix hier nicht substituirt werden kann, erhellt sogleich bei näherer Betrachtung.

II.

Betrachten wir zuerst die von den Polaren des Poles x', y' eingehüllte Curve. Es wird im Folgenden ein rechtwinkliges Axensystem gedacht, dessen Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Directrix fällt.

Dreht man die Directrix (Ellipse oder Hyperbel) um den Winkel ω, so ist ihre Gleichung offenbar dieselbe, wie die des unverändert liegenden, wenn dieselbe auf Coordinatenaxen bezogen ist, zu denen man durch blosse Drehung der früheren Axen (ohne Verschiebung) um denselben Winkel, aber in entgegengesetzter Richtung, also um $-\omega$ gelangt. Die hier gültigen Transformationsgleichungen sind aber

$$x = x_1 \cos(-\omega) - y_1 \sin(-\omega), \quad \text{oder} \quad x = y_1 \sin\omega + x_1 \cos\omega,$$
$$y = x_1 \sin(-\omega) + y_1 \cos(-\omega). \qquad y = y_1 \cos\omega - x_1 \sin\omega.$$

Gehen wir von der einfachsten Annahme aus, die ursprüngliche Lage der Directrix sei von der Art gewesen, dass ihre Hauptaxen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, als primitive Gleichung

$$1) \qquad a^2 y^2 \pm b^2 x^2 = a^2 b^2$$

oder

$$y^2 + \beta x^2 + \varepsilon = 0, \text{ wo } \beta = \pm\frac{b^2}{a^2}, \ \varepsilon = -b^2.$$

Durch die angegebene Transformation geht 1) über in

$$2) \ (\cos^2\omega + \beta\sin^2\omega)y^2 - 2(1-\beta)\sin\omega\cos\omega . xy + (\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega)x^2 + \varepsilon = 0,$$

Gleichung des um den Winkel ω gedrehten Kegelschnittes.

Setzt man

$$\cos^2\omega = \frac{1+\cos 2\omega}{2}, \ \sin^2\omega = \frac{1-\cos 2\omega}{2}, \ 1+\beta = m, \ 1-\beta = n;$$

also

$$\cos^2\omega + \beta\sin^2\omega = \frac{1+\beta+(1-\beta)\cos 2\omega}{2} = \frac{m+n\cos 2\omega}{2},$$

$$\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega = \frac{1+\beta-(1-\beta)\cos 2\omega}{2} = \frac{m-n\cos 2\omega}{2};$$

so resultirt für 2):

$$3)\quad y^2-\frac{2n\sin 2\omega}{m+n\cos 2\omega}xy+\frac{m-n\cos 2\omega}{m+n\cos 2\omega}x^2+\frac{2\varepsilon}{m+n\cos 2\omega}=0.$$

Für den Kegelschnitt

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0$$

ist aber die Chordale des Poles (x', y'):

$$(y'+\alpha x'+\gamma)y+(\alpha y'+\beta x'+\delta)x+\gamma y'+\delta x'+\varepsilon=0,$$

und hier ist

$$\alpha:\frac{-n\sin 2\omega}{m+n\cos 2\omega},\ \beta:\frac{m-n\cos 2\omega}{m+n\cos 2\omega},\ \gamma=\delta=0,\ \varepsilon:\frac{2\varepsilon}{m+n\cos 2\omega}.$$

Also Gleichung der Chordalen des gedachten Kegelschnittes für den Pol x', y':

$$4)\quad \left(y'-\frac{n\sin 2\omega}{m+n\cos 2\omega}x'\right)y$$
$$+\left(\frac{m-n\cos 2\omega}{m+n\cos 2\omega}x'-\frac{n\sin 2\omega}{m+n\cos 2\omega}y'\right)x+\frac{2\varepsilon}{m+2n\cos 2\omega}=0$$

oder

$$5)\quad n\cos 2\omega(y'y-x'x)-n\sin 2\omega(x'y+y'x)+m(y'y+x'x)+2\varepsilon=0.$$

Setzt man also abkürzend

$$y'y-x'x=A,$$
$$x'y+y'x=B,$$
$$y'y+x'x+\frac{2\varepsilon}{m}=C;$$

so hat man:

$$6)\quad nA\cos 2\omega-nB\sin 2\omega+mC=0.$$

Die Differenzialgleichung nach ω ist

$$7)\quad B\cos 2\omega+A\sin 2\omega=0,$$

$$\cos 2\omega=-\frac{A}{B}\sin 2\omega.$$

Dies in

$$\cos^2 2\omega+\sin^2 2\omega=1$$

substituirt, gibt

$$\sin^2 2\omega\left(1+\frac{A^2}{B^2}\right)=1,$$

$$\sin 2\omega=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \text{also}\ \cos 2\omega=\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Dies in 6) substituirt, gibt

$$\frac{nA^2}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{nB^2}{\sqrt{A^2+B^2}}-mC=0$$

oder

$$n\sqrt{A^2+B^2}=mC,$$

quadrirt:

$$n^2(A^2+B^2)=m^2C^2,$$

woraus sich endlich für die gesuchte Gleichung der Umhüllungscurve ergibt:

$$8)\quad n^2(A^2+B^2)-m^2C^2=0.$$

III.

Betrachten wir diese Curve näher.

$B=0$ oder $x'y+y'x=0$ ist die Chordale des Systems (als Kegelschnitt betrachtet) der beiden Coordinatenaxen selbst, d. h. die durch den Mittelpunkt der Directrix gehende Linie, welche parallel der zweiten (nicht durch den Pol gehenden) Diagonale des für den Pol x', y' construirten Coordinaten-Rechtecks ist;

$$A=0\ \text{oder}\ y'y-x'x=0$$

schneidet die vorige im Mittelpunkte der Directrix rechtwinklig, und

$$C=0\ \text{oder}\ y'y+x'x+\frac{2\varepsilon}{m}=0$$

ist die Chordale des mit dem gegebenen Kegelschnitte concentrischen Kreises vom Radius

$$\sqrt{\frac{-2\varepsilon}{m}} \text{ oder } ab\sqrt{\frac{2}{a^2 \pm b^2}}.$$

Es liegt der Gedanke einer Vereinfachung unserer Curve dadurch, dass man die auf einander senkrechten $A=0$ und $B=0$ zu neuen Coordinatenaxen nähme, nahe; doch genügen die alten Coordinaten in dieser Hinsicht eben so gut. Es ist nämlich

$$A^2+B^2=(x'^2+y'^2)(x^2+y^2),$$

und Gleichung 8) reducirt sich auf

$$9)\quad x^2+y^2-\frac{m^2}{n^2(x'^2+y'^2)}\left(y'y+x'x+\frac{2\varepsilon}{m}\right)^2=0^*.$$

Gleichung 8) lässt sich schreiben:

$$(nA+mC)(nA-mC)+n^2B^2=0$$

und

$$(nB+mC)(nB-mC)+n^2A^2=0,$$

d. h. der Einhüllungs-Kegelschnitt ist in ein gegebenes Viereck so eingeschrieben, dass auch die vier Berührungspunkte angegeben sind, und demnach leicht zu construiren.

Es erhellt nämlich aus der ersten dieser Gleichungen, dass, weil dieselbe befriedigt wird, wenn gleichzeitig

$$\left.\begin{aligned} nA+mC&=0\\ B&=0\end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} nA-mC&=0\\ B&=0\end{aligned}\right\}$$

ist, derselbe durch die Punkte geht, wo die Linie $B=0$ die beiden Geraden

$$nA+mC=0 \text{ und } nA-mC=0$$

schneidet, und ferner, weil B in quadratischer Form erscheint, dass jeder dieser Durchschnittspunkte als das Zusammenfallen

---

*) Führt man jene Transformation aus, indem man $B=0$ als neue Axe der x, $A=0$ als neue Axe der y annimmt, so resultirt, wenn man auch den Pol auf die neuen Axen bezieht und daher $2x'y'=x''$, $y'^2-x'^2=y''$ setzt, wo x'', y'' dann die neuen Coordinaten desselben sind:

$$m^2x^2+n^2y^2-\frac{m^2}{x''^2+y''^2}\left(y''y+x''x+\frac{2\varepsilon\sqrt{x''^2+y''^2}}{m}\right)^2=0,$$

eine nicht so einfache Gleichung.

zweier Punkte vertretend anzusehen ist, d. h. dass jene beiden Geraden Tangenten sind. Ebenso geht aus der Gleichung hervor, dass die beiden Geraden

$$nB + mC = 0 \text{ und } nB - mC = 0$$

den Kegelschnitt da tangiren, wo sie von $A = 0$ geschnitten werden.

Es ist

$$nA + mC = 0\colon\ (1-\beta)(y'y - x'x) + (1+\beta)(y'y + x'x) + 2\varepsilon = 0$$

oder

$$y'y + \beta x'x + \varepsilon = 0,$$

so wie

$$nA - mC = 0\colon\ x'x + \beta y'y + \varepsilon = 0;$$

erstere nichts anderes, als die Chordale der Directrix in ihrer primitiven Lage, letztere dasselbe für den (reciproken) Pol, dessen Abscisse der Ordinate des gegebenen gleich ist, und umgekehrt.

Die Coordinaten der Durchschnittspunkte, resp. Tangentialpunkte, sind, wie sich durch Elimination einer der Variabeln aus den betreffenden Gleichungen unmittelbar ergibt:

von $B = 0$ mit $nA + mC = 0$: $x = \frac{\varepsilon x'}{\beta x'^2 - y'^2}$, $y = \frac{-\varepsilon y'}{\beta x'^2 - y'^2}$;

$nA - mC = 0$: $x = \frac{\varepsilon x'}{x'^2 - \beta y'^2}$, $y = \frac{\varepsilon y'}{\beta y'^2 - x'^2}$.

$nB + mC = 0$ ist $(nx' + my')y + (mx' + ny')x + 2\varepsilon = 0$

oder

$$(x' + y')(x + y) + \beta(x' - y')(x - y) + 2\varepsilon = 0$$

oder auch

$$B + C - \beta(B - C) = 0.$$

$nB - mC = 0$ ist $(nx' - my')y + (mx' - ny')x - 2\varepsilon = 0$

oder

$$(x' - y')(x + y) + \beta(x' + y')(x - y) - 2\varepsilon = 0$$

oder auch

$$B - C - \beta(B + C) = 0.$$

$$B-C=0 \text{ und } B+C=0$$

sind die Halbirungslinien der Winkel, welche die $B=0$ und $C=0$ mit einander bilden (und daher auch auf einander senkrecht), und auch dadurch näher bestimmt, dass sie unter 45^0 gegen die Coordinatenaxen geneigt sind, weil

$$B-C=0 \text{ oder } (x'-y')y+(y'-x')x+\frac{2\varepsilon}{m}=0$$

identisch mit

$$y-x+\frac{2\varepsilon}{m(x'-y')}=0$$

und

$$B+C=0 \text{ oder } (x'+y')y+(x'+y')x+\frac{2\varepsilon}{m}=0$$

identisch mit

$$y+x+\frac{2\varepsilon}{m(x'+y')}=0$$

ist; die Entfernungen beider vom Anfangspunkte sind offenbar

$$\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{m(x'+y')} \text{ und } \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{m(x'-y')}.$$

Gegen die eine dieser leicht zu construirenden Linien, gegen $B-C=0$ nämlich, ist die Gerade $nB+mC=0$ unter demselben Winkel, dessen trigonometrische Tangente β oder $\pm\frac{b^2}{a^2}$ ist, geneigt, wie $nB-mC=0$ gegen die andere, $B+C=0$.

Als Coordinaten der beiden hierher gehörigen Durchschnittspunkte, resp. Tangentialpunkte, ergeben sich:

für den von $A=0$ mit $nB+mC=0$: $x=\frac{-2\varepsilon y'}{n(x'^2+y'^2)+2mx'y'}$,

$$y=\frac{-2\varepsilon x'}{n(x'^2+y'^2)+2mx'y};$$

$nB-mC=0$: $x=\frac{2\varepsilon y'}{n(x'^2-y'^2)}$,

$$y=\frac{2\varepsilon x'}{n(x'^2-y'^2)}.$$

Das dem Kegelschnitte zugehörige Viereck (er mag es von Innen oder Aussen berühren) ist demnach leicht zu construiren:

Digitized by Google

Man hat zuerst für die Directrix die Chordale des gegebenen P und die des reciproken Pols (p) zu ziehen, sodann zwei Linien, welche gegen die beiden unter 45^0 in sich entgegenstehender Richtung und in gegebener Entfernung vom Anfangspunkte laufenden Geraden unter einem gegebenen Winkel geneigt sind und durch die Punkte gehen, wo letztere sich schneiden — Hierauf lassen sich auch auf diesen, ein Viereck bildenden Geraden, die Tangentialpunkte in folgender Weise bestimmen: Für das erste Paar merke man sich die Punkte, wo es von einer durch den Mittelpunkt der Directrix gehenden, der zweiten Diagonale des für den Pol construirten Coordinaten-Rechtecks parallelen, für das zweite, wo es von der auf letzterer Linie im Mittelpunkte der Directrix senkrechten Geraden geschnitten wird.

IV.

Ist die Directrix ein Kreis ($a=b=r$), also

$$\beta=1,\ \varepsilon=-r^2,\ n=0,\ m=2;$$

so reducirt sich die Umhüllungscurve auf

$$C=0 \text{ oder } y'y+x'x=r^2,$$

d. h., wie natürlich, auf die Chordale dieses Kreises, weil in diesem Falle die Drehung keine Aenderung bewirkt.

Für die gleichseitige Hyperbel ist

$$\beta=-1,\ \varepsilon=-r^2,\ n=2,\ m=0.$$

Die Curvengleichung 9) reducirt sich in diesem Falle auf

$$x^2+y^2=\frac{\varepsilon^2}{x'^2+y'^2},$$

d. h. auf einen der Directrix concentrischen Kreis vom Radius $\frac{-\varepsilon}{\sqrt{x'+y'^2}}$ oder $\frac{r^2}{d}$, wenn d die Entfernung des Poles vom Mittelpunkte der Directrix bezeichnet. Dieser Kreis ändert sich für dieselbe gleichseitige Hyperbel offenbar nur mit der Entfernung des Poles und wird um so kleiner, je weiter derselbe wegliegt. Wenn sich daher während der Drehung der gleichseitigen Hyperbel der Pol auf einem derselben concentrischen Kreise bewegt, so hat dies auf die Umhüllungscurve keinen Einfluss.

Der Fall, wo die Directrix in ein System zweier Geraden übergeht, kann nicht betrachtet werden, weil Gleichung 1) denselben nicht umfasst. Doch ist es von selbst klar, dass, weil alle Chordalen durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden gehen, hier der Mittelpunkt Umhüllungscurve ist.

Die Umhüllungscurve ist eine Ellipse, wenn die Directrix eine Hyperbel ist und umgekehrt. Löst man nämlich Gleichung 9) auf, so ergibt sich nach einigen Reductionen:

$$10)\quad y^2-\frac{2(1+\beta)^2x'y'}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2}xy$$

$$\frac{(1-\beta)^2y'^2-4\beta x'^2}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2}x^2-\frac{4(1+\beta)\varepsilon}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2}(y'y+x'x)-\frac{4\varepsilon^2}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2}=0.$$

Was für die allgemeine Kegelschnittsgleichung $\alpha^2-\beta$, das ist für unsere Curve

$$\frac{(1+\beta)^4x'^2y'^2}{[(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2]^2}-\frac{(1-\beta)^2y'^2-4\beta x'^2}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2},$$

was sich, auf denselben Nenner gebracht, auf

$$4\beta.\frac{(1-\beta)^2y'^2(x'^2+y'^2)+(1+\beta)^2x'^4}{[(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2]^2}$$

reducirt, dessen Vorzeichen nur von β abhängt, da der Factor von 4β positiv ist. Ist also die Directrix eine Ellipse oder β positiv, so ist der vorstehende Ausdruck positiv, d. h. stellt eine Hyperbel vor; ist die Directrix eine Hyperbel oder β negativ, so zeigt er eine Ellipse an.

Aus der Betrachtung der in III. entwickelten Coordinaten der vier Punkte, wo die gefundene Curve die Seiten des erwähnten Vierecks berührt, erhellt (indem man die Nenner zum Verschwinden bringt), was nur für den Fall einer Ellipse als Directrix möglich ist, wo nach dem eben Bemerkten die Curve eine Hyperbel ist, weil nur dann $\sqrt{\beta}$ reell ist, dass, wenn der Pol auf einer der beiden Geraden $y=\pm x\sqrt{\beta}$ oder $y=\pm\frac{b}{a}x$ liegt, die Gerade $nA+mC=0$ eine Asymptote der Curve ist,

wenn er auf einer der beiden Geraden $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}x$ oder $y=\pm\frac{a}{b}x$ liegt,

$nA-mC=0$ Asymptote ist;

. . . . . $y=\pm x$ liegt,

$nB-mC=0$ Asymptote ist;

. . . . . $y=\pm\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}x$

oder } liegt,

. . . . . $y=\pm\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}}x$

$nB+mC=0$ Asymptote ist.

Digitized by Google

Das Letzte kann jedoch nicht der Fall sein, weil $\beta<1$, also $\beta-1$ negativ, und daher $\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}$ und $\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}}$ imaginär sind.

Die übrigen Geraden sind leicht zu construiren: $y=\pm\frac{b}{a}x$ ist nämlich nichts Anderes, als die durch den Mittelpunkt der Directrix gehende Linie, derjenigen parallel, welche das Ende der grossen Axe mit dem der kleinen verbindet; $y=\pm\frac{a}{b}x$ steht auf der vorigen senkrecht; $y=\pm x$ halbiren, durch den Mittelpunkt gehend, den rechten Winkel, welchen beide Axen mit einander bilden.

Eine nähere Betrachtung zeigt ferner von selbst, dass, wenn sich, bei beliebiger Directrix, der Pol in der Peripherie eines derselben concentrischen Kreises bewegt, nur die Lage der Umhüllungscurve geändert wird, keineswegs aber die Form derselben. Dieselbe bewegt sich in diesem Falle mit ihrem Mittelpunkte ebenfalls auf der Pripherie eines concentrischen Kreises. Bestimmt man nämlich aus den Coefficienten der Gl. 10) auf bekannte Weise die Coordinaten ihres Mittelpunktes, so ergibt sich, da in diesem Falle $x'^2+y'^2=r^2$ ist, wenn r den Radius des vom Pole beschriebenen Kreises vorstellt:

$$y_0=-\frac{1}{2}\frac{(1+\beta)\varepsilon}{\beta r^2}y',$$

$$x_0=-\frac{1}{2}\frac{(1+\beta)\varepsilon}{\beta r^2}x';$$

also auch

$$x_0^2+y_0^2=\frac{1}{4}\frac{(1+\beta)^2\varepsilon^2}{\beta^2r^4}\cdot r^2=\frac{1}{4}\frac{(1+\beta)^2\varepsilon^2}{\beta^2r^2}.$$

Der Radius des in Rede stehenden Kreises ist also $\frac{1}{2}\frac{(1+\beta)\varepsilon}{\beta r}$ *); er geht für $\beta=-1$, d. h. für die gleichseitige Hyperbel, wo die Bewegung des Pols im Kreise keinen Einfluss hat, in einen Punkt über.

V.

Betrachten wir zweitens die von den Asymptotenchorden eingehüllte Curve. Hier ist die Ausgangsgleichung so zu wählen,

*) Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Umhüllungscurve, so reducirt sich ihre Gleichung auf

$$y^2+\frac{2m^2x'y'}{m^2y'^2-n^2r^2}xy+\frac{m^2x'^2-nr^2}{m^2y'^2-n^2r^2}x^2-\frac{n^2\varepsilon^2}{\beta^2}=0.$$

dass auch das System zweier Geraden nicht ausgeschlossen ist was bei den Chordalen nicht nöthig war.

Wir setzen also

$$1) \quad y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + \varepsilon = 0$$

als Gleichung der Directrix, d. h. geben ihr keine bestimmte primitive Lage. (Alles übrige wie vorhin).

Die Gleichung der um Winkel ω gedrehten Curve wird hier

$$2) \quad (\cos^2\omega + \beta\sin^2\omega + \alpha\sin 2\omega)y^2 + (2\alpha\cos^2\omega - 2\alpha\sin^2\omega - (1-\beta)\sin 2\omega)\,xy$$
$$+ (\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega - \alpha\sin 2\omega)x^2 + \varepsilon = 0,$$

oder mit Einführung des doppelten Winkels, so wie von m und n:

$$3) \quad (m + n\cos 2\omega + 2\alpha\sin 2\omega)y^2 + 2(2\alpha\cos 2\omega - n\sin 2\omega)\,xy$$
$$+ (m - n\cos 2\omega - 2\alpha\sin 2\omega)x^2 + 2\varepsilon = 0.$$

Nach einigen Reductionen resultirt als Gleichung ihrer Asymptotenchorde*):

$$4) \quad \left[n\left(y'y - x'x + \frac{x'^2 - y'^2}{2}\right) + 2\alpha(x'y + y'x - x'y')\right]\cos 2\omega$$
$$+ \left[2\alpha\left(y'y - x'x + \frac{x'^2 - y'^2}{2}\right) - n(x'y + y'x - x'y')\right]\sin 2\omega$$
$$+ m\left(y'y + x'x' - \frac{x'^2 + y'^2}{2}\right) + \varepsilon = 0.$$

Setzt man wieder:

$$y'y - x'x + \frac{x'^2 - y'^2}{2} = A,$$
$$x'y + y'x - x'y' = B,$$

*) Für den allgemeinen Kegelschnitt

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0$$

ist nämlich

$$(y' + \alpha x' + \gamma)y + (\alpha y' + \beta x' + \delta)x - \tfrac{1}{2}(y'^2 + 2\alpha x'y' + \beta x'^2 - \varepsilon) = 0$$

die Gleichung der Asymptotenchorde, und hier ist

für α: $\dfrac{2\alpha\cos 2\omega - n\sin 2\omega}{m + n\cos 2\omega + 2\alpha\sin 2\omega}$, für β: $\dfrac{m - n\cos 2\omega - 2\alpha\sin 2\omega}{m + n\cos 2\omega + 2\alpha\sin 2\omega}$, $\gamma = \delta = 0$,

für ε: $\dfrac{2\varepsilon}{m + n\cos 2\omega + 2\alpha\sin 2\omega}$

zu setzen.

Digitized by Google

$$y'y+x'x-\frac{x'^2+y'^2}{2}+\frac{\varepsilon}{m}=C;$$

so geht 4) über in

$$5)\quad mC+(nA+2\alpha B)\cos 2\omega+(2\alpha A-nB)\sin 2\omega=0.$$

Die weitere Entwickelung (Differenzirung und Elimination von ω) ist der früheren identisch. Die gesuchte Gleichung der Umhüllungscurve ist demnach

$$6)\quad (nA+2\alpha B)^2+(2\alpha A-nB)^2-m^2C^2=0$$

oder

$$7)\quad (n^2+4\alpha^2)(A^2+B^2)-m^2C^2=0.$$

VI.

Entwickelt man Gleichung 7), so resultirt

$$(n^2+4\alpha^2)(x'^2+y'^2)\left(x^2+y^2-y'y-x'x+\frac{x'^2+y'^2}{4}\right)$$
$$-m^2\left(y'y+x'x-\frac{x'^2+y'^2}{2}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^2=0$$

oder

$$8)\quad \left(x-\frac{x'}{2}\right)^2$$
$$+\left(y-\frac{y'}{2}\right)^2-\frac{m^2}{(n^2+4\alpha^2)(x'^2+y'^2)}\left[y'\left(y-\frac{y'}{2}\right)+x'\left(x-\frac{x}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{m}\right]^2=0.$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in Punkt $\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}$, d. h. in den Halbirungspunkt der Linie, welche den Mittelpunkt der Directrix mit dem Pole verbindet, und lässt die Richtung der Axen ungeändert, so geht 8) über in

$$x^2+y^2-\frac{m^2}{(n^2+4\alpha^2)(x'^2+y'^2)}\left[\frac{y'}{2}\cdot y+\frac{x'}{2}\cdot x+\frac{\varepsilon}{m}\right]^2=0,$$

wo auch x' und y' nicht mehr die früheren, sondern die auf diese neuen Axen bezogenen Coordinaten des Poles sind, oder in

$$9)\quad x^2+y^2-\frac{m^2}{4(n^2+4\alpha^2)(x'^2+y'^2)}\left(y'y+x'x+\frac{2\varepsilon}{m}\right)^2=0.$$

Die Einhüllungscurve ist demnach, wie aus der Vergleichung mit der früher für die Chordalen entwickelten Gleichung erhellet, dieser ganz ähnlich und unterscheidet sich nur durch $4(n^2+4\alpha^2)$ statt des früheren n^2.

Für Ellipse und Hyperbel kann $\alpha=0$ gesetzt werden, indem man die bei der Betrachtung der Chordalcurve als primitiv angesehene Lage auch hier annehmen kann. Es würden sich beide Curven also nur durch ihre Lage und durch die Modification, welche $2n$ bei dieser statt n bei jener bewirkt, unterscheiden. Die hier mit $A=0$, $B=0$, $C=0$ bezeichneten Geraden sind den früheren parallel, $B=0$ oder $\frac{y}{y'}+\frac{x}{x'}=1$ ist die Asymptotenchorde des Systems der beiden primitiven Hauptaxen, geht also nach der oben erwähnten Verlegung der Axen durch den neuen Anfangspunkt, und ist dann für die neuen Coordinaten ganz identisch der früheren $B=0$ für die alten.

$A=0$ ist der entsprechenden der Chordalcurve in der bloss von der Lage des Pols abhängigen Entfernung $\frac{x'^2-y'^2}{2\sqrt{x'^2+y'^2}}$ parallel.

$C=0$ ist die Asymptotenchorde*) des mit dem Radius $\sqrt{\frac{-\varepsilon}{1+\beta}}$ oder $\frac{ab}{\sqrt{a^2\pm b^2}}$ aus dem Mittelpunkte der Directrix beschriebenen Kreises, und in diese geht die Umhüllungscurve über, wenn die Directrix ein Kreis oder $n=0$ ist, wo $\frac{-\varepsilon}{1+\beta}=\frac{r^2}{2}$ ist, also

$$C=0:\ y'y+x'x=\sqrt{\frac{x'^2+y'^2-r^2}{2}},$$

die Asymptotenchorde des Kreises vom Radius r. Auch hier sind offenbar das Viereck und die Tangentialpunkte leicht zu construiren.

Ist die Directrix eine gleiseitige Hyperbel, so geht die Umhüllungscurve in den Kreis $x^2+y^2=\frac{\varepsilon^2}{4(x'^2+y'^2)}$ über, dessen Radius $\frac{\varepsilon}{2d}$ ist. Er unterscheidet sich von dem früheren dadurch, dass sein Mittelpunkt im Halbirungspunkte der Geraden liegt, welche den Mittelpunkt des ersteren mit dem Pole verbindet, und dass sein Radius halb so gross ist. Auch hier gilt hinsichtlich der kreisförmigen Bewegung des Pols wieder das früher Gesagte.

Für ein System zweier Geraden ist in Gleichung 9) $\varepsilon=0$ zu setzen. In diesem Falle aber schneiden sich die drei Linien $A=0$, $B=0$,

*) Die Asymptotenchorde des Kreises $x^2+y^2+\varepsilon=0$ ist nämlich nach dem Früheren

$$y'y+x'x-\tfrac{1}{2}(y'^2+x'^2-\varepsilon)=0.$$

$C=0$ in einem Punkte. $C=0$ ist nämlich jetzt in den alten Coordinaten $y'y+x'x=\frac{x'^2+y'^2}{2}$, d. h. das im Halbirungspunkte auf die den Pol mit dem Mittelpunkte der Directrix verbindende Gerade errichtete Perpendikel und $A=0$, sowie $B=0$ gehen durch denselben Punkt, welcher der neue Anfangspunkt ist, da sich $A=0$ schreiben lässt:

$$y'\left(y-\frac{y'}{2}\right)-x'\left(x-\frac{x'}{2}\right)=0,$$

und $B=0$:

$$x'\left(y-\frac{y'}{2}\right)+y'\left(x-\frac{x}{2}\right)=0.$$

(Dass beide auf einander senkrecht sind, ist bereits bekannt). Auch durch Elimination zwischen diesen drei Gleichungen lässt sich Dasselbe nachweisen*).

Hierin liegt auch noch folgender Satz, indem man auch $\beta=0$ denken kann, also das System $y^2-2\alpha xy=0$ oder $y(y-2\alpha x)=0$, d. h. die Axe der x und eine sich im Anfangspunkte drehende Gerade:

Haben Parallelogramme eine Diagonale gemeinschaftlich und liegen zwei parallele Seiten derselben in einer und derselben Geraden, so schneiden und halbiren sich die anderen Diagonalen in Halbirungspunkte der ersteren **).

---

*) Es ist nämlich

$$B.y'-A.x'\equiv y'x'.y+y'^2.x-y'^2x'-\left(x'y'.y-x'^2.x-x'\left(\frac{y'^2-x'^2}{2}\right)\right)=0$$

oder

$$(x'^2+y'^2)x=x'\left(\frac{x'^2+y'^2}{2}\right),$$

$$x=\tfrac{1}{2}x'.$$

Dies in $C=0$ substituirt, gibt:

$$y'y+\frac{x'^2}{2}-\frac{x'^2+y'^2}{2}=0,$$

$$y'y=\frac{y'^2}{2},$$

$$y=\tfrac{1}{2}y'.$$

**) Es versteht sich zwar von selbst, dass die zweiten Diagonalen der Parallelogramme, die bereits eine Diagonale gemeinschaftlich haben, sich im Halbirungspunkte letzterer schneiden (und halbiren); doch ist der obige Satz keineswegs seines Inhaltes, sondern des eigenthümlichen Weges seiner Auffindung wegen angeführt worden.

Digitized by Google

Nachschrift.

Zu seinem früheren Aufsatze, von welchem der vorhergehende die Fortsetzung ist, hat mir der Herr Vf. eine Berichtigung eingesandt. Er bittet nämlich die geehrten Leser, in Thl. XIV. S. 384. statt der Worte: „Aus Gleichung (1) ist ersichtlich" bis „schneiden sich in einem festen Punkte" gefälligst das Folgende zu setzen:

„Aus Gleichung (1) ist ersichtlich, dass sich alle Asymptotenchorden im Anfangspunkte schneiden, wenn die Bahn des Poles ein Kegelschnitt von der Gleichung $y^2+2\alpha xy+\beta x^2-\varepsilon=0$ ist. Nun ist aber dieser dem gegebenen Kegelschnitte, der Directrix, ähnlich und ähnlich liegend, schneidet ihn in denselben beiden Punkten, wie die Chordale des Anfangspunktes, da

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2-\varepsilon\equiv(y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon)-2(\gamma y+\delta x+\varepsilon)$$

oder

$$\equiv\Omega-2(\gamma y+\delta x+\varepsilon)=0$$

ist, und hat ferner den Anfangspunkt selbst zum Mittelpunkte.

Hieraus ergibt sich also unmittelbar der Lehrsatz:

„Schneiden sich zwei ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte in den beiden Punkten, wo die vom Centrum des ersten nach dem zweiten gezogenen Tangenten diesen berühren, so schneiden sich auch die Halbirungslinien aller Tangentenpaare, die man von beliebigen Punkten des ersten aus nach dem zweiten zieht, in dessen Centrum" und, auf Kreise angewandt, den interessanten Satz (Cfr. Plücker, analyt. Entwickelungen B. I. S. 65., N. 127):

„Schneiden sich zwei Kreise orthogonal, so treffen sich die Halbirungslinien der Tangentenpaare, die man von beliebigen Punkten eines der beiden Kreise nach dem andern zieht, im Centrum des ersteren"

welcher Satz, wenn mehrere Kreise, statt des einen Paares, combinirt werden, noch weiterer Ausdehnung fähig ist."

G.

Digitized by Google

XVI.

Neue einfache und leichte Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie kann man bekanntlich auf verschiedene Arten ableiten. Es lässt sich dabei ein rein analytischer Weg einschlagen, oder man kann sich einer geometrischen, sich an eine Figur anschliessenden Betrachtung bedienen. So schön die erstere Methode ist, so dürfte doch für Anfänger die letztere allein, oder wenigstens vorzugsweise geeignet sein, und sie ist es daher auch, welche ich für jetzt im Folgenden allein im Auge habe. Diese geometrische Methode hat mir aber immer noch nicht diejenige Einfachheit zu besitzen geschienen, welche der Elementarunterricht fordert, und ich habe mich daher, so oft sich mir dazu nur irgend Gelegenheit darbot, immer eifrig nach einer einfacheren Darstellung als die gewöhnliche umgesehen. Meistens beweiset man den Satz, dass sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der Gegenwinkel verhalten, und auch die Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel durch Betrachtung einer Figur, und leitet dann aus der letzteren Relation die Relation zwischen den drei Winkeln und einer Seite mittelst des Supplementardreiecks ab. Aber gerade diese so eben erwähnte Ableitung hat, so schön und einfach sie auch an sich ist, insofern sie die auf geometrischem Wege zu bewirkende Vergleichung des sphärischen Dreiecks mit seinem Supplementardreiecke voraussetzt, für den Anfänger immer einige Schwierig-

keit, und die Betrachtung des Supplementardreieckes selbst scheint mehr der Stereometrie als der sphärischen Trigonometrie anzugehören, weshalb sie auch oft in der letzteren als schon aus der ersteren bekannt vorausgesetzt wird. Selbst auch schon die gewöhnlichen geometrischen Beweise der Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel nehmen manche goniometrischen Transformationen in Anspruch, die man im Interesse der Anfänger wenigstens theilweise wohl noch vermieden sehen möchte. Vor Kurzem bin ich, nach früherem öfteren vergeblichen Suchen, zufällig auf eine Ableitung der in Rede stehenden Grundformeln gekommen, welche ich in der That für so einfach halte, dass ich glaube, dass sie wohl verdient, auf den folgenden Blättern mitgetheilt zu werden. Ich werde dabei, ohne weitere Erläuterung, die bekannten in der Trigonometrie durchgängig gebräuchlichen Bezeichnungen beibehalten.

§. 2.

Wir wollen zuerst das rechtwinklige sphärische Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 3.), wo A der rechte Winkel sein soll, betrachten.

Fällen wir von C auf OA und OB die Perpendikel CA' und CB', und ziehen dann $A'B'$, so steht CA' auf der Ebene AOB, also auch auf $A'B'$ senkrecht, und $A'B'$ steht auf OB senkrecht. Daher ist der Winkel $A'B'C$ dem Winkel B des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC gleich.

Nun ist

$$CA' = OC.\sin b,$$

$$CA' = CB'.\sin B = OC.\sin a \sin B;$$

also

$$OC.\sin b = OC.\sin a \sin B,$$

d. i.

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \sin b = \sin a \sin B, \text{ und eben so} \\ \sin c = \sin a \sin C. \end{cases}$$

Ferner ist

$$A'B' = B'C.\cos B = OC.\sin a \cos B,$$

$$A'B' = OA'.\sin c = OC.\cos b \sin c;$$

also

$$OC.\sin a \cos B = OC.\cos b \sin c,$$

Digitized by Google

woraus

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c,$$

oder

$$\cos B = \cos b \frac{\sin c}{\sin a};$$

folglich nach I.

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \cos B = \cos b \sin C, \text{ und ganz eben so} \\ \cos C = \cos c \sin B. \end{cases}$$

Endlich ist

$$\cos a = \frac{OB'}{OC} = \frac{OA'.\cos c}{OC} = \frac{OC.\cos b \cos c}{OC},$$

also

$$\text{III.} \quad \cos a = \cos b \cos c.$$

§. 3.

Sei nun ABC (Taf. III. Fig. 4.) ein beliebiges sphärisches Dreieck. In diesem sphärischen Dreiecke fälle man von A auf BC das Perpendikel AD, und bezeichne die Winkel BAD, CAD durch x, y; die Bogen BD, CD durch u, v; das Perpendikel AD durch w.

Dann ist nach I. in den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ABD und ACD:

$$\sin w = \sin c \sin B, \quad \sin w = \sin b \sin C;$$

also

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B,$$

und daher überhaupt:

$$\text{I*.} \quad \begin{cases} \sin a \sin B = \sin b \sin A, \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B, \\ \sin c \sin A = \sin a \sin C. \end{cases}$$

Ferner ist nach I.

$$\sin x = \frac{\sin u}{\sin c}, \quad \sin y = \frac{\sin v}{\sin b};$$

Digitized by Google

und nach II.

$$\cos x = \cos u \sin B, \quad \cos y = \cos v \sin C;$$

aber nach I.

$$\sin B = \frac{\sin w}{\sin c}, \quad \sin C = \frac{\sin w}{\sin b};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos x = \frac{\cos u \sin w}{\sin c}, \quad \cos y = \frac{\cos v \sin w}{\sin b}.$$

Folglich ist

$$\cos x \cos y = \frac{\cos u \cos v \sin w^2}{\sin b \sin c}, \quad \sin x \sin y = \frac{\sin u \sin v}{\sin b \sin c};$$

und weil nun

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

ist, so ist

$$\cos(x \pm y) = \frac{\cos u \cos v \sin w^2 \mp \sin u \sin v}{\sin b \sin c}$$

oder

$$\cos(x \pm y) = \frac{\cos u \cos v \mp \sin u \sin v - \cos u \cos v \cos w^2}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos(u \pm v) - \cos u \cos v \cos w^2}{\sin b \sin c}.$$

Folglich ist

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos v \cos w . \cos u \cos w}{\sin b \sin c},$$

d. i. nach III.

II*. $$\begin{cases} \cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \text{ und ganz eben so} \\ \cos B = \dfrac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}, \\ \cos C = \dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}. \end{cases}$$

Endlich ist nach I*.

$$\sin u \sin B = \sin x \sin w, \quad \sin v \sin C = \sin y \sin w;$$

also

$$\sin u = \frac{\sin x}{\sin B} \sin w, \quad \sin v = \frac{\sin y}{\sin C} \sin w;$$

und nach II.

$$\cos u = \frac{\cos x}{\sin B}, \quad \cos v = \frac{\cos y}{\sin C}.$$

Also ist

$$\cos u \cos v = \frac{\cos x \cos y}{\sin B \sin C}, \quad \sin u \sin v = \frac{\sin x \sin y \sin w^2}{\sin B \sin C},$$

folglich, weil

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

ist:

$$\cos(u \pm v) = \frac{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y \sin w^2}{\sin B \sin C}$$

oder

$$\cos(u \pm v) = \frac{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y \pm \sin x \sin y \cos w^2}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{\cos(x \pm y) \pm \sin x \sin y \cos w^2}{\sin B \sin C}.$$

Folglich ist

$$\cos a = \frac{\cos A \pm \sin x \cos w . \sin y \cos w}{\sin B \sin C},$$

wo das obere Zeichen dem ersten, das untere Zeichen dem zweiten der beiden in Taf. III. Fig. 4. dargestellten Fälle entspricht. Nun ist aber mit derselben Bestimmung wegen der Zeichen nach II.

$$\cos B = \sin x \cos w, \quad \pm \cos C = \sin y \cos w;$$

also nach dem Vorhergehenden

III*. $$\begin{cases} \cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}, \\ \cos b = \dfrac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A}, \\ \cos c = \dfrac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}. \end{cases}$$ und ganz eben so

Dies sind jetzt die bekannten Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, und ich sollte meinen, dass sich diese Ableitung vor der gewöhnlichen an Figuren und das Supplementardreieck geknüpften Ableitung in mehr als einer Beziehung empfehlen, und daher bei dem Unterrichte wohl besondere Berücksichtigung verdienen möchte. Ja ich glaube, dass die obige Darstellung als ein neuer Beweis gelten kann, dass man in vielen Theilen der Mathematik, namentlich auch in den sogenannten elementaren Theilen, noch lange nicht immer die einfachsten Darstellungen gefunden hat, eine Bemerkung, deren Richtigkeit besonders in neuerer Zeit in mehreren Fällen auf sehr in die Augen fallende Weise dargethan worden ist.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass auch die Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines ebenen Dreiecks auf ähnliche Weise wie oben die Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines sphärischen Dreiecks abgeleitet werden kann, wenn ich auch diese Ableitung der gewöhnlichen allgemein bekannten Ableitung der in Rede stehenden Relation nicht gerade vorzuziehen geneigt sein würde.

Wenn in Taf. III. Fig. 5. die Linie AD auf BC senkrecht steht, so ist, wenn man sich der aus der Figur selbst ersichtlichen Bezeichnungen bedient:

$$\cos x = \frac{w}{c}, \quad \cos y = \frac{w}{b};$$

$$\sin x = \frac{u}{c}, \quad \sin y = \frac{v}{b};$$

also

$$\cos x \cos y = \frac{w^2}{bc}, \quad \sin x \sin y = \frac{uv}{bc}.$$

Folglich ist

$$\cos x \cos y \mp \sin x \sin y = \frac{w^2 \mp uv}{bc}$$

oder

$$\cos(x \pm y) = \frac{w^2 \mp uv}{bc} = \frac{2w^2 \mp 2uv}{2bc}.$$

Nun ist aber

$$w^2 = b^2 - v^2 = c^2 - u^2,$$

also

$$\cos(x \pm y) = \frac{(b^2 - v^2) + (c^2 - u^2) \mp 2uv}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - (u^2 \pm 2uv + v^2)}{2bc},$$

d. i.

$$\cos(x \pm y) = \frac{b^2 + c^2 - (u \pm v)^2}{2bc},$$

und folglich, mit Rücksicht auf die beiden in der Figur dargestellten Fälle:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

welches die bekannte Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines ebenen Dreiecks ist.

Ich möchte mir schliesslich noch einmal erlauben, das Obige den Herren Lehrern der Mathematik recht dringend zur gefälligen Beachtung bei dem Unterrichte in der sphärischen Trigonometrie zu empfehlen, den ich für so wichtig erachte, dass ich es für einen wahren Rückschritt halte, dass er, wenigstens auf preussischen Gymnasien, nicht mehr ertheilt wird, wie es wohl früher der Fall war, als ich selbst noch meine geringen Kräfte mit grosser Freudigkeit dem Gymnasialunterrichte an verschiedenen Lehranstalten widmete.

XVII.

Ueber das Dreieck, worin die Transversalen gleich sind, welche zwei Winkel desselben nach gleichem Verhältniss theilen.

Von dem

Herrn Doctor R. Baltzer,

Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden.

Die Aufforderung im Archiv Thl. XIII. S. 341. erinnert mich an zwei Beweise des fraglichen Lehrsatzes, welche, ich glaube im Jahre 1844, in einem Kränzchen hiesiger mathematischer Freunde mitgetheilt wurden, den einen von dem leider früh verstorbenen Professor A. Seebeck, dessen Manuscript noch vorhanden und weiter unten abgedruckt ist, den andern von mir. Der in Rede stehende Satz scheint der Sphäre der Elementargeometrie anzugehören, wo es sich um die Beziehungen zwischen Seiten und gegenüberliegenden Winkeln der Dreiecke handelt, und wird deshalb wie folgt durch Umkehrung gewonnen.

Lemma. Haben zwei Dreiecke die Winkel einzeln gleich und ist eine Seite des einen Dreiecks kleiner als die gleichliegende des andern, so sind die übrigen Seiten des einen ebenfalls kleiner als die gleichliegenden des andern.

Beweis durch Zusammenlegen der gleichen Winkel, denen die kleinere Seite anliegt.

Lehrsatz 1. Ist im Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 6.) Winkel $A<B$, und theilt man diese Winkel durch AD und BE so, dass $\hat{CAD}=\hat{CBE}$, so ist $AD>BE$.

Beweis. Die Dreiecke ACD und BCE haben einzeln gleiche Winkel. Nun ist $AC > BC$, weil $\hat{ABC} > \hat{BAC}$ nach Voraussetzung, folglich $AD > BE$ gegenüber den gleichen Winkeln C. W. z. b. w.

Lehrsatz 2. Ist im Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 7.) Winkel $A < B$ und theilt man diese Winkel durch AD und BE so, dass $\hat{BAD} < \hat{ABE}$ und $\hat{CAD} < \hat{CBE}$, so ist $AD > BE$.

Beweis. Zieht man BC' so, dass $\hat{C'BE} = \hat{C'AD'}$, so ist $AD' > BE$ nach Lehrsatz 1. Nun ist AD' ein Theil von AD, folglich um so mehr $AD > BE$. W. z. *b.* w.

Lehrsatz 3. Sind die Geraden AD und BE, welche die Winkel A und B des Dreiecks ABC so theilen, dass $\hat{BAD} : \hat{DAC} = \hat{ABE} : \hat{EBC}$, einander gleich, so ist $A = B$ und das Dreieck gleichschenklig.

Beweis. Wäre A ungleich B, also $\hat{BAD}$ ebenso ungleich $\hat{ABE}$, und $\hat{DAC}$ ebenso ungleich $\hat{EBC}$, so wäre BE ebenso ungleich AD (Lehrs. 2.) Dies ist gegen die Voraussetzung $AD = BE$. Also kann A nicht ungleich B sein. W. z. b. w.

Das Folgende ist von dem leider zu früh verstorbenen Professor A. Seebeck zu Dresden.

Der Satz:

„Wenn die Halbirungslinien zweier Dreieckswinkel, gerechnet bis zur gegenüberstehenden Seite, gleich sind, so ist das Δ gleichschenklig“

kann auf folgenden allgemeineren zurückgeführt werden:

(A) „Wenn ein Dreieckswinkel halbirt ist und die durch einen Punkt der Halbirungslinien aus den beiden anderen Winkelspitzen gezogenen Transversalen gleich sind, so ist das Δ gleichschenklig.“

Dieser Satz aber ergiebt sich aus folgendem:

Wenn durch einen Punkt der Halbirungslinie eines Winkels Transversalen zwischen den Schenkeln gezogen werden, so ist die auf der Halbirungslinie rechtwinklig stehende Transversale die kürzeste, und die

übrigen sind um so grösser, je mehr sie von derselben abweichen.

In Taf. III. Fig. 8. sei BM die Halbirungslinie und AC so gezogen, dass $AB > BC$; es soll gezeigt werden, dass $DE > AB$. — Da $DM > AM$, so ist der Beweis nur zu führen, wenn $ME < MC$, d. h. $\angle MEC$ stumpf ist. Mache $MF = MA$ und $MG = ME$, so ist $\Delta AMF \sim \Delta EMG$, und da $MA > MC > MG$, so ist auch 1) $AF > EG$; ferner $\angle DAM > \angle CEM$, daher 2) $\angle DAF > \angle CEG$; endlich 3) $\angle AFD = \angle EGC$. Aus diesen drei Bestimmungen ergiebt sich leicht $DF > GC$, und daher, indem man $FE = AG$ hinzuaddirt, $DE > AC$, w. z. b. w.

Aus diesem Satze ergiebt sich der erstgenannte (A) dadurch, dass sich eine Transversale von gegebener Länge nur in zwei Lagen eintragen lässt, welche symmetrisch sein müssen. (Man vergl. (Taf. III. Fig. 9.).

Dieser Beweis kann auch auf das sphärische Δ angewendet werden. In Taf. III. Fig. 10. sei $\angle AMB < 180^\circ$; $BM < 90^\circ$; es sei wieder $AB > BC$, so ist $AM > MC$ und $DM > AM$, weil $MC'(=MC)$, MA und MD auf einer Seite des auf AB gefällten Lothes ML liegen. Da $AG < 180^\circ$, so erhält man $AF > EG$; ferner, wenn man $\angle AMD$ unendlich klein annimmt, $\angle AFD = \angle EGC$ und $\angle DAF > \angle GEC$, woraus $DF > GC$, und das Uebrige ganz wie beim ebenen Δ folgt.

Ist der $\angle ABC > 180^\circ$ so ändert sich nur das, dass die Transversalen um so kleiner werden, je mehr sie gegen die Halbirungslinien geneigt sind.

XVIII.

Messung einer an beiden Endpunkten unzugänglichen Entfernung nach einer besonderen Methode.

Von

dem Herausgeber.

Ich glaube, dass das Winkelkreuz oder die Kreuzscheibe ein für die elementare Feldmesskunst in vielen Fällen sehr brauchbares Instrument ist, und auch bei dem geometrischen Elementarunterrichte, mit dem nach meiner Meinung immer, so viel als thunlich, Uebungen in der Feldmesskunst zu verbinden wären, mehr als dies bisher geschehen zu sein scheint, angewandt werden sollte, namentlich auch der grössern Wohlfeilheit dieses Instruments wegen. Gewöhnlich richtet man das Winkelkreuz so ein, dass die beiden Visirlinien auf einander senkrecht stehen, und dies ist auch in der That die Einrichtung, welche die einfachste und häufigste Anwendung dieses Instruments in der praktischen, namentlich in der auf die Landwirthschaft angewandten, Feldmesskunst gestattet. Aber auch schon zwei nur einen constanten, sonst beliebigen, Winkel mit einander einschliessende Visirlinien, — la fausse Equerre d'Arpenteur, wie die Franzosen sagen, — bieten viele sehr einfache und elegante Anwendungen dar, wobei es jedoch gut ist, die Lage der beiden Visirlinien gegen einander verändern, und dem constanten Winkel eine für die vorhabende Anwendung zweckmässige Grösse geben zu können, wodurch natürlich zugleich bedingt wird, dass an dem Instrumente die nöthigen Schrauben angebracht sind, um die beiden Visirlinien, nachdem man ihrem Neigungswinkel gegen einander die für die vorhabende Anwendung zweckmässige Grösse gegeben hat, in unveränderlicher Lage gegen einander befestigen

zu können. Ich lasse mir jetzt ein solches Winkelkreuz mit zwei beweglichen Visirlinien anfertigen, bei welchem die Visirlinien durch die optischen Axen zweier kleinen astronomischen Fernröhre dargestellt werden, und werde späterhin einige mit diesem Instrumente gemachte Anwendungen, die, um die erreichte Genauigkeit beurtheilen zu können, eine Vergleichung verschiedener für dieselbe Grösse erhaltener Resultate gestatten, in dem Archive mittheilen. Die Kosten eines solchen mit zwei kleinen astronomischen Fernröhren versehenen Winkelkreuzes sind gar nicht bedeutend, wenigstens keineswegs so bedeutend, als Mancher wohl glauben möchte, da man ja jetzt kleine astronomische Fernröhre in vorzüglicher Güte um sehr geringe Preise erhalten kann. Man braucht sie, wenn man nicht will, für den vorliegenden Zweck nicht einmal achromatisch machen zu lassen.

Ich werde jetzt im Folgenden eine Auflösung der Aufgabe: „die Länge einer an ihren beiden Endpunkten unzugänglichen geraden Linie zu messen“ mit Hülfe des Winkelkreuzes geben, die ich für sehr elegant halte. Ich entlehne dieselbe der folgenden in vielen Beziehungen interessanten Schrift: Solutions peu connues de différens problèmes de Géométrie pratique; pour servir de supplément aux Traités connus de cette Science; recueillies par F. J. Servois. A Metz. An XII. p. 75., bemerke aber, dass Servois selbst sagt, dass diese Auflösung schon von Mascheroni in der Schrift: Problemi per gli Agrimensori con varie Soluzioni. Pavia. 1793. Probl. III. Soluz. 13. gegeben worden sei. Der Beweis, den ich im Folgenden für diese Auflösung geben werde, rührt von mir selbst her, da der von Servois a. a. O. gegebene Beweis auf der Trigonometrie beruhet, die ich hier absichtlich vermeiden, und mich bloss der Sätze der ebenen Geometrie bedienen wollte.

Wenn MN (Taf. IV. Fig. 1.) die zu messende Linie ist, so suche man auf dem Terrain drei Punkte A, B, C von solcher Lage auf, dass die Winkel MAN, MBN, MCN, unter denen in diesen drei Punkten die zu messende Linie MN erscheint, dem Winkel des Winkelkreuzes, und daher natürlich auch unter einander gleich sind. Dann messe man die Linien AB, AC, und suche mit dem Winkelkreuze in der Linie BC den Punkt D auf, welcher in der Linie BC eine solche Lage hat, dass der Winkel ADC gleichfalls dem Winkel des Winkelkreuzes, also auch den drei Winkeln MAN, MBN, MCN gleich ist. Misst man hierauf noch die Linie AD, so ist

$$MN = \frac{AB.AC}{AD},$$

und die Länge der zu messenden Linie MN kann folglich mittelst dieser einfachen Formel aus den gemessenen Stücken leicht berechnet werden.

Bevor wir zu dem Beweise der vorhergehenden Formel übergehen, schicken wir die folgende, übrigens zu einem anderweitig

Digitized by Google

schon allgemein bekannten Satze führende Betrachtung voraus, wozu uns nur der Wunsch veranlasst, diesen Gegenstand ganz ohne Hülfe der Trigonometrie zu behandeln.

In Taf. IV. Fig. 2. sei O der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC, dessen Seiten BC, CA, AB wir wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnen, beschriebenen Kreises. Denken wir uns nun von O auf AB das Perpendikel OC', von B auf AC das Perpendikel BB'' gefällt, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke AOC', oder BOC', und BCB'' offenbar einander ähnlich, weil der Winkel AOB doppelt so gross als der Winkel BCB'', folglich $\angle AOC' = \angle BCB''$ ist. Also ist

$$BB'' : BC = AC' : AO,$$

und folglich, wenn wir den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises durch r bezeichnen:

$$BB'' : a = \frac{1}{2}c : r,$$

also

$$r = \frac{ac}{2.BB''}.$$

Ist nun Δ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, so ist

$$\Delta = \frac{1}{2}AC.BB'', \quad BB'' = \frac{2\Delta}{AC} = \frac{2\Delta}{b},$$

und folglich, wenn man dies in den obigen Ausdruck von r einführt:

$$r = \frac{abc}{4\Delta}.$$

Denken wir uns jetzt in Taf. IV. Fig. 3. über MN als Sehne einen den Winkel des Winkelkreuzes fassenden Kreisabschnitt beschrieben, so geht der diesen Kreisabschnitt begränzende Kreisbogen nach der aus dem Obigen bekannten Construction durch die drei Punkte A, B, C hindurch, und der Kreis, welchem dieser Kreisbogen angehört, dessen Halbmesser wir durch r bezeichnen wollen, ist folglich um das Dreieck $ABC = \Delta$, dessen Seiten BC, CA, AB wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet werden sollen, beschrieben. Fällt man nun von A auf BC das Perpendikel $AE = h$, von dem Mittelpunkte O des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises auf $MN = x$ das Perpendikel OL, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ADE und MOL offenbar einander ähnlich, weil nach der Construction nothwendig der Winkel MON doppelt so gross als der Winkel des Winkelkreuzes, also auch doppelt so gross als der Winkel ADE, folglich $\angle MOL = \angle ADE$ ist. Also ist

$$AD:AE=OM:ML,$$

d. i., wenn wir noch $AD=d$ setzen:

$$d:h=r:\frac{1}{2}x,$$

woraus

$$x=\frac{2rh}{d}$$

folgt. Nun ist

$$\Delta=\frac{1}{2}ah, \text{ also } h=\frac{2\Delta}{a};$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$x=\frac{4r\Delta}{ad}.$$

Nach der oben vorausgeschickten Betrachtung ist aber

$$r=\frac{abc}{4\Delta}, \text{ also } 4r\Delta=abc.$$

Führt man dies in den vorhergehenden Ausdruck von x ein, so ergiebt sich

$$x=\frac{bc}{d},$$

und wenn man für b, c, d, x wieder die diesen Symbolen entsprechenden Linien setzt:

$$MN=\frac{AB.AC}{AD},$$

welches die zu beweisende Formel war.

Rücksichtlich der Auswählung der Punkte A, B, C wollen wir nur in der Kürze bemerken, dass es der Genauigkeit des zu erzielenden Resultats gewiss förderlich sein wird, wenn dieselben möglichst weit aus einander liegen, in Verhältniss zu der zu messenden Linie MN.

XIX.

Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische.

Von

dem Herausgeber.

I.

Wenn ich noch einmal auf diese — auch von mir selbst — schon vielfach behandelte Aufgabe zurückkomme, so wird dies gewiss in der grossen praktischen Wichtigkeit derselben seine Rechtfertigung finden. Auch lassen in der That alle bis jetzt bekannt gemachten Methoden immer noch Etwas zu wünschen übrig. Am Häufigsten wird wohl in der Praxis die Lehmann'sche Methode der sogenannten fehlerzeigenden Dreiecke angewandt. Aber auch diese Methode hat mich — ich gestehe es offen — niemals ganz befriedigt; insbesondere finden Anfänger öfters einige Schwierigkeit bei der Beurtheilung der Lage des gesuchten Punktes gegen das fehlerzeigende Dreieck, ob derselbe nämlich innerhalb oder ausserhalb, und, im letzteren Falle, auf welcher Seite dieses Dreiecks derselbe liegt, was auch wahrscheinlich Herrn Prof. Hartner in Gratz zu der neuen umfassenden und gründlichen Arbeit über diesen Gegenstand in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien. Jahrgang 1849. November- und December- Heft. S. 230. (m. s. auch Liter. Ber. Nr. LV. S. 768.) veranlasst hat, an die ich bei dieser Gelegenheit von Neuem zu erinnern mir erlauben möchte. Mich selbst haben die Wünsche, die mir bei der Anwendung der fehlerzeigenden Dreiecke stets noch übrig blieben, veranlasst, eine andere Näherungsmethode, die der fehlerzeigenden Dreiecke sich wenigstens nicht unmittelbar bedient, aufzusuchen. Diese Methode hat eine gewisse Aehnlichkeit mit einer schon früher von dem verdienten Bohnenberger in der

Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften. Band VI. S. 121. bekannt gemachten Methode. Ich sage aber absichtlich eine gewisse Aehnlichkeit. Denn Bohnenberger bedient sich in der That auch fehlerzeigender Dreiecke, die ich, wenigstens unmittelbar, gar nicht in Anwendung bringe, und die nach meiner Ansicht interessante theoretische Grundlage, von der ich bei meiner Auflösung ausgehe, kennt Bohnenberger gar nicht, so dass also, wie ich glaube, von einer Uebereinstimmung beider Methoden nicht die Rede sein kann, wenn auch allerdings meine Auflösung sehr leicht zu der Bohnenberger'schen Näherungsmethode führt, wie ich weiter unten noch besonders bemerken werde.

II.

Wir wollen uns zwei sich schneidende Kreise (Taf. IV. Fig. 4.) denken. Der eine der beiden Durchschnittspunkte sei A, der andere sei D. Von dem Durchschnittspunkte A aus ziehe man eine gerade Linie, welche den einen der beiden Kreise in b, den anderen in c schneidet. Auf diese gerade Linie wird sich unsere folgende Betrachtung hauptsächlich richten.

Die durch die Mittelpunkte der beiden Kreise gehende gerade Linie nehmen wir als Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, dessen Anfang der Mittelpunkt des einen Kreises ist. Der Halbmesser des Kreises, dessen Mittelpunkt als Anfang der Coordinaten angenommen worden ist, sei ϱ; der Halbmesser des anderen Kreises sei r. Die erste Coordinate oder sogenannte Abscisse des Mittelpunkts dieses letzteren Kreises sei a, und es wird der Einfachheit wegen, ohne der Allgemeinheit zu schaden, verstattet sein, das Coordinatensystem so anzunehmen, dass a positiv ist. Alles dieses vorausgesetzt, sind nun die Gleichungen der beiden Kreise:

$$x^2+y^2=\varrho^2,\ (x-a)^2+y^2=r^2;$$

und wenn man aus diesen Gleichungen x, y als unbekannte Grössen bestimmt, so erhält man die Coordinaten der zwei Durchschnittspunkte der beiden Kreise. Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich zuvörderst:

$$x^2+y^2-2ax=r^2-a^2,$$

also wegen der ersten Gleichung:

$$\varrho^2-2ax=r^2-a^2,$$

woraus

$$x=\frac{a^2+\varrho^2-r^2}{2a}.$$

Digitized by Google

Also ist wegen der ersten Gleichung:

$$y^2 = \varrho^2 - x^2 = \varrho^2 - \frac{(a^2 + \varrho^2 - r^2)^2}{4a^2},$$

d. i.

$$y^2 = \frac{4a^2\varrho^2 - (a^2 + \varrho^2 - r^2)^2}{4a^2},$$

woraus man mittelst einer allgemein bekannten Zerlegung auch

$$y^2 = \frac{(a+\varrho+r)(a+\varrho-r)(r+a-\varrho)(\varrho+r-a)}{4a^2}$$

erhält. Bezeichnet man den Flächeninhalt des aus a, ϱ, r als Seiten gebildeten Dreiecks durch Δ, so ist bekanntlich

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}(a+\varrho+r)(a+\varrho-r)(r+a-\varrho)(\varrho+r-a),$$

also

$$y^2 = \frac{4\Delta^2}{a^2}, \quad y = \pm\frac{2\Delta}{a};$$

und wir haben daher zur Bestimmung der Coordinaten der zwei Durchschnittspunkte der beiden Kreise die folgenden Formeln:

$$x = \frac{a^2+\varrho^2-r^2}{2a}, \quad y = \pm\frac{2\Delta}{a}.$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Coordinaten mit dem oberen Zeichen dem Punkte A, die Coordinaten mit dem unteren Zeichen dem Punkte D entsprechen, so dass also, wenn wir jene Coordinaten durch x_1, y_1; diese durch x_2, y_2 bezeichnen:

$$x_1 = \frac{a^2+\varrho^2-r^2}{2a}, \quad y_1 = +\frac{2\Delta}{a};$$

$$x_2 = \frac{a^2+\varrho^2-r^2}{2a}, \quad y_2 = -\frac{2\Delta}{a}$$

ist.

Die Gleichung der durch den Punkt A oder $(x_1\ y_1)$ gezogenen beliebigen geraden Linie sei jetzt

$$y = Ax + B,$$

so ist, weil diese Linie durch den Punkt $(x_1\ y_1)$ geht,

$$y_1 = Ax_1 + B,$$

Digitized by Google

und folglich

$$y-y_1=A(x-x_1)$$

die Gleichung dieser Linie.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser ϱ beschrieben ist, durch x, y; so haben wir zu deren Bestimmung die beiden Gleichungen:

$$x^2+y^2=\varrho^2,\ y-y_1=A(x-x_1).$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen y, so erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$x^2+\{A(x-x_1)+y_1\}^2=\varrho^2,$$

d. i.

$$x^2+\frac{2A(y_1-Ax_1)}{1+A^2}x=\frac{\varrho^2-(y_1-Ax_1)^2}{1+A^2};$$

und löst man diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so ergiebt sich mittelst leichter Rechnung:

$$x=\frac{-A(y_1-Ax_1)\pm\sqrt{(1+A^2)\varrho^2-(y_1-Ax_1)^2}}{1+A^2}.$$

Weil aber der Punkt $(x_1\ y_1)$ in dem mit dem Halbmesser ϱ beschriebenen Kreise liegt, so ist

$$x_1^2+y_1^2=\varrho^2,$$

also

$$(1+A^2)\varrho^2-(y_1-Ax_1)^2=(1+A^2)(x_1^2+y_1^2)-(y_1-Ax_1)^2,$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$(1+A^2)\varrho^2-(y_1-Ax_1)^2=(x_1+Ay_1)^2,$$

folglich nach dem Obigen

$$x=\frac{-A(y_1-Ax_1)\pm(x_1+Ay_1)}{1+A^2}$$

ergiebt. Das obere Zeichen liefert $x=x_1$, und entspricht folglich dem Punkte $(x_1\ y_1)$. Will man also die erste Coordinate oder Abscisse des anderen Durchschnittspunktes unserer geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser ϱ beschrieben ist, haben, so muss man das untere Zeichen nehmen, wodurch man für diesen Durchschnittspunkt

Digitized by Google

$$x = -\frac{x_1 + Ay_1 + A(y_1 - Ax_1)}{1+A^2}$$

oder

$$x - x_1 = -\frac{2(x_1 + Ay_1)}{1+A^2}$$

erhält; und weil nun nach dem Obigen

$$y - y_1 = A(x - x_1)$$

ist, so hat man zur Bestimmung von x, y die Ausdrücke:

$$x - x_1 = -\frac{2(x_1 + Ay_1)}{1+A^2}, \quad y - y_1 = -\frac{2A(x_1 + Ay_1)}{1+A^2}.$$

Bezeichnen wir ferner die Coordinaten der Durchschnittspunkte unserer geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser r beschrieben worden ist, wieder durch x, y selbst; so haben wir zu deren Bestimmung die beiden Gleichungen:

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2, \quad y - y_1 = A(x - x_1).$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen y, so erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$(x-a)^2 + \{A(x-x_1) + y_1\}^2 = r^2,$$

d. i.

$$x^2 + 2\frac{A(y_1 - Ax_1) - a}{1+A^2}x = \frac{r^2 - a^2 - (y_1 - Ax_1)^2}{1+A^2};$$

und löst man diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Art auf, so ergiebt sich mittelst leichter Rechnung:

$$x = \frac{-\{A(y_1 - Ax_1) - a\} \pm \sqrt{(1+A^2)r^2 - \{y_1 - A(x_1 - a)\}^2}}{1+A^2}.$$

Weil aber der Punkt $(x_1\ y_1)$ in dem mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise liegt, so ist

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2,$$

also

$$(1+A^2)r^2 - \{y_1 - A(x_1 - a)\}^2 = (1+A^2)\{(x_1 - a)^2 + y_1^2\} - \{y_1 - A(x_1 - a)\}^2,$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$(1+A^2)r^2 - \{y_1 - A(x_1 - a)\}^2 = (x_1 - a + Ay_1)^2,$$

folglich nach dem Obigen

Digitized by Google

$$x=\frac{-|A(y_1-Ax_1)-a|\pm|(x_1+Ay_1)-a|}{1+A^2}$$

ergiebt. Das obere Zeichen liefert $x=x_1$, und entspricht folglich dem Punkte $(x_1\ y_1)$. Will man also die erste Coordinate oder Abscisse des anderen Durchschnittspunkts unserer geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser r beschrieben worden ist, haben, so muss man das untere Zeichen nehmen, wodurch man für diesen Durchschnittspunkt

$$x=-\frac{|A(y_1-Ax_1)-a|+|(x_1+Ay_1)-a|}{1+A^2}$$

oder

$$x-x_1=\frac{2|a-(x_1+Ay_1)|}{1+A^2}$$

erhält; und weil nun nach dem Obigen

$$y-y_1=A(x-x_1)$$

ist, so hat man zur Bestimmung von x, y die Ausdrücke:

$$x-x_1=\frac{2|a-(x_1+Ay_1)|}{1+A^2},\quad y-y_1=\frac{2A|a-(x_1+Ay_1)|}{1+A^2}.$$

Ist jetzt jetzt b in Taf. IV. Fig. 4. der Durchschnittspunkt unserer geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser ϱ beschrieben worden ist, dagegen c in derselben Figur der Durchschnittspunkt dieser geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser r beschrieben worden ist, und bezeichnen wir die Coordinaten dieser beiden Punkte respective durch x_b, y_b und x_c, y_c; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$x_b-x_1=-\frac{2(x_1+Ay_1)}{1+A^2},\quad y_b-y_1=-\frac{2A(x_1+Ay_1)}{1+A^2}$$

und

$$x_c-x_1=\frac{2|a-(x_1+Ay_1)|}{1+A^2},\quad y_c-y_1=\frac{2A|a-(x_1+Ay_1)|}{1+A^2}.$$

Also ist

$$x_b-x_c=-\frac{2a}{1+A^2},\quad y_b-y_c=-\frac{2Aa}{1+A^2}.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung der beiden Punkte b und c oder $(x_b\ y_b)$ und $(x_c\ y_c)$ von einander, d. i. die Linie bc in Taf. IV. Fig. 4., durch E, so ist

$$E^2=(x_b-x_c)^2+(y_b-y_c)^2,$$

d. i. nach dem Obigen

$$E^2=\frac{4a^2}{1+A^2},$$

folglich, weil unter den gemachten Voraussetzungen bekanntlich a positiv ist:

$$E=\frac{2a}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Von dem Punkte D oder $(x_2\ y_2)$ wollen wir uns jetzt auf die durch den Punkt A oder $(x_1\ y_1)$ gelegte gerade Linie ein Perpendikel gefällt denken, und die Länge dieses Perpendikels durch P, die Coordinaten seines Fusspunktes in der in Rede stehenden Linie aber durch x, y bezeichnen. Die Gleichung dieses Perpendikels ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$y-y_2=-\frac{1}{A}(x-x_2),$$

und zur Bestimmung der Coordinaten x, y hat man daher die beiden Gleichungen:

$$y-y_1=A(x-x_1),$$

$$y-y_2=-\frac{1}{A}(x-x_2);$$

oder

$$y-y_1=A(x-x_1),$$

$$y-y_1+(y_1-y_2)=-\frac{1}{A}\{x-x_1+(x_1-x_2)\};$$

oder auch

$$y-y_2-(y_1-y_2)=A\{x-x_2-(x_1-x_2)\},$$

$$y-y_2=-\frac{1}{A}(x-x_2).$$

Weil aber nach dem Obigen

$$x_1-x_2=0,\ y_1-y_2=\frac{4\Delta}{a}$$

ist; so werden diese Gleichungen:

$$y-y_1=A(x-x_1),$$

$$y-y_1+\frac{4\Delta}{a}=-\frac{1}{A}(x-x_1);$$

und

$$y-y_2-\frac{4\Delta}{a}=A(x-x_2),$$

Digitized by Google

$$y-y_2=-\frac{1}{A}(x-x_2).$$

Also ist

$$1+\frac{4\Delta}{a(y-y_1)}=-\frac{1}{A^2},$$

$$1-\frac{4\Delta}{a(y-y_2)}=-A^2;$$

folglich

$$y-y_1=-\frac{4A^2\Delta}{a(1+A^2)},\quad y-y_2=\frac{4\Delta}{a(1+A^2)}.$$

Also ist

$$x-x_1=-\frac{4A\Delta}{a(1+A^2)},\quad y-y_1=-\frac{4A^2\Delta}{a(1+A^2)}$$

und

$$x-x_2=-\frac{4A\Delta}{a(1+A^2)},\quad y-y_2=\frac{4\Delta}{a(1+A^2)}.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung des Fusspunktes des Perpendikels P von dem Punkte A oder $(x_1\ y_1)$ durch Q; so ist

$$Q^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2,\quad P^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2;$$

also nach dem Obigen, wie man leicht findet,

$$Q^2=\frac{16A^2\Delta^2}{a^2(1+A^2)},\quad P^2=\frac{16\Delta^2}{a^2(1+A^2)};$$

woraus

$$Q=\pm\frac{4A\Delta}{a\sqrt{1+A^2}},\quad P=\frac{4\Delta}{a\sqrt{1+A^2}};$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse A positiv oder negativ ist.

Weil nun nach dem Obigen

$$E=\frac{2a}{\sqrt{1+A^2}}$$

ist, so ist

$$\frac{E}{P}=\frac{a^2}{2\Delta},$$

und daher dieses Verhältniss ein von der Lage der durch den Punkt A oder $(x_1\ y_1)$ gezogenen geraden Linie unabhängiges, insofern also constantes Verhältniss, was unmittelbar zu dem folgenden geometrischen Satze führt:

Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise sich schneiden, und man von dem einen ihrer beiden Durchschnittspunkte aus eine, jeden der beiden Kreise ein zweites Mal schneidende gerade Linie zieht, so ist das Verhältniss zwischen der Entfernung der zwei Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit den beiden Kreisen von einander und dem von dem anderen Durchschnittspunkte der beiden Kreise auf die in Rede stehende gerade Linie gefällten Perpendikel von der Lage der geraden Linie unabhängig, und insofern also ein constantes Verhältniss.

Dies ist der Satz, von dem wir im Folgenden eine Anwendung auf das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische machen werden. Vorher wollen wir jedoch die folgenden geometrischen Bemerkungen dem Vorhergehenden noch beifügen.

Wenn man aus den beiden Gleichungen

$$E^2=\frac{4a^2}{1+A^2},\quad Q^2=\frac{16A^2\Delta^2}{a^2(1+A^2)}$$

die Grösse A^2 eliminirt, so erhält man die Relation

$$\frac{4a^2-E^2}{Q^2}=\frac{a^4}{4\Delta^2};$$

und da nun nach dem Obigen

$$\frac{E^2}{P^2}=\frac{a^4}{4\Delta^2}$$

ist, so ist

$$\frac{4a^2-E^2}{Q^2}=\frac{E^2}{P^2},$$

woraus sich die bemerkenswerthe Relation

$$4a^2P^2=E^2(P^2+Q^2)$$

Digitized by Google

oder

$$a=\frac{E\sqrt{P^2+Q^2}}{2P}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise durch S, so ist

$$S^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

also nach dem Obigen

$$S^2=(y_1-y_2)^2=\frac{16\Delta^2}{a^2},$$

folglich

$$S=\frac{4\Delta}{a}.$$

Daher ist

$$\frac{2\Delta}{a^2}=\frac{S}{2a},\quad \frac{a^2}{2\Delta}=\frac{2a}{S};$$

also nach dem Obigen

$$\frac{E}{P}=\frac{2a}{S}$$

oder

$$E:P=2a:S,$$

welche Proportion ein Jeder sogleich wird in Worten aussprechen können.

Auch ist

$$\frac{a^4}{4\Delta^2}=\frac{4a^2}{S^2},$$

also nach dem Obigen

$$\frac{4a^2-E^2}{Q^2}=\frac{4a^2}{S^2},$$

woraus sich

Wenn man die oben beschriebene Operation bei zwei verschiedenen Lagen des Tischblattes vornimmt, so kann man sich leicht zwei solche Paare von Punkten wie *bc* und *b'c'* verschaffen, und dass dies geschehen sei, wollen wir von nun an voraussetzen. Dies aber vorausgesetzt, erhellet aus einer blossen Betrachtung von Taf. IV. Fig. 5. auf der Stelle, dass, jenachdem die beiden Paare *bc* und *b'c'* gegen *A* symmetrisch oder unsymmetrisch liegen, der gesuchte Punkt *D* nicht zwischen den beiden, natürlich stets gehörig verlängert gedachten Linien *bc* und *b'c'*, oder zwischen diesen beiden stets gehörig verlängert gedachten Linien liegt. Hat sich aber aus einer nach den vorhergehenden Regeln äusserst leicht anzustellenden Beurtheilung ergeben, dass der gesuchte Punkt *D* nicht zwischen den beiden immer gehörig verlängert gedachten Linien *bc* und *b'c'* liegt, und daher auf einer und derselben Seite dieser beiden Linien gesucht werden muss, so erhellet sowohl aus einer blossen Betrachtung von Taf. IV. Fig. 5., als auch aus dem in II. bewiesenen geometrischen Lehrsatze, nach welchem die von dem Punkte *D* auf die Linien *bc* und *b'c'* gefällten Perpendikel zu diesen Linien selbst ein und dasselbe constante Verhältniss haben, dass der Punkt *D* immer auf der Seite der kleineren der beiden Linien *bc* und *b'c'* gesucht werden muss, auf welcher die grössere dieser beiden Linien nicht liegt.

Denken wir uns jetzt durch die beiden Punkte *A* und *D* eine gerade Linie gezogen, so erhellet durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung auf der Stelle, dass die beiden von einem jeden ganz beliebigen Punkte in dieser Linie auf die gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* gefällten Perpendikel in demselben Verhältnisse zu einander stehen wie die beiden von dem Punkte *D* auf die gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* gefällten Perpendikel. Also werden nach dem in II. bewiesenen geometrischen Lehrsatze die beiden von einem ganz beliebigen Punkte in der durch *A* und *D* gehenden geraden Linie auf die beiden gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* gefällten Perpendikel sich jederzeit eben so zu einander verhalten, wie beziehungsweise die beiden Linien *ab* und *a'b'* sich selbst zu einander verhalten; und bestimmt man also, nachdem man nach dem Vorhergehenden die Lage des Punktes *D*, und demnach auch überhaupt die Lage der Linie *AD*, gegen die beiden gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* bereits ermittelt hat, entweder nach dem Augenmaasse oder durch genaue geometrische Construction einen Punkt auf dem Messtische so, dass dessen Entfernungen von den gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* sich eben so zu einander verhalten, wie beziehungsweise die Linien *ab* und *a'b'* sich selbst zu einander verhalten, so wird der auf diese Weise erhaltene Punkt ein Punkt in der durch *A* und *D* gehenden geraden Linie sein. Legt man also dann die Kippregel an diesen Punkt und an den Punkt *A* an, und orientirt hierauf das Tischblatt nach 𝔄, so wird dasselbe richtig orientirt sein, und dann also auch ferner der Punkt *D* selbst leicht erhalten werden können, wenn man nur die Kippregel an *B* oder *C* legt, und respective nach 𝔅 oder ℭ visirt, was allgemein genug bekannt ist, als dass es hier noch einer weiteren Ausführung bedürfte.

Man kann, wenn es der Raum auf dem Tischblatte zulässt und es überhaupt als zweckmässig erscheint, worüber sich im Allgemeinen nichts festsetzen lässt, den in Rede stehenden Punkt auf dem Tische auch so bestimmen, dass seine Entfernungen von den gehörig verlängert gedachten Linien ab und $a'b'$ diesen beiden Linien ab und $a'b'$ beziehungsweise gleich sind.

Ein hinreichend geübtes Augenmaass wird, glaube ich, bei der Bestimmung des in Rede stehenden Punktes meistens ausreichen; aber auch wenn man sich darauf nicht verlassen wollte oder könnte, würde dieser Punkt stets durch eine genaue geometrische Construction erhalten werden können, die in der Ausführung so leicht und einfach ist, dass man wohl noch wagen darf, sie den bei Messtischoperationen auf dem Felde beschäftigten praktischen Geometern aufzubürden. Man braucht ja bloss auf den gehörigen Seiten der Linien ab und $a'b'$ in Entfernungen von denselben, die entweder diesen Linien selbst, oder gewissen, mittelst des Zirkels zu bestimmenden, gleichvielten aliquoten Theilen, oder endlich auch gewissen Gleichvielfachen derselben gleich sind, mit Hülfe von Lineal und Dreieck mit den Linien ab und $a'b'$ zwei Parallellinien zu ziehen und deren Durchschnittspunkt zu bestimmen, welcher der gesuchte, zur richtigen Orientirung des Tisches erforderliche Punkt sein wird. Jedoch wird, wie gesagt, gewiss in den meisten Fällen ein geübtes Augenmaass ausreichen, wenn man namentlich die vorhergehende Methode als eine successive Annäherungsmethode betrachtet, die nur erst nach einigen Wiederholungen zu einer vollständig richtigen Orientirung des Tisches führt. Auch werden noch manche Vortheile jedem in der Anwendung des Rückwärtseinschneidens schon geübten Praktiker sich gewiss ganz von selbst ergeben.

Wenn die Linien bc und $b'c'$ sich beide auf einen Punkt zusammenziehen, so wird dies jederzeit ein sicheres Zeichen sein, dass die vier Punkte A, B, C, D auf einer und derselben Kreisperipherie liegen, und daher die Aufgabe eine unbestimmte ist*). Zöge sich dagegen nur die eine der beiden Linien bc und $b'c'$ auf einen Punkt zusammen, so würde eben dieser Punkt der gesuchte Punkt D, und eine weitere Fortsetzung der Operation daher nicht nöthig sein.

Wenn man die Linien bc und $b'c'$ näherungsweise als einander parallel anzusehen sich berechtigt halten darf, und dieselben symmetrisch gegen den Punkt A liegen, so erhellet mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung aus dem Obigen sogleich, dass der Durchschnittspunkt der gehörig verlängerten Linien bb' und cc' näherungsweise der oben angegebenen Bedingung

*) Da nämlich bc und $b'c'$ jetzt Punkte sind, die wir durch (bc) und $(b'c')$ bezeichnen wollen, so geht der durch A, B, D beschriebene Kreis durch die Punkte A, B, D, (bc), $(b'c')$, der durch A, C, D beschriebene Kreis durch die Punkte A, C, D, (bc), $(b'c')$. Also gehen beide Kreise durch dieselben vier Punkte A, D (bc), $(b'c')$, und fallen daher mit einander zusammen.

rücksichtlich seiner Entfernungen von den Linien bc und $b'c'$ genügen wird, und daher zur näherungsweisen Orientirung des Messtisches in der oben angegebenen Weise benutzt werden kann. Können dagegen die Linien bc und $b'c'$ näherungsweise als einander parallel betrachtet werden, und liegen unsymmetrisch gegen den Punkt A, so erhellet eben so leicht wie vorher, dass wieder der Durchschnittspunkt der beiden Linien bb' und cc' zur näherungsweisen Orientirung des Messtisches benutzt werden kann. Wie es nach dem Obigen bekanntlich erforderlich ist, liegt der Durchschnittspunkt der beiden Linien bb' und cc' im ersten Falle nicht zwischen den beiden Linien bc und $b'c'$, im zweiten Falle dagegen zwischen diesen beiden Linien. Dies ist eigentlich im Wesentlichen die oben erwähnte, von Bohnenberger angegebene Näherungsmethode, die, wie es uns scheint, in der von uns oben entwickelten genauen Methode ihren wahren Grund hat.

Ueber die obige Methode uns noch weiter zu verbreiten, oder dieselbe, wie vielleicht mancher Praktiker wünschen möchte, für den praktischen Gebrauch hier nochmals im Zusammenhange darzustellen, halten wir für unnöthig. Auch wird der wahre, theoretisch gehörig gebildete Praktiker gewiss selbst leicht noch auf manche erweiterte Anwendungen unserer Methode kommen. Ich erwähne daher nur noch zum Schluss, dass ich die in II. gegebenen Entwickelungen hier absichtlich auf demselben Wege gegeben habe, welcher mich zu denselben geführt hat, nämlich im Gewande der analytischen Geometrie. Vielleicht ist eine einfache elementare Darstellung durch die synthetische Geometrie möglich, der ich, wenn man sie mir mitzutheilen die Güte haben sollte*), gern einen Platz im Archive einräumen würde, und daher die Leser dieser Zeitschrift zu einer desfallsigen Untersuchung aufzufordern mir erlauben möchte, weil ich allerdings der Meinung bin, dass die aus den in II. angestellten theoretischen Betrachtungen in III. hergeleitete praktische Methode des Rückwärtseinschneidens mit dem Messtische ihrer Einfachheit wegen wohl verdient, dass sie durch eine hinreichend elementare und leichte theoretische Betrachtung auch in ihren Gründen einer möglichst grossen Anzahl von Praktikern zugänglich gemacht werde.

*) Dass dazu Hoffnung vorhanden ist, habe ich oben schon bemerkt.

Digitized by Google

XX.

Ueber eine neue Art, die Gesetze der Fortpflanzung und Polarisation des Lichtes in optisch zweiaxigen Medien darzustellen.

Von

Herrn Dr. Beer,

Privatdocenten an der Universität zu Bonn.

Das Bedürfniss von Modellen bei dem Studium der Doppel-Brechung hat sich unter Anderem durch die Erfindung verschiedener Darstellungs-Arten der Wellenfläche optisch zweiaxiger Krystalle bekundet. Unter diesen sind als die vollkommensten diejenigen Modelle zu betrachten, welche sich nach den wichtigsten Schnitten jener Fläche aus einander schlagen lassen, und deren Masse den zwischen den beiden Schalen der Fläche befindlichen Raum ausfüllt, so dass sie in ihrer Convexität und Concavität eine vollständige Vorstellung der Wellenform vermitteln. Eine andere Art besteht aus zwei Theilen, von denen der eine durch die innere Schale oder durch einen Theil derselben, z. B. einen Octanten, und durch die Hauptschnitte, der andere durch die äussere Schale begrenzt wird. Noch einfacher ist die Darstellung mittelst Platten von Pappe, auf denen Schnitte der Fläche gezeichnet sind, oder mittelst Drähten, die den Umfang solcher Schnitte angeben. Dieser Aufsatz ist der Angabe einer neuen Art, die Gesetze der Fortpflanzung und Polarisation des Lichtes in doppelbrechenden Mitteln sowohl mittelst eines leicht herzustellenden Modelles, als auch mittelst der Zeichnung darzustellen, gewidmet. Wir schicken der Beschreibung einige begründende mathematische Betrachtungen voraus.

1. Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2, mit welchen sich zwei parallele ebene Wellen in einem optisch zweiaxigen Mittel nach der Richtung ihrer gemeinsamen Normale fortpflanzen, werden bekanntlich aus folgenden Gleichungen gefunden:

$$1)\quad v_1^2 = s + t\cos(u_1 + u_2), \qquad 2)\quad v_2^2 = s + t\cos(u_1 - u_2).$$

Legen wir in Taf. V. Fig. 1. durch einen Punkt O als Mittelpunkt zwei Gerade A_1A_1' und A_2A_2' nach den Richtungen der beiden optischen Axen für ebene Wellen (der wahren optischen Axen), so bedeuten u_1 und u_2 die Winkel, welche eine durch O mit der gemeinsamen Normale der beiden Fronten parallel gelegte gerade Linie ON bezüglich mit OA_1 und OA_2 bildet; der Werth von s ist immer positiv, während t, absolut genommen kleiner als s, positiv wird, wenn die Halbirungs-Linie des Winkels A_1OA_2 mit der Axe der kleinsten Elasticität, und negativ wird, wenn sie mit der Axe der grössten Elasticität zusammenfällt. Die Schwingungen der Wellen-Front, deren Geschwindigkeit v_1 ist, stehen auf ON senkrecht und liegen in einer Ebene, welche durch ON gehend, den Winkel N des körperlichen Dreiecks A_1NA_2 halbirt. Die Schwingungen der zweiten Welle stehen auf denen der ersten senkrecht und liegen wie jene in der Wellen-Ebene. Bezeichnen wir den Winkel, welcher von der Normale ON und der Linie OA_2' eingeschlossen wird, durch u_2', so wird $u_2 + u_2' = 180^0$, und an die Stelle der Gleichung 2) können wir die folgende treten lassen:

$$2')\quad v_2^2 = s - t\cos(u_1 + u_2').$$

Der Ort der Normalen nun, für welche v_1 denselben Werth besitzt, d. i. der Normalen, deren erste Wellen-Ebenen sich mit gleicher Geschwindigkeit in dem krystallinischen Mittel fortpflanzen, ist offenbar ein Kegel des zweiten Grades, dessen Spitze in O liegt, dessen Axe mit der Halbirungs-Linie des Winkels A_1OA_2 coincidirt, und dessen Brenn-Linien die optischen Axen A_1A_1' und A_2A_2' sind. Ebenso bildet andererseits die stetige Aufeinanderfolge der Normalen, deren zweite Wellen-Fronten sich mit derselben Geschwindigkeit v_2 fortbewegen, einen elliptischen Kegel, dessen Mittelpunkt O ist, dessen Haupt-Axe den Winkel A_1OA_2' halbirt, und dessen Focal-Linien die Geraden A_1A_1' und A_2A_2' sind. Die beiden erwähnten Kegel sind hiernach confocal und stehen mit ihren Hauptaxen auf einander senkrecht. Einem jeden anderen Werthe von v_1 und v_2 entspricht ein anderer Kegel der ersten und der zweiten Art; wir erhalten also zwei Gruppen confocaler Kegelflächen, die wir Geschwindigkeits-Kegel nennen wollen. Die Entwicklung der Gleichungen dieser Kegel ist leicht; es handle sich z. B. um die Herstellung der Gleichung für die Kegel der ersten Gruppe. Wir lassen die z-Axe eines rechtwinkligen Coordinaten-Systemes mit der Halbirungs-Linie des Winkels A_1OA_2, die x-Axe mit der Halbirungs-Linie des Winkels A_1OA_2' zusammenfallen; es kommt alsdann die y-Axe auf die Ebene der optischen Axen senkrecht zu stehen. Da nun für sämmtliche Seiten eines Kegels der ersten Gruppe als Normale ebener Wellen

v_1^2 denselben Werth behalten soll, so hat man, unter l eine die Rolle des Parameters spielende Constante verstanden, die kleiner als $\cos A_1OA_2$ ist,

$$\cos(u_1+u_2)=l,$$

woraus sich ergibt:

$$\cos u_1^2+\cos u_2^2-2l.\cos u_1\cos u_2=1-l^2.$$

Bezeichnen wir die Entfernung eines Punktes des Kegels vom Anfangs-Punkte O durch r, seine Coordinaten durch x, y und z, sowie den Winkel A_1OA_2 durch $2n$, so ist, wie leicht einzusehen,

$$\cos u_1=\frac{x}{r}\cdot\sin n+\frac{z}{r}\cdot\cos n,\ \cos u_2=-\frac{x}{r}\cdot\sin n+\frac{z}{r}\cdot\cos n.$$

Hieraus und aus der so eben gefundenen Relation zwischen $\cos u_1$ und $\cos u_2$ ergibt sich für die Gleichung des Kegels vom Parameter l die folgende:

$$K_1\equiv -x^2(1+l)(\cos 2n-l)-y^2(1-l^2)+z^2(1-l)(\cos 2n-l)=0.$$

Auf ganz demselben Wege findet man die folgende Gleichung der zweiten Gruppe der Geschwindigkeits-Kegel:

$$K_2\equiv x^2(1-l)(\cos 2n+l)+y^2(1-l^2)-z^2(1+l)(\cos 2n+l)=0.$$

Es ist hier l immer negativ und kleiner als $-\cos 2n$ zu nehmen; aber weder für die Kegel K_1, noch für K_2 darf der Grösse l als einem Cosinus ein Werth beigelegt werden, der, absolut genommen, die Einheit übersteigt.

Die Hauptaxe der Kegel K_1 fällt ersichtlich mit der z-Axe zusammen, halbirt also den Winkel A_1OA_2, während die der Kegel K_2 den Winkel A_1OA_2' in zwei gleiche Theile theilt. Dass sämmtliche Kegel die optischen Axen als Focal-Linien besitzen, geht aus dem Umstande hervor, dass die Summe der Winkel, den eine Seite der Kegel mit jenen Geraden einschliesst, für denselben Kegel eine constante Grösse behält. Für die erste Gruppe besteht ein Grenz-Kegel, derjenige nämlich, dessen Parameter l den Werth $\cos 2n$ hat, in den Stücken A_1OA_2 und $A_1'OA_2'$ der Ebene xz; die andere Grenze ist die Ebene xy; dieser entspricht als Parameter $l=-1$. Die Grenzen der Kegel K_2 sind die Stücke A_1OA_2' und A_2OA_1' der Ebene der optischen Axen, für $l=-\cos 2n$, und der Hauptschnitt yz, für $l=-1$.

2. Wir wollen annehmen, es sei die Halbirungs-Linie des Winkels A_1OA_2 die Axe der kleinsten optischen Elasticität, alsdann ergibt sich für die erste Grenze der Kegel K_1 das Quadrat der Fortpflanzungs-Geschwindigkeit $v_1^2=s+t\cos 2n$. Dasselbe nimmt an Grösse für die folgenden Kegel immer mehr ab und erreicht an der zweiten Grenze den Minimums-Werth $s-t$. Die dem ersten Grenz-Kegel der zweiten Gruppe entsprechende Ge-

schwindigkeit wird bestimmt durch die Gleichung $r_2^2 = s + t\cos 2n$; sie wächst, während sich die Geschwindigkeits-Kegel erweitern, und ihr Quadrat nähert sich dem Maximum $s + t$, welches an der zweiten Grenze erreicht wird. Alles dies gilt, abgesehen davon, ob der Winkel $A_1 O A_2$ spitz oder stumpf oder ein Rechter ist, also für positive und negative Krystalle und für den Uebergangsfall, in welchem die beiden optischen Axen auf einander senkrecht stehen.

Aus den in 1. gemachten Bemerkungen über die Oscillations-Ebene der Wellen folgt, dass die Schwingungen, welche einem Geschwindigkeits-Kegel entsprechen, nach den Richtungen seiner Normalen vor sich gehen.

3. Fallen die beiden optischen Axen $A_1 A_1'$ und $A_2 A_2'$ in die z-Axe, diese immer als Axe der kleinsten Elasticität gedacht, so ist das Mittel optisch einaxig und positiv. Es kann alsdann von der zweiten Gruppe der Geschwindigkeits-Kegel nicht mehr die Rede sein; r_2^2 behält den constanten Werth $s + t$ und entspricht den ordentlichen Wellen, deren Schwingungsrichtungen auf der einzigen optischen Axe senkrecht stehen. Die Gleichung der Kegel K_1 gestaltet sich nun in:

$$(x^2 + y^2)(1 + l) - z^2(1 - l) = 0.$$

Die Kegel K_1 gehen in Rotations-Kegel über, deren Axen mit der optischen Axe zusammenfallen. Für den einen Grenzkegel, welcher hier die optische Axe ist, erlangt auch r_1^2 den Werth $s + t$. Indem sich die Kegel öffnen, wird es kleiner und erreicht an der zweiten Grenze, in dem auf der Axe senkrechten Hauptschnitte, das Minimum $s - t$.

Wir überheben uns der Betrachtung des Falles, wo beide Axen $A_1 A_1'$ und $A_2 A_2'$ in die x-Axe fallen, da dann das Mittel in ein optisch einaxiges negatives übergeht.

4. Die in den vorhergehenden Nummern mitgetheilten Betrachtungen über die Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten und Oscillations-Ebenen der Wellen-Fronten übertragen sich ohne Weiteres auf dieselben Attribute der Licht-Strahlen, wenn wir an die Stelle der wahren optischen Axen die scheinbaren, an die Stelle der Normale einer Lichtwelle die Richtung des Strahles treten lassen. Wir erhalten, dem Früheren analog, Geschwindigkeits-Kegel des zweiten Grades, deren Brennlinien die scheinbaren optischen Axen (die optischen Axen für Strahlen) sind, und die den einzelnen Seiten eines solchen Kegels entsprechende Oscillations-Ebene ist eine Normal-Ebene dieser Fläche.

5. Um O als Mittelpunkt werde eine Kugel S von dem Radius 1 gelegt. Diese Kugel wird von den Geschwindigkeits-Kegeln K_1 für ebene Wellen in zwei Gruppen confocaler sphärischer Ellipsen E_1 geschnitten, deren gemeinsame doppelte Excentricitäten bezüglich die Bogen $A_1 A_2$ und $A_1' A_2'$ grösster Kreise sind. Zwei andere Gruppen solcher sphärischer Linien E_2 erhalten wir als Durchschnitte der Kugel S und der Kegel K_2: die

Digitized by Google

gemeinsamen Brennpunkte derselben sind einerseits A_1 und A_2', andererseits A_2 und A_1'. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$K_1 \equiv \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0,$$

so ist:

$$K_2 \equiv -\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0,$$

wo man dann hat:

$$\gamma^2 > \alpha^2 > \beta^2.$$

Die Projectionen der Curven E_1 und E_2 auf die drei Hauptschnitte werden nun durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$E_1 \begin{cases} x^2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{1}{\gamma^2}, \\ x^2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) - z^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) = -\frac{1}{\beta^2}, \\ y^2\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - z^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{1}{\alpha^2}; \end{cases}$$

$$E_2 \begin{cases} -x^2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) = -\frac{1}{\gamma^2}, \\ -x^2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) = -\frac{1}{\beta^2}, \\ y^2\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2}. \end{cases}$$

Wir ersehen hieraus:

Erstens, dass die Projectionen der Geschwindigkeits-Curven (so nämlich wollen wir die sphärischen Ellipsen nennen) auf die Ebene der optischen Axen (die Ebene xz) in zwei Reihen von Ellipsen bestehen, deren Axen mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen, und die den Schnitt xz der Kugel im Allgemeinen schneiden. Die eine Grenz-Curve der ersten Reihe, welche den Curven E_1 entspricht, ist die Axe der x, die andere Grenz-Curve der Schnitt xz der Kugel. Sämmtliche Durchschnitts-Punkte dieser Curven und des Schnittes xz der Kugel sind auf den Kreis-Bogen A_1A_2' und A_2A_1' befindlich. Die erste Grenze der zweiten Reihe, die zu den Curven E_2 gehört, ist die z-Axe, die zweite wiederum der Schnitt xz der Kugel; die Durchschnitte dieser Ellipsen und der Kugel liegen auf den Kreis-Bogen A_1A_2 und $A_1'A_2'$.

Zweitens. Die Projectionen der Geschwindigkeits-Curven auf die Ebene xy bestehen erstlich aus einem System von Ellipsen, die, einander umschliessend, zu Grenzen haben einerseits den Kreis, in welchem die Kugel von der Projections Ebene geschnitten wird, andererseits die Verbindungslinie der Projectionen α_1 und α_2 der Brennpunkte der sphärischen Ellipsen (der Durchschnittspunkte der optischen Axen und der Kugel S). Diese Ellipsen entsprechen den Curven E_1; ihre Axen fallen mit den Coordinaten-Axen zusammen. Der Gruppe E_2 entspricht ein System von Hyperbeln, deren reelle Axe in die x-Axe fällt, und deren eine Grenze die y-Axe, deren andere die über α_1 und α_2 hinaus gelegenen Theile der x-Axe sind.

Drittens. Die Curven E_1 stellen sich in ihren Projectionen auf die Ebene yz als Hyperbeln dar, deren reelle Axen mit der z-Axe zusammenfallen. Die Grenzen derselben sind die über β_1 und β_2, den Projectionen der Brennpunkte der sphärischen Ellipsen, hinausgelegenen Theile der z-Axe und die y-Axe. Die Curven E_2 endlich projiciren sich als Ellipsen mit gleich gerichteten Axen, deren Grenzen der Schnitt yz der Kugel und das Stück $\beta_1\beta_2$ der z-Axe sind.

6. Die gewonnenen Resultate liefern uns nun folgende neue Darstellungsart der Gesetze, nach welchen die Licht-Bewegung in doppelbrechenden Körpern vor sich geht. Auf eine Kugel tragen wir die Durchschnitte A_1, A_2, A_1' und A_2' der optischen Axen auf und beschreiben auf derselben eine Anzahl der sphärischen Ellipsen E_1 und E_2, deren Brennpunkte in A_1 und A_2, sowie in A_1 und A_2' liegen. Die Operation bei der Zeichnung dieser Curven ist durchaus gleichlaufend mit derjenigen, welche man bei dem Zeichnen ebener Ellipsen vorzunehmen hat, mag man nun einzelne Punkte der Linien construiren, oder diese mit Hülfe zweier Stifte und eines Fadens ohne Ende verzeichnen. Zur Unterscheidung weisen wir einer jeden der beiden Gruppen E_1 und E_2 ihre eigene Tinte an, und wir wählen die gegenseitigen Entfernungen der Curven so, dass sie die Oberfläche der Kugel möglichst gleichförmig und in Bezug auf die drei Hauptschnitte symmetrisch in viereckige Felder theilen. Die so erhaltenen Geschwindigkeits-Curven geben uns die Richtungen gleicher Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten ebener Wellen und gewähren uns ein Bild von den Gesetzen der Polarisation in einem zweiaxigen Krystalle. Nach den Richtungen aller Radien nämlich, welche in den Punkten einer der Curven auslaufen, pflanzen sich diejenigen Wellen-Fronten mit gleicher Geschwindigkeit fort, deren Schwingungs-Richtungen auf jenen Radien und gleichzeitig auf der Curve senkrecht stehen. Um aber eine Anschauung von der Art und Weise zu erlangen, wie jene Geschwindigkeit von einer Curve zur anderen wächst oder abnimmt, können wir eines der beiden Verfahren anwenden, deren Beschreibung wir folgen lassen. Wir können erstlich zu beiden Seiten des Durchschnittes P zweier Curven E_1 und E_2 der beiden Systeme nach der Richtung der Tangente an die eine Curve Stücke auftragen, die der Geschwindigkeit der anderen Curve proportional sind, und diese Operation in allen Knotenpunkten der Systeme wiederholen. Der Ueberblick wird

Digitized by Google

erleichtert, und es wird dem Geschmacke dadurch Rechnung getragen, dass man über den auf die angegebene Art erhaltenen kleinen Geraden als Axen Ellipsen construirt. Die Axen einer solchen kleinen Ellipse sind alsdann den Axen der Durchschnitts-Curve parallel und proportional, in welchen die mit der Kugel concentrisch gedachte Elasticitäts-Fläche von einer Diamentral-Ebene geschnitten wird, die mit der Ebene parallel ist, welche die Kugel in dem Mittelpunkte P der Ellipse berührt: diese ist aber die zu OP als Normalen gehörige Wellen-Front. Ein zweites Verfahren, die Grössen der Fortpflanzungs-Geschwindigkeit darzustellen, besteht darin, dass man die Dicke der einzelnen Geschwindigkeits-Curven der ihnen zugehörigen Geschwindigkeit proportional macht. Dies letztere Verfahren ist für die Zeichnung das einzige mit Vortheil anwendbare. Um aber eine descriptive Darstellung der Gesetze der Lichtbewegung in optisch zweiaxigen Krystallen zu erhalten, projiciren wir die beschriebener Weise gezeichneten Geschwindigkeits Curven auf die Hauptschnitte des doppeltbrechenden Mittels, wobei die Bemerkungen der fünften Nummer ihre Anwendung finden. Die beigegebenen Figuren Taf. V. Fig. 2., 3. und 4. sind solche descriptive Darstellungen der Bewegung und Polarisation ebener Lichtwellen in einem positiven zweiaxigen Krystalle, dessen optische Axen einen Winkel von c. 60° einschliessen.

Wir halten es für überflüssig, der leicht zu findenden Modificationen zu erwähnen, welche an dem oben beschriebenen Verfahren in dem Falle einaxiger Medien anzubringen sind. Schliesslich bemerken wir noch, dass man zur Demonstration der Gesetze, welche die Fortpflanzung der Strahlen, sowie deren Oscillations-Ebenen befolgen, keines neuen Modelles bedarf. Unter den Punkten A_1 etc. braucht man nur sich die Durchgänge der scheinbaren optischen Axen zu denken; die kleinen Ellipsen sind alsdann den mit ihren parallelen Durchschnitten des Ellipsoides, welches Fresnel bei seiner Construction der Wellenfläche zu Grunde legte, ähnlich und ähnlich liegend. Die Schwingungs-Richtungen der Strahlen kann man nur mit Hülfe der Wellenfläche bequem darstellen; sie liegen in dieser Fläche und stehen auf deren Durchschnitten mit den Geschwindigkeits-Kegeln für Strahlen senkrecht.

XXI.

Elementare Ableitung der Reihe für die Berechnung des Bogens aus seiner Tangente.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

zu Dresden.

In Taf. V. Fig. 5. sei, für den Halbmesser $AC=1$,

$$\text{Arc}\,AQ=a, \quad \text{Arc}\,AP=b;$$

$$AV=\tan a=\alpha, \quad AU=\tan b=\beta;$$

mithin

$$UV=\alpha-\beta=\delta,$$

wobei δ zur Abkürzung dient; es ist dann

$$MP=\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\,.\,\tan b}=\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta},$$

oder, wenn statt α gesetzt wird $\beta+\delta$:

1) $$MP=\frac{\delta}{1+(\beta+\delta)\beta}.$$

Ferner hat man nach einer bekannten trigonometrischen Formel

Digitized by Google

$$NQ = \sin(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{\sqrt{(1+\tan^2 a)(1+\tan^2 b)}}$$
$$= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}},$$

oder wegen $\alpha = \beta + \delta$:

2) $$NQ = \frac{\delta}{\sqrt{[1+(\beta+\delta)^2][1+\beta^2]}}.$$

Der Bogen liegt aber immer zwischen seiner Tangente und seinem Sinus; es ist desshalb

$$MP > \text{Arc}PQ > NQ,$$

also nach dem Vorigen:

$$\frac{\delta}{1+(\beta+\delta)\beta} > \text{Arc}\,PQ > \frac{\delta}{\sqrt{[1+(\beta+\delta)^2][1+\beta^2]}}.$$

Diese Ungleichung lässt sich leicht stärker machen und zugleich vereinfachen; schreiben wir nämlich linker Hand β statt $\beta+\delta$, so wird der Nenner kleiner und mithin der ohnehin schon zu grosse Quotient noch grösser; setzen wir rechter Hand $(\beta+\delta)^2$ für β^2, so nimmt der Nenner zu und der zu kleine Quotient wird noch kleiner. So haben wir

3) $$\frac{\delta}{1+\beta^2} > \text{Arc}PQ > \frac{\delta}{1+(\beta+\delta)^2}.$$

Wenn jetzt von einem Bogen AB (Taf. V. Fig. 6.) die Tangente $AD = T$ gegeben ist, so theile man dieselbe in eine Anzahl gleicher Theile und setze einen solchen Theil

4) $$\frac{T}{n} = \delta.$$

Zieht man von jedem Theilpunkte eine Gerade nach dem Mittelpunkte C, so zerfällt der Bogen AB in n kleine Bögen, die wir der Reihe nach s_1, s_2, s_3 ..... s_n nennen wollen. Für jeden solchen Bogen benutzen wir die Ungleichung 3) [$\beta = 0$, δ, 2δ, ...$(n-1)\delta$] und erhalten so

$$\frac{\delta}{1} > s_1 > \frac{\delta}{1+\delta^2},$$

$$\frac{\delta}{1+\delta^2} > s_2 > \frac{\delta}{1+2^2\delta^2},$$

Digitized by Google

$$\frac{\delta}{1+2^2\delta^2} > s_3 > \frac{\delta}{1+3^2\delta^2},$$

. . . . . .

$$\frac{\delta}{1+(n-1)^2\delta^2} > s_n > \frac{\delta}{1+n^2\delta^2}.$$

Ferner durch Addition dieser Ungleichungen:

$$\frac{\delta}{1}+\frac{\delta}{1+1^2\delta^2}+\frac{\delta}{1+2^2\delta^2}+\ldots+\frac{\delta}{1+(n-1)^2\delta^2}$$

$$> \text{Arc}\,AB >$$

$$\frac{\delta}{1+1^2\delta^2}+\frac{\delta}{1+2^2\delta^2}+\frac{\delta}{1+3^2\delta^2}+\ldots+\frac{\delta}{1+n^2\delta^2}.$$

Bezeichnen wir für den Augenblick die erste Summe mit Σ_1 und die zweite mit Σ_2, also

$$\Sigma_1 > \text{Arc}\,AB > \Sigma_2,$$

so ist

$$\Sigma_1-\Sigma_2=\delta-\frac{\delta}{1+(n\delta)^2}=\delta-\frac{\delta}{1+T^2}$$
$$=\frac{T^2}{1+T^2}\delta=\frac{T^3}{1+T^2}\cdot\frac{1}{n},$$

und hieraus geht hervor, dass die Differenz $\Sigma_1-\Sigma_2$ gegen die Null convergirt, wenn n unendlich wächst, dass also Σ_1 und Σ_2 sich einer und derselben Gränze nähern müssen. Für unendlich wachsende n geht daher die vorige Ungleichung in die Gleichung

$$\text{Lim}\,\Sigma_1=\text{Arc}\,AB=\text{Lim}\,\Sigma_2$$

über, wofür wir nun schreiben können:

$$5)\quad \text{Arc}\,AB=\text{Lim}\left\{\frac{\delta}{1+1^2\delta^2}+\frac{\delta}{1+2^2\delta^2}+\ldots+\frac{\delta}{1+n^2\delta^2}\right\}.$$

Will man statt dieser allgemeinen Formel eine speziellere, welche zwar nicht auf jeden Bogen passt, aber dafür vom Zeichen Lim befreit ist, so benutze man die Formel

$$\frac{1}{1+q^2}=1-q^2+q^4-q^6+\ldots,$$

welche jedoch nur für ächt gebrochene q gilt, und die also nur anwendbar ist, wenn die Grössen δ, 2δ, 3δ, ... $n\delta$ sämmtlich kleiner als die Einheit sind. Diese Eigenschaft findet statt, wenn

Digitized by Google

die grösste von ihnen, nämlich $n\delta = T$, weniger als Eins beträgt, und es findet sich nun für $T < 1$:

$$\mathrm{Arc}AB = \mathrm{Lim}\begin{Bmatrix} \delta(1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \ldots\ldots + n^\circ) \\ -\delta^3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \\ +\delta^5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{Bmatrix}$$

Setzt man statt δ seinen Werth $\frac{T}{n}$ und berücksichtigt den Satz, dass für unendlich wachsende n und ein positives ganzes k

$$\mathrm{Lim}\frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots\ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

ist, wovon ich jüngst einen völlig elementaren Beweis gegeben habe (Archiv Thl. XIV. Nr. XXIX. S. 452.) so gelangt man zu der Formel

$$\mathrm{Arc}AB = \frac{1}{1}T - \frac{1}{3}T^3 + \frac{1}{5}T^5 - \ldots.$$

$$T < 1$$

oder für

$$\mathrm{Arc}AB = u, \text{ also } T = \tan u:$$

$$6) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{1}\tan u - \frac{1}{3}\tan^3 u + \frac{1}{5}\tan^5 u - \ldots. \\ 0 < u < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Da die vorstehende Gleichung für jedes $u < \frac{\pi}{4}$ gilt und für $u < \frac{\pi}{4}$ beide Seiten derselben für sich betrachtet, endlich bleiben, so muss, nach einer bekannten Schlussweise, auch für $u = \frac{\pi}{4}$ noch Gleichheit bestehen; dagegen hört dieselbe für $u > \frac{\pi}{4}$ auf, weil dann die Reihe divergirt. Im letzteren Falle kann man sich aber leicht dadurch helfen, dass man das Complement $v = \frac{\pi}{2} - u$ einführt, welches nun in der That $< \frac{\pi}{4}$ ist; man hat jetzt

$$v = \frac{1}{1}\tan v - \frac{1}{3}\tan v + \frac{1}{5}\tan^5 v - \ldots.$$

$$0 < v < \frac{\pi}{4},$$

Digitized by

oder

$$\frac{\pi}{2} - u = \frac{1}{1}\cot u - \frac{1}{3}\cot^3 u + \frac{1}{5}\cot^5 u - \ldots$$

d. i.

$$7) \quad \begin{cases} u = \frac{\pi}{2} - \left\{ \frac{1}{1}\cot u - \frac{1}{3}\cot^3 u + \frac{1}{5}\cot^5 u - \ldots \right\} \\ \frac{\pi}{2} > u > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Für $u = \frac{\pi}{4}$ vereinigen sich beide Formeln zur Leibnitz'schen Reihe.

Will man die Euler'sche Doppelreihe für $\frac{\pi}{4}$ ableiten, so braucht man nur zu beachten, dass für $\tan x = \frac{1}{2}$ und $\tan y = \frac{1}{3}$

$$\tan(x+y) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1,$$

und mithin $x + y = \frac{\pi}{4}$ wird.

Die hier mitgetheilte Ableitung der Formel 6) bietet den nicht unerheblichen Vortheil, eben sowohl von der unsicheren Methode der unbestimmten Koeffizienten, als von der Einmischung imaginärer Grössen frei zu sein, und sie dürfte sich desshalb als ein für etwas gereiftere Schüler gewiss interessanter Anhang zur Trigonometrie empfehlen. Dass das ganze Verfahren nichts weiter als eine maskirte Integration ist, wird man hoffentlich nicht tadeln, sind doch die elementaren Quadraturen des Kreises der Parabel etc. auch nichts Anderes; ganz abgesehen aber von der wissenschaftlichen Berechtigung oder Nichtberechtigung solcher Herleitungen, bleibt ihnen doch noch ein didaktischer Werth vermöge ihrer Anschaulichkeit und geometrischen Durchsichtigkeit, die sie selbst demjenigen empfiehlt, der die expeditiveren Methoden der höheren Analysis kennt.

Digitized by Google

XXII.

Bemerkung zu dem Aufsatze VII. in Theil XV.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

zu Dresden.

Auf Seite 232. des genannten Aufsatzes gelangt Herr Professor Franke zu der Behauptung, dass aus der Continuität einer Funktion $F(x)$ die Continuität ihrer Abgeleiteten $F'(x)$ folge, wenn in beiden Funktionen x auf dasselbe Intervall beschränkt wird. Dieses Ergebniss ist aber, wenigstens in seiner Allgemeinheit, völlig unrichtig, und es lassen sich nicht weniger als unendlich viele Funktionen finden, die selbst stetig sind, deren Differenzialquotienten dagegen Unterbrechungen der Continuität erleiden; so z. B.

$$F(x)=\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2},$$

$$F'(x)=(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}};$$

die erste Funktion bleibt hier stets continuirlich, die zweite aber wird diskontinuirlich an der Stelle $x=1$; denn bezeichnen wir mit δ und ε ein paar unendlich abnehmende Grössen, so ist

$$F'(1-\delta^3)=\frac{1}{\sqrt[3]{(-\delta^3)}}=-\frac{1}{\delta}=-\infty,$$

Digitized by Google

$$F'(1+\varepsilon^3)=\frac{1}{\sqrt[3]{(+\varepsilon^3)}}=+\frac{1}{\varepsilon}=+\infty;$$

die Derivirte $F'(x)$ springt demnach an der Stelle $x=1$ aus $-\infty$ nach $+\infty$ über. Diese analytischen Bemerkungen rechtfertigen sich auch geometrisch, wenn man berücksichtigt, dass, wenn $y=F(x)$ die Gleichung einer Curve ist,

$$F'(x)=\tan\tau$$

sein muss, wo τ den Winkel bezeichnet, welchen die berührende Gerade im Punkte xy mit dem positiven Theile der Abscissenachse einschliesst. Nun charakterisirt aber die Gleichung

$$y=\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{3}}$$

bekanntlich eine Neil'sche Parabel, welche in Taf. V. Fig. 7. gezeichnet ist ($OA=1$, $OB=\frac{3}{2}$), und mithin ist

$$\tan\tau=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}}.$$

Die Curve bildet einen ununterbrochenen Zug mit dem Rückkehrpunkte A und verläuft demnach durchaus stetig. Was aber $\tan\tau$ anbelangt, so ist der Werth davon negativ für $x<1$, also τ stumpf, nämlich

$$\tau=\angle PSX;$$

für $x>1$ wird $\tan\tau$ positiv, also τ spitz, nämlich

$$\tau=\angle P'S'X;$$

nun giebt aber schon die Figur zu erkennen, dass τ abnimmt, wenn man x von Null aus wachsen lässt; der Winkel τ geht also aus dem zweiten Quadranten in den ersten über, indem er bei

$$x=1=OA$$

den Werth $\frac{1}{2}\pi$ erhält; bekanntlich wird aber die Tangente dis-

Digitized by Google

kontinuirlich*) an der Stelle $\frac{1}{2}\pi$, und so zeigt sich auch hier auf ganz elementarem Wege die Discontinuität von

$$\tan\tau = F'(x).$$

Die Behauptung des Herrn Professor Franke ist übrigens die unrichtige Umkehrung des richtigen Satzes, dass aus der Continuität von $F'(x)$ die Continuität der ursprünglichen Funktion $F(x)$ folgt, und es liegt in dieser Bemerkung zugleich die Aufklärung des eingeschlichenen Irrthumes.

Was endlich das Cauchy'sche Criterium für die Gültigkeit des Mac Laurin'schen Theoremes betrifft, so ist dasselbe unrichtig, weil es die Gültigkeit dieses Theoremes nur an die Continuität von $F(x)$ und $F'(x)$ (für reelle und complexe Variabeln) knüpft; durch die Weglassung der Continuität von $F'(x)$, welche sich Herr Professor Franke erlauben zu können glaubt, wird aber das Cauchy'sche Criterium noch unrichtiger; die richtige Formulirung desselben erfordert die Continuität der Funktion $F(x)$ und aller ihrer Abgeleiteten $F'(x)$, $F''(x)$ in inf., wie ich in dem ersten Aufsatze meiner Mathematischen Abhandlungen (Dessau 1850) gezeigt habe.

---

*) M. s. mein Handbuch der algebraischen Analysis. §. 7.

Digitized by Google

XXIII.

Einige geometrische Aufgaben.

Von

Herrn Ligowski,

Oberfeuerwerker im 7. Artillerie-Regiment, commandirt bei der Artillerie-Prüfungs-Commission zu Berlin.

Aufgabe I. Eine Linie von der Länge a bewegt sich zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels so, dass die Endpunkte derselben immer auf den Schenkeln bleiben; man soll die Curve finden, welche durch die auf einander folgenden Durchschnittspunkte der geraden Linie entsteht.

Lösung. AB (Taf. V. Fig. 8.) sei irgend eine Lage der Linie a. Winkel $ABC=\alpha$.

$$AC=u, \qquad BC=v;$$

$$u=a\sin\alpha, \qquad v=a\cos\alpha.$$

Bekanntlich ist die Gleichung der Linie a:

$$\frac{y}{u}+\frac{x}{v}=1,$$

oder für u und v ihre Werthe gesetzt:

$$(1) \qquad \frac{y}{\sin\alpha}+\frac{x}{\cos\alpha}=a.$$

Um die Gleichung der gesuchten Curve zu erhalten, hat man die Gleichung (1) nach α zu differenziiren und dann aus (1) und der durch Differenziiren erhaltenen Gleichung α zu eliminiren.

Digitized by Google

Differenziirt man die Gleichung (1) nach α, so erhält man

$$(2) \qquad -\frac{y\cos\alpha}{\sin\alpha^2}+\frac{x\sin\alpha}{\cos\alpha^2}=0\,,$$

oder auch

$$(3) \qquad y\cos\alpha^3=x\sin\alpha^3.$$

Damit sich die Elimination leicht ausführen lasse, verfahre man auf folgende Weise.

In (3) setze man $1-\sin\alpha^2$ statt $\cos\alpha^2$, so ergiebt sich:

$$y\cos\alpha=(y\cos\alpha+x\sin\alpha)\sin\alpha^2;$$

dividirt man diese Gleichung durch $\sin\alpha\cos\alpha$, so entsteht:

$$\frac{y}{\sin\alpha}=\left(\frac{y}{\sin\alpha}+\frac{x}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha^2,$$

oder, da nach Gleichung (1) der eine Factor rechts $=a$ ist:

$$\frac{y}{\sin\alpha}=a\sin\alpha^2$$

und

$$(4) \qquad \frac{y}{a}=\sin\alpha^3.$$

Wird in (3) nun $1-\cos\alpha^2$ statt $\sin\alpha^2$ gesetzt und eben so wie oben verfahren, so erhält man

$$(5) \qquad \frac{x}{a}=\cos\alpha^3.$$

Um nun α zu eliminiren, potenzire man (4) und (5) mit $^2/_3$ und addire dann beide Gleichungen, wodurch

$$(6) \qquad \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

entsteht, welches die Gleichung der gesuchten Curve ist.

Aufgabe II. Eine Linie von der Länge $a+b$ bewegt sich zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels so, dass die Endpunkte derselben immer auf den Schenkeln bleiben; man soll die Gleichung der Curve

finden, welche ein Punkt der Linie beschreibt, der um die Länge a von dem Endpunkte derselben entfernt ist.

Lösung. AB (Taf. V. Fig. 9.) sei irgend eine Lage der Linie, M der die Curve beschreibende Punkt.

$$AM=a,\quad MB=b,\quad CP=x,\quad \text{und}\quad PM=y;$$

$$\text{Winkel}\quad ABC=\alpha.$$

Man hat

$$(1)\qquad \frac{x}{a}=\cos\alpha$$

und

$$(2)\qquad \frac{y}{b}=\sin\alpha.$$

Quadrirt man die Gleichungen (1) und (2) und addirt sie dann, so entsteht

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

welches bekanntlich die Gleichung der Ellipse ist.

Anmerkung. Ist wie in Taf. V. Fig. 10. M der beschreibende Punkt in der Verlängerung von AB gegeben, so entsteht ebenfalls eine Ellipse.

Es ist wie oben:

$$\frac{x}{a}=\cos\alpha\ \text{und}\ \frac{y}{b}=\sin\alpha,$$

also auch wieder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Diese Aufgabe II. ist ein specieller Fall des Lehrsatzes, den Herr Professor Pross in Nr. XXXIV. des 6. Bandes dieses Archivs gegeben hat.

Digitized by Google

XXIV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Man soll diejenige Curve bestimmen, welche die Krümmungsmittelpunkte einer gegebenen Curve bilden, sobald die letztere auf der Abscissenachse oder einer Parallelen dazu fortgewälzt wird. — Aus der Kettenlinie z. B. entsteht auf diese Weise eine Parabel mit demselben Parameter, aus der Cycloide ein Kreis, dessen Halbmesser das Vierfache von dem Halbmesser des erzeugenden Kreises ist.

XXV.

Miscellen.

Noch eine Auflösuug des Problems des Rückwärtseinschneidens mittelst des Messtisches. Von dem Herausgeber.

Es wird Fig. 11. auf Taf. V. leicht ohne weitere Erläuterung für sich verständlich sein.

Die an dem Stationspunkte D liegenden Winkel ADC und BDC wollen wir der Kürze wegen respective durch α und β bezeichnen. Sind nun E und F die Durchschnittspunkte der Linien BD und AD mit den um die Dreiecke ACD und BCD beschriebenen Kreisen, so ist, wenn man AE, CE und BF, CF zieht, offenbar

Digitized by Google

$$\angle AEC=\alpha, \quad \angle BFC=\beta.$$

Ferner ist

$$\angle CAE=\angle CDE=\angle BDC=\beta$$

und, weil

$$\angle CBF+\angle CDF=\angle ADC+\angle CDF=180°$$

ist, so ist

$$\angle CBF=\angle ADC=\alpha.$$

Ueberlegt man nun noch, dass D der Durchschnittspunkt der beiden Linien AF und BE ist, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar die folgende Bestimmungsweise des Punktes D mittelst des Messtisches, wobei die den Punkten A, B, C auf dem Tische entsprechenden Punkte auf dem Felde durch A', B', C' bezeichnet werden sollen.

I. Man lege die Kippregel an AC, orientire den Tisch nach C', drehe sodann die Kippregel um A, visire nach B', und ziehe an der Kippregel die Linie AE. Hierauf lege man die Kippregel an EA, orientire den Tisch nach A', lege die Kippregel an C, visire nach C' und ziehe an der Kippregel die Linie CE. Der Durchschnittspunkt der beiden auf dem Tische gezogenen Linien AE und CE ist der Punkt E auf dem Tische.

II. Man lege die Kippregel an BC, orientire den Tisch nach C', drehe sodann die Kippregel um B, visire nach A', und ziehe an der Kippregel die Linie BF. Hierauf lege man die Kippregel an FB, orientire den Tisch nach B', lege die Kippregel an C, visire nach C' und ziehe an der Kippregel die Linie CF. Der Durchschnittspunkt der beiden auf dem Tische gezogenen Linien BF und CF ist der Punkt F auf dem Tische.

III. Zieht man nun die Linien BE und AF, so ist deren Durchschnittspunkt der gesuchte Punkt D auf dem Messtische.

Ich habe die erste Idee zu dieser Auflösung des Problems des Rückwärtseinschneidens aus dem Traité de navigation par V. Caillet. Tome I. Brest. 1848. 8. p. 261. entlehnt, glaube aber durch meine obige Darstellung derselben, wodurch sie, wie es mir scheint, für die Anwendung in der Praxis wohl geeignet werden dürfte, die sich a. a. O. nicht findet, auch ein kleines Eigenthumsrecht an ihr beanspruchen zu dürfen.

Digitized by Google

Ueber die Gleichung (Archiv. Theil XII. S. 293.), welcher angeblich keine complexe Zahl genügt. Von dem Herrn Doctor R. Baltzer, Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden.

Das Staunen über eine unerwartete Erscheinung, welche aus guter Quelle berichtet wird, pflegt die Geister sofort zur Frage nach dem Zusammenhang derselben anzutreiben, ohne dem Zweifel viel Raum zu lassen, ob auch der Thatbestand frei von Täuschungen ermittelt sei. Glücklicherweise hat ein gewandter Rechner es sich nicht verdriessen lassen, in Beziehung auf die Gleichung des Herrn Prof. Schlömilch, welcher angeblich keine complexe Zahl genügt, die Thatfrage zu erheben, und hat durch Anwendung der gewöhnlichen Methoden complexe Zahlen gefunden, welche der gegebenen Gleichung wirklich genügen. Herr Dr. Claussen, dem wir diese Arbeit verdanken (Archiv. XIII. S. 334.), vermuthet deshalb einen Irrthum in dem merkwürdigen Aufsatze des Herrn Prof. Schlömilch.

In der That hält der übrigens schön angelegte Beweis in einem Punkte nicht Stich, dass nämlich

$$\frac{b}{a^2+b^2} - \frac{b}{(a+1)^2+b^2} + \frac{b}{(a+2)^2+b^2} - \cdots$$

allgemein weniger als $\frac{b}{a^2+b^2}$ und mehr als $\frac{b}{a^2+b^2} - \frac{b}{(a+1)^2+b^2}$ sei, und folglich nur für $b=0$ oder $a=\infty$ verschwinde. Die letzte Folgerung ist nur richtig, wenn a positiv. Ist dagegen a negativ (wie in den von Clausen berechneten Werthen), so kann der zweite Nenner kleiner als der erste sein, mithin der zweite Bruch den ersten überwiegen und die untere Grenze negativ werden, woraus die Möglichkeit des Verschwindens der Reihe einleuchtet.

Digitized by Google

Druckfehler im 15ten Theile.

S. 147. Z. 12. von unten statt „neue“ setze man „nur“.

S. 166. - 14. „ oben „ „ihr“ „ „ „ihm“.

S. 169. - 8. „ unten „ „Ereignisse“ setze man „Ergebnisse“,

S. 172. - 8. „ „ vor „auf“ setze man „bis“.

S. 182. - 2. „ „ statt „Zu“ „ „ „In“.

S. 196. - 18. „ „ „ „Richtung“ setze man „Reihung“.

Digitized by Google

XXVI.

Geometrische Aufgaben.

Von

Herrn S. E. Baltrusch

zu Danzig.

I.

Vier Gerade gehen durch einen Punkt und begrenzen drei gegebene Winkel in einer Ebene; man soll eine Gerade ziehen, die jene vier Geraden so schneide, dass die beiden äusseren Abschnitte derselben gegebenen Grössen gleich seien. (Taf. VI. Fig. 1.).

Annahme: Die gegebenen Winkel seien $AOB=\alpha$, $BOC=\beta$, und $COD=\gamma$; die gegebenen Abschnitte $AB=a$, $CD=c$.

Konstruktion. Beschreibe über c einen Bogen, welcher den gegebenen Winkel γ fasst; mache Winkel $CDG=\beta$, $GDH=\alpha$. Ziehe durch G zur CD eine Parallele GK, mache $GK=a$, verlängere KG, welche den Kreis in J treffe, und beschreibe durch die drei Punkte K, J, K einen Kreis, welcher die CD in A und E schneide; ziehe AH, HE, welche den ersten Kreis in O und O' treffen; endlich ziehe GO, GO', welche der CD in B, F begegnen; so begrenzen AO, BO, CO, DO die drei gegebenen Winkel α, β, γ, und die Abschnitte $AB=a$, $CD=c$ der AD sind gegeben.

Aehnliches gilt von dem Punkte O'; denn es ist auch

$$FO'E=\alpha,\quad EO'D=\delta,\quad DO'C=\gamma;$$

auch ist der Abschnitt FE der FC der gegebenen a gleich.

Beweis.

$$KAH = HOG = \alpha ,$$

also AK parallel BG; daher

$$AB = KG = a, \quad BOC = CO'G = \beta, \quad \text{und} \quad COD = \gamma;$$

also leistet der Punkt O das Verlangte.

Aber auch der Punkt O' erfüllt die geforderten Bedingungen. Denn $HEK = HO'G = \alpha$; also EK parallel FG, und JK parallel AF; daher $EF = GK = a$, und hieraus folgt $DE = BC$. Die letzte Behauptung wird in folgendem Satze erwiesen.

Satz.

Der Kreis M schneide den Kreis m in P, P'; ziehe die Sekante AB beliebig, welche den ersten Kreis in A, A', den anderen in C, C' treffe; die Sehnen AP, PA' durchschneiden den Kreis m in O, O'. (Taf. VI. Fig. 2.).

a) Macht man nun $BC = A'C'$, zieht BO, welche den Kreis m in D schneide, und die DO', welche die AA' in B' treffe: so ist $AB = A'B'$.

Denn für die Transversale AP ist in Bezug auf die Seiten des Dreiecks $BA'E$ folgende Gleichung

$$1) \quad BO.EP.A'A = BA.A'P.EO;$$

für die Transversale $B'D$ in Bezug auf dasselbe Dreieck $BA'E$ ist die Gleichung

$$2) \quad BD.EO'.A'B' = BB'.A'O'.ED.$$

Ferner ist

$$3) \quad PE.EO' = OE.ED,$$

und

$$4) \quad OB.BD = (CB.BC' = CA'.A'C) = O'A'.A'P.$$

Wenn man das Produkt der Gleichungen 1) und 2) durch das Produkt der Gleichungen 3) und 4) dividirt, so erhält man

$$AA'.A'B' = AB.BB';$$

also

$$AB : A'B' = AA' : BB' = AB + BA' : BA' + A'B' = BA' : BA';$$

daher

$$AB = A'B'.$$

Digitized by Google

b) Es ist FDP' parallel AB, und AF parallel BD. Denn

$$AOB = DP'P = FP'P = FAP;$$

also AF parallel BO. Ferner ist

$$A'PP' = P'DO' = P'FA';$$

also $A'F$ parallel DB'; und da $AA' = BB'$; so ist

$$\Delta FAA' \cong \Delta DBB';$$

also $AF = BD$; daher ist $ABDF$ ein Parallelogramm. Folglich ist die Behauptung erwiesen.

c) Macht man $AB = A'B'$; so ist $BC = C'A'$. Denn

$$1)\quad BO.EP.A'A = BA.A'P.EO;$$

$$2)\quad BD.EO'.A'B' = BB'.A'O'.ED;$$

$$3)\quad PE.EO' = OE.ED;$$

$$4)\quad A'B' = AB.$$

Das Produkt der Gleichungen 1) und 2), durch das Produkt der Gleichungen 3) und 4) dividirt, giebt

$$BO.BD.AA' = A'O'.A'P.BB'.$$

Es ist aber $AA' = BB'$; daher ist

$$BO.BD = A'O'.A'P.$$

Nun ist

$$DB.BO = CB.BC',$$

und

$$O'A'.A'P = CA'.A'C', \quad CB.BC' = CA'.A'C'.$$

Daraus folgt

$$BC : A'C' = A'C : BC'.$$

Wäre nun BC nicht $= A'C'$, so müsste BC entweder $>$ oder $< A'C'$ sein; wenn $BC > A'C'$ wäre, so müsste auch $A'C > BC'$, oder $A'C' + C'C > BC + CC'$, oder $A'C' > BC$ sein, was unmöglich ist; daher kann BC nicht $> A'C'$ sein; und aus demselben Grunde kann BC auch nicht $< A'C'$ sein; folglich muss BC nothwendig $= A'C'$ sein.

Digitized by Google

II.

a) In welche Vierecke lassen sich andere Vierecke so beschreiben, dass die Seiten des eingeschriebenen mit denen des gegebenen an jeder Ecke des eingeschriebenen Vierecks gleiche Winkel bilden? (Taf. VI. Fig. 3.).

Die Winkel des gegebenen Vierecks seien A, B, C, D; des eingeschriebenen A', B', C', D'; etc. so ist

$$A' + 2\alpha + B' + 2\beta + C' + 2\gamma + D' + 2\delta = 8R;$$

aber

$$A' + B' + C' + D' = 4R;$$

also

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 4R;$$

folglich

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2R.$$

Nun ist

$$A + \alpha + \delta + C + \beta + \gamma = 4R;$$

folglich

$$A + C = 2R.$$

Das gesuchte Viereck ist also ein solches, um welches sich ein Kreis beschreiben lässt.

b) Ein Viereck, in welchem die Summe der gegenüberliegenden Winkel $2R$ beträgt, ist gegeben, und man soll in dasselbe ein Viereck so beschreiben, dass die Seiten dieses mit denen des gegebenen an den Ecken des eingeschriebenen gleiche Winkel bilden. (Taf. VI. Fig. 4.).

Das gegebene Viereck sei $ABCD$; also

$$A + C = B + D = 2R.$$

Die Diagonalen desselben schneiden sich in O; aus O ziehe man Senkrechte Oa, Ob, Oc, Od auf die Gegenseiten des Vierecks: so ist $abcd$ ein solches Viereck, dessen Seiten mit denen des Vierecks $ABCD$ an a, b, c, d gleiche Winkel bilden.

Denn Viereck $AaOd$ ist ein Kreisviereck, also ist $Aad = AOd = BOb$, weil $\Delta AOd \sim \Delta BOb$; ferner ist $BOb = Bab$, weil $BaOb$ ein Kreisviereck ist; daher $Aad = Bab$.

Digitized by Google

Eben so wird die Gleichheit der Winkel an den Ecken *b*, *c*, *d* erwiesen.

c) Wenn man aus einem beliebigen Punkte der einen Diagonale eines Kreisvierecks zwei Senkrechte auf zwei Seiten des Vierecks zieht, und durch die Durchschnitte dieser Senkrechten mit der anderen Diagonale zwei neue Senkrechte auf die beiden andern Seiten führt: so treffen sich die beiden letzten Senkrechten in einem Punkte der ersten Diagonale; die Fusspunkte dieser vier Senkrechten bilden die Ecken eines Vierecks, dessen Seiten mit den Seiten des gegebenen Vierecks gleiche Winkel an jeder des eingeschriebenen Vierecks begrenzen. Die Seiten dieses eingeschriebenen Vierecks sind den Seiten des unter *b*) eingeschriebenen Vierecks parallel. (Taf. VI. Fig. 5.).

Es mögen βc, βd senkrecht auf CD, DA sein, und die Diagonale AC in α, γ schneiden; ferner seien αb, γa senkrecht auf CB, BA: so treffen αb, γa in einem Punkte δ der Diagonale BD zusammen.

Träfen sich αb, γa nicht in der Diagonale BD, so mögen sie sich in δ' begegnen, und δ' liege also ausserhalb der BD.

Es sind $ABCD$, $Aa\gamma d$, αbCc, also auch $\alpha\beta\gamma\delta'$ Vierecke, um welche sich Kreise beschreiben lassen. Folglich ist

$$\alpha\beta\delta' = \alpha\gamma\delta' = A\gamma a .$$

Nun ist auch

$$BAC = BDC \quad \text{und} \quad Aa\gamma = Dc\beta = R;$$

also

$$\Delta\, Aa\gamma \sim \Delta\, Dc\beta,$$

daher $A\gamma a = D\beta c$, folglich $\alpha\beta\delta' = D\beta c$. Daher fällt $\delta'\beta$ mit $D\beta$ zusammen; also treffen sich αb, γa in δ, einem Punkte der BD. Viereck $abcd$ ist ein solches, dessen Seiten mit den Seiten des Vierecks $ABCD$ gleiche Winkel bilden.

Denn

$$Aad = Ay d = \beta\gamma\alpha = \beta\delta\alpha = baB,$$

weil $Aa\gamma d$, $\gamma\beta\alpha\delta$, δbBa Vierecke sind, um welche man Kreise beschreiben kann.

Aus gleichen Gründen ist $abB = cbC$; etc.

Sei nun Oa', Ob', Oc', Od' senkrecht auf AB, BC, CD, DA, so folgt daraus

Digitized by Google

$$AO : A\gamma = Aa' : Aa = Ad' : Ad;$$

daher ist ad parallel $a'd'$. Aus denselben Gründen ist ab parallel $a'b'$; etc.

d) Die Umfänge zweier Vierecke, welche unter *b*) oder *c*) in ein Kreisviereck eingeschrieben sind, müssen einander gleich sein. (Taf. VII. Fig. 1.).

Man verlängere bc um ein Stück $ce = cd$, ab um ein Stück $bf = be$, da um ein Stück $ag = af$; so ist dg gleich dem Umfange des Vierecks $abcd$. Eben so verfahre man mit dem Umfange des Vierecks $a'b'c'd'$, so erhält man

$$d'g' = d'a' + a'b' + b'c' + c'd'.$$

Nun ist zu zeigen, dass $dg = d'g'$ ist.

Es ist Viereck $dcc'd' \cong$ Viereck $ecc'e'$; denn

$$dc = ce, \quad cc' = cc', \quad d'c' = c'e',$$

und

$$dcc' = ecc', \quad cc'd' = cc'e';$$

drei auf einander folgende Seiten und die beiden dazwischen liegenden Winkel des einen Vierecks sind also einzeln genommen gleich den gleichnamigen Stücken des anderen Vierecks. Aus denselben Gründen ist Viereck $e'b'be \cong$ Viereck $f'b'bf$, und Viereck $faa'f' \cong gaa'g$. Daher ist

$$dd' = ee' = ff' = gg'.$$

Ferner ist Winkel

$$adA = cdd' = cee' = bff' = agg';$$

also dd' gleich und parallel gg'; daher ist $dd'g'g$ ein Parallelogramm, also $dg = d'g'$.

III.

Wenn zwei Vielecke einander ähnlich sind: so haben sie stets einen Aehnlichkeitspunkt. Die gleichnamigen Seiten beider Vielecke sind entweder parallel oder nicht parallel. Jeden dieser beiden Fälle hat man in zwei neue Fälle zu zertheilen. Wenn die gleichnamigen Seiten zweier ähnlichen Vielecke parallel sind, so sind die parallelen Seiten entweder einstimmig, d. h. nach derselben Seite hin parallel, oder nicht einstimmig, d. h. entgegengesetzt parallel. Zwei ähnliche Vielecke, deren gleichnamige Seiten einstimmig parallel sind, haben nur einen äusseren Aehnlichkeitspunkt.

Digitized by Google

Zwei ähnliche Vielecke, deren gleichnamige Seiten entgegengesetzt parallel sind, haben nur einen innern Aehnlichkeitsdunkt.

Diese beiden Sätze sind allgemein bekannt und auch leicht erweisbar; vielleicht weniger bekannt, oder doch nicht so behandelt, wie hier, sind die beiden folgenden Sätze:

Wenn die gleichnamigen Seiten zweier ähnlichen Vielecke nicht parallel sind, so folgen sie entweder in derselben oder in entgegengesetzter Richtung auf einander. Im ersten Falle haben beide Vielecke einen äussern, im andern einen innern Aehnlichkeitspunkt. (Taf. VII. Fig. 2.).

Zwei ähnliche Vielecke lassen sich in jedem Falle durch Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen; und da der Aehnlichkeitspunkt zweier ähnlichen Dreiecke zugleich der Aehnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen Vielecke ist, so darf man nur den Aehnlichkeitspunkt von zwei ähnlichen Dreiecken suchen.

a) Es sei

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

und die gleichnamigen Seiten beider Dreiecke folgen in derselben Richtung auf einander.

Die gleichnamigen Seiten beider Dreiecke begrenzen gleiche Winkel, und bilden dadurch drei Vierecke, um welche sich Kreise beschreiben lassen; diese drei Kreise durchschneiden sich in *einem* Punkte, welcher der Aehnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen Dreiecke ist. (Taf VII. Fig. 2.).

Das erste Kreisviereck ist $ADA'E$, das zweite $BFB'D$, und das dritte $CFC'E$. Die Gründe dafür sind leicht angebbar.

Die beiden Kreise $ADA'E$ mit $BFB'D$ durchschneiden sich in D und P; so ist P der gesuchte Aehnlichkeitspunkt. Denn

$$\Delta PAB \sim \Delta PA'B';$$

weil $PAE = PA'E$, da beide auf demselben Bogen PE des Kreises $PA'ADE$ stehen; $PBD = PB'D$, da beide auf demselben Bogen PD des Kreises PBD stehen; also

$$AB : A'B' = PA : PA' = PB : PB'.$$

Auch ist

$$\Delta PAC \sim \Delta PA'C';$$

denn

$$PAD = PA'D,$$

Digitized by Google

weil beide auf demselben Bogen PD im Kreise PAD stehen, und

$$PA:PA'=AC:A'C';$$

also ist auch

$$PC:PC'=AC:A'C'.$$

Die Verhältnisse zweier Abstände des Punktes P von zwei gleichnamigen Eckpunkten beider ähnlichen Dreiecke sind untereinander gleich; daher ist P der Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke. Der dritte Kreis $CFC'E$ muss auch durch den Punkt P gehen. Denn

$$APC=A'PC',$$

weil $\Delta APC\sim\Delta A'PC'$;

$$APB=A'PB',$$

aus demselben Grunde, also

$$APB-APC=A'PB'-A'PC' \text{ oder } CPB=C'PB',$$

und dazu Gleiches

$$BPC'=BPC'$$

gesetzt, giebt

$$CPC'=BPB'=BDB'=CEC'.$$

Daher liegen die fünf Punkte C, F, C', E, P auf dem Umfange eines Kreises.

b) Die Mittelpunkte der drei oben genannten Kreise bilden die Ecken eines Dreiecks, das jedem von den beiden ähnlichen Dreiecken ähnlich ist. (Taf. VII. Fig. 3.).

Es sei α der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch ADP, β der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch $BB'P$, und γ der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch $CC'P$ geht.

Die Centrale $\alpha\beta$ halbirt die Bogen DmP, DnP in m, n; die Centrale $\alpha\gamma$ halbirt die Bogen EpP, EqP in p, q, und die Centrale $\beta\gamma$ halbirt die Bogen FrP, FsP in r, s.

Es ist nun zu zeigen, dass $DAE=m\alpha p$, also

$$\frac{1}{2}\text{ Bogen } DE=\text{ Bogen } mp.$$

$$\text{Bogen } DE=\text{ Bogen } DEP-\text{ Bogen } EmP;$$

also

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}\text{ Bogen } DE = \frac{1}{2}\text{ Bogen } DEP - \frac{1}{2}\text{ Bogen } EmP$$
$$= \text{Bogen } mpP - \text{Bogen } pP = \text{Bogen } mp.$$

Daher

$$m\alpha p = DAE = BAC.$$

Eben so zeigt man, dass $r\beta n = FBD$; denn

$$\frac{1}{2}\text{ Bogen } FD = \frac{1}{2}\text{ Bogen } FrP - \frac{1}{2}\text{ Bogen } DnP$$
$$= \text{Bogen } rnP - \text{Bogen } nP = \text{Bogen } rn.$$

Daher

$$ABC = \alpha\beta\gamma.$$

Folglich

$$\Delta\,\alpha\beta\gamma = \Delta\,ABC.$$

c) Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, ihre gleichnamigen Seiten nicht parallel sind, sie aber in derselben Richtung auf einander folgen, und man die Geraden, welche die gleichnamigen Ecken beider Dreiecke verbinden, nach dem Verhältnisse zweier gleichnamigen Seiten theilt: so bilden die Theilungspunkte die Ecken eines Dreiecks, das einem von den gegebenen ähnlich ist (Taf. VII. Fig. 4.).

Die gegebenen ähnlichen Dreiecke seien ABC und $A'B'C'$. Ziehe $A'b$, $B'c$, $C'a$ parallel AB, BC, CA, und mache

$$bA' = A'B', \quad B'c = B'C', \quad C'a = C'A'.$$

Verlängere die drei Geraden bA', $B'c$, $C'a$, welche sich in a', b', c' treffen; so ist

$$\Delta\,a'b'c' \sim \Delta\,ABC,$$

weil die gleichnamigen Seiten unter einander parallel sind. Da die gleichnamigen Seiten zweier ähnlichen Dreiecke gleiche Winkel begrenzen, so ist

$$B'A'b' = C'B'c' = A'C'a',$$

also

$$bA'B' = c'B'C' = a'C'A';$$

und da die drei Dreiecke $b'A'B'$, $c'B'C'$, $a'C'A'$ gleichschenklig sind, so sind sie auch unter einander ähnlich; folglich ist

$$A'B' : B'C' : C'A' = bB' : cC' : aA'.$$

Nach der Konstruktion ist aber

$$A\alpha : \alpha A' = AB : A'B', \quad B\beta : \beta B' = BC : B'C';$$
$$C\gamma : \gamma C' = AC : A'C';$$

daher

$$\alpha\beta : bB' = \beta\gamma : cC' = \gamma\alpha : aA' = AB \cdot AB + A'B'.$$

Folglich ist

$$\Delta\,\alpha\beta\gamma \sim \Delta\, ABC.$$

α) **Wenn zwei Dreiecke ähnlich, ihre gleichnamigen Seiten nicht parallel sind, und in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen: so soll man den Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke bestimmen. (Taf. VIII. Fig. 1.).**

Sei

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'C'B'.$$

Theile AA', BB' nach dem Verhältnisse zweier gleichnamigen Seiten; also

$$AD : DA' = AB : A'B' = BE : EB',$$

und suche zu den drei Punkten A, D, A' den vierten harmonischen d, d. h. es muss sein

$$AD : Ad = DA' : A'd;$$

daraus folgt

$$AD + Ad : Ad - AD = DA' + A'd : A'd - DA';$$

sei α die Mitte von Dd; so wird vorstehende Proportion folgende:

$$2A\alpha : 2D\alpha = 2D\alpha : 2A'\alpha$$

oder

$$A\alpha : D\alpha = D\alpha : \alpha A'.$$

Nun beschreibe man um α mit αD einen Kreis, welcher die DE in J schneide; so ist J der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$.

Denn man bestimme (Taf. VIII. Fig. 2.) auch zu den drei Punkten B, E, B' den vierten harmonischen Punkt e, halbire Ee in β, und beschreibe um β mit βE einen Kreis, welcher den vorigen Kreis in J' und K schneide; so kann man zeigen, wie vorher, dass

Digitized by Google

$$B\beta : \beta E = E\beta : \beta B'$$

ist. Es ist nun

$$\Delta A'\alpha J' \sim \Delta \alpha J' A;$$

weil

$$A'\alpha : \alpha J' = J'\alpha : \alpha A,$$

und $A\alpha J'$ beiden Dreiecken gemein. Daher

$$\alpha J' A' = \alpha A J';$$

ferner ist

$$\alpha J' D = \alpha D J' = D J' A + D A J';$$

also

$$A' J' D = D J' A;$$

folglich

$$A' J' : J' A = A' D : D A = A' B' : A B.$$

Eben so zeigt man, dass $B' J' E = E J' B$; daher

$$B' J' : J' B' = B' E : E B = A' B' : A B;$$

und daraus folgt

$$\Delta A' J' B' \sim \Delta A J' B;$$

also $A' J' B' = A J' B$; daher

$$D J' A' + A' J' B' + B' J' E = D J' A + A J' B + B J' E = 2R;$$

also $DJ'E$ eine Gerade; folglich ist J und J' ein und derselbe Punkt.

Aus Vorstehendem lässt sich nun leicht zeigen, dass

$$\Delta A' J C' \sim \Delta A J C, \text{ und } \Delta B' J C' \sim \Delta B J C.$$

Daher ist J der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen Dreiecke ABC und $A'B'C'$.

Bemerkung. Sind die drei Punkte A, D, A' gegeben, so kann man unmittelbar den Mittelpunkt des gesuchten Kreises finden, ohne vorher den vierten harmonischen Punkt d gesucht zu haben. Daher folgende Aufgabe.

Die Strecke AA' nach dem Verhältnisse $p:q$ zu theilen. (Taf. VIII. Fig. 3.).

Digitized by Google

Ziehe AF in beliebiger Richtung, $A'G$ parallel AF; mache $AF=p$, $A'G=q$, ziehe FG, welche die AA' in D schneide; führe DK parallel AF, mache $DK=q$, und ziehe FK, welche die AA' in α treffe: so ist α der Mittelpunkt und αD der Radius des gesuchten Kreises.

Denn

$$AF:A'G=p:q=AD:DA',$$

und

$$AF:DK=p:q=A\alpha:\alpha D;$$

daher ist auch

$$AD:A\alpha-AD=DA':\alpha D-DA'$$

oder

$$AD:D\alpha=DA':A'\alpha;$$

folglich

$$AD:DA'=D\alpha:\alpha A'=A\alpha:\alpha D.$$

Macht man die Verlängerung von $GA'=q=A'H$, und zieht FH, welche der AA' in d begegnet, so sind AD, A', d vier harmonische Punkte, und α ist die Mitte von Dd

Dieses kann man durch Proportionen, aber auch auf folgende Art erweisen. Ziehe HK, welche die FD in L erreiche: so ist DK parallel GH, und DK zugleich $\frac{1}{2}$ von GH, daher $HK=KL$, also auch $d\alpha=\alpha D$, weil HK parallel Dd ist.

β) Wenn die gleichnamigen Seiten zweier ähnlichen Dreiecke nicht parallel sind, ihre gleichnamigen Ecken in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen: so giebt es drei Kreise, deren jeder durch den Aehnlichkeitspunkt geht, jeder seinen Mittelpunkt in einer Geraden hat, welche zwei gleichnamige Ecken beider Dreiecke verbindet, und die zwei Punkte, in welchen jeder Kreis seine Centrale schneidet, bilden mit den beiden Eckpunkten der Dreiecke, durch welche die Centrale geht, vier harmonische Punkte, und zwar sind die Schnittpunkte des Kreises, so wie die gleichnamigen Eckpunkte, zugeordnete harmonische Punkte (Taf. VIII. Fig. 4.).

Sei

$$\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'.$$

Man theile AA' in D, BB' in E, CC' in F so, dass

Digitized by Google

$$AD:DA' = BE:EB' = CF:FC' = AB:A'B'$$

sei. Suche nun zu A, D, A'; B, E, B'; C, F, C' den vierten harmonischen Punkt d; e; f; halbire Dd, Ee, Ff in α, β, γ; so sind diese Punkte die Mittelpunkte der gesuchten Kreise. Die Kreise um α mit αD, um β mit βE beschrieben, mögen sich in J schneiden: so ist J der Aehnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$, wie oben bewiesen. Man lege durch J und F einen Kreis, dessen Mittelpunkt γ' in CC' liege. Da

$$CJB = C'JB', \quad BJE = B'JE,$$

so ist

$$CJE = C'JE,$$

oben erwiesen,

$$\gamma'FJ = FJ\gamma',$$

also

$$\gamma'JC' = \gamma'CJ;$$

daher

$$\Delta\gamma'C'J \sim \Delta\gamma'JC;$$

also

$$C'\gamma' : \gamma'F = F\gamma' : \gamma'C,$$

oder

$$C'\gamma' + \gamma'F : \gamma'F - \gamma'C' = F\gamma' + \gamma'C : \gamma'C - \gamma'F,$$

oder

$$C'f' : C'F = f'C : CF,$$

wenn der dritte Kreis die CC' in f' schneidet; daher sind C, F, C', f' vier harmonische Punkte; folglich ist f' und f ein und derselbe Punkt; daher ist auch γ' und γ ein und derselbe Punkt.

γ) Die drei gleichartigen Durchschnittspunkte der drei Kreise mit den drei Geraden, welche durch gleichnamige Eckpunkte der ähnlichen Dreiecke gehen, liegen mit dem Aehnlichkeitspunkte in einer Geraden. Es bilden also eine Gerade D, J, F und E, so wie $dJef$. (Taf. VIII. Fig. 4.).

Dass DJE eine Gerade bildet, ist schon oben gezeigt; es bleibt aber zu beweisen, dass die Gerade DJE die Gerade CC' in F nach dem Verhältnisse zweier gleichnamigen Seiten theilet.

Digitized by Google

Also angenommen, der Punkt J sei durch die beiden Kreise um α' und β bestimmt, die Gerade DJE gezogen, welche die CC' in F schneide; so ist

$$B'JE = BJE,$$

und

$$C'JB' = CJB,$$

weil

$$\Delta\, C'JB' \sim \Delta\, CJB;$$

daher ist

$$C'JE = CJE,$$

folglich ist

$$C'F : FC = C'J : CJ = A'B' : AB,$$

und daraus ergiebt sich, dass die vier Punkte D, J, F, E in einer Geraden liegen.

Es liegen aber auch die vier Punkte d, J, f, e in einer Geraden; denn

$$DJd = R = EJe = FJf;$$

weil Dd, Ee, Ff Durchmesser der Kreise sind.

Digitized by Google

XXVII.

Elementargeometrischer Beweis eines in diesem Archiv viel besprochenen Satzes.

Von dem

Herrn Gymnasialdirector August

in Berlin.

Der geometrische Satz, um den es sich hier handelt, ist im 13. Theile S. 341. und im 15. Theile S. 351. untersucht, auch ist für einen sehr speciellen Fall desselben ein geometrischer Beweis im 15. Theile S. 358. gegeben. Er lässt sich, so weit er die Winkel des Dreiecks betrifft, höchst einfach durch indirecte Sshlüsse aus dem folgenden ableiten, der eine sehr elementare Beweisführung zulässt.

Lehrsatz. Wenn zwei ungleiche Winkel eines Dreiecks durch Transversalen proportional getheilt werden; so ist die Theilungstransversale des grösseren Winkels kleiner, als die des kleineren.

Beweis. In Dreieck ABC (Taf. VIII. Fig. 5.) sei Winkel $ABC > ACB$ und der kleinere Winkel ACB durch die Transversale CD in beliebigem Verhältniss getheilt; so dass $ACD : DCB = m : n$. Es ist zu zeigen, dass eine aus B gezogene Transversale, die den grösseren Winkel ABC in demselben Verhältnisse $m : n$ theilt, kleiner ist als DC.

Man lege zunächst die Transversale BE so, dass Winkel $ABE = DCA$ wird; dann folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABE und ACD die Proportion $AB : AC = BE : DC$; weil aber $AB < AC$, so ist auch $BE < DC$.

Ferner lege man die Transversale BF so, dass Winkel $FBC = DCB$ wird; dann haben die Dreiecke FBC und DCB

Digitized by Google

eine gleiche Seite BC und einen gleichen anliegenden Winkel $FBC = DCB$; es muss daher in demjenigen Dreieck, in welchem der zweite an dieser Seite anliegende Winkel grösser ist, auch die Gegenseite dieses Winkels grösser sein als die entsprechende Seite des anderen Dreiecks; folglich ist auch $BF < DC$.

Soll nun der grössere Winkel ABC proportional mit dem kleineren Winkel ACB getheilt werden; so werden seine Theile grösser als die Theile des anderen. Es muss also der an BA anliegende Winkeltheil grösser sein als Winkel ACD, d. i. grösser als ABE. Die Theilungslinie fällt daher zwischen BE und BC. Eben so muss der an BC anliegende Winkeltheil grösser sein als Winkel DCB, d. i. grösser als FBC. Die Theilungslinie fällt daher auch zwischen BF und BA. Ist demnach BG diejenige Theilungstransversale, durch welche die Proportion $ABG : GBC = ACD : DCB = m : n$ unter den Winkeltheilen entsteht; so liegt sie auch nothwendig zwischen BE und BF.

Wenn aber von einem Punkte B ausserhalb einer geraden Linie AC drei gerade Linien BE, BG, BF an dieselbe gezogen sind, so ist die mittlere BG dieser drei Linien kleiner als die grössere der beiden äusseren, oder wenn diese einander gleich sind, kleiner als jede von beiden. Da nun sowohl BE als auch BF kleiner als DC ist; so muss auch BG kleiner als CD sein. Dies sollte bewiesen werden.

*Zusatz**). Wenn zwei Winkel eines Dreiecks durch gleiche Transversalen proportional getheilt sind, so sind die Winkel gleich.

Beweis. Wären die Winkel ungleich; so wären auch die Transversalen ungleich. Da diese aber gleich sind, so können die Winkel nicht ungleich sein, sind also gleich.

Anmerkung. Die Beweisführung gilt für jede zwei innere Winkel eines Dreiecks. Construction und Beweis lassen sich auch noch für den Fall anwenden, wo die Linien BD und CF parallel sind. In diesem Falle wird $BE = DC$. Für den Fall, dass BD und CF divergiren, die Winkel also eigentlich Aussenwinkel eines Dreiecks sind, lässt sich aus dieser Construction nichts folgern, weil der Beweis $BE > DC$ ergiebt, weshalb eine Vergleichung zwischen BG und DC auf diesem Wege nicht möglich wird.

---

*) Dieser Zusatz ist der, nur im Ausdruck etwas veränderte, Thl. 15. S. 355. im zweiten Absatz enthaltene Lehrsatz.

Digitized by Google

XXVIII.

Fortsetzung der in Theil X. Nr. XXXVII. begonnenen Tabelle in Beziehung auf das Verwandeln der Cubikwurzeln aus ganzen Zahlen in Kettenbrüche.

Von dem

Herrn Doctor E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

$\sqrt[3]{65}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	48	4	72	3	4	1	2	1	1
l_i	4	32	1544	6200	406475	1066391	3809960	5223030	11489329	14564007
h_i	16	764	3088	222520	545665	1676429	1067140	4501820	1764479	1310199
k_i	1	577	129	209665	403014	5486389	3145085	15991149	16328486	39424087
a_i	4	193	776	56065	168971	731949	900920	2533789	3434709	5968498
b_i	1	48	193	13944	42025	182044	224069	630182	854251	1484433

262

$\sqrt[3]{66}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	24	4	36	3	4	2	12	1	47
l_i	4	32	776	3128	103019	295515	1430253	2991447	40622478	44034698
h_i	16	380	1552	55960	138049	526845	1511301	16331499	21299532	1027930324
k_i	2	289	130	52993	108391	978549	375229	56953977	1390090	2613407869
a_i	4	97	392	14209	43019	186285	415589	5173353	5588942	267853627
b_i	1	24	97	3516	10645	46096	102837	1280140	1382977	66280059

263 $\sqrt[3]{67}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	16	4	24	3	4	3	1	4	32
l_i	4	32	520	2104	46411	144543	480498	1683287	2868379	13460767
h_i	16	252	1040	25016	62081	283437	446640	756149	6765633	211375909
k_i	3	193	131	23809	51656	254645	2129927	906132	632075	348461492
a_i	4	65	264	6401	19467	84269	272274	356543	1698446	54706815
b_i	1	16	65	1576	4793	20748	67037	87785	418177	13469449

$\sqrt[5]{68}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	12	4	18	3	4	15	24	1	2
l_i	4	32	392	1592	26459	88931	392206	5752916	75430739	146103525
h_i	16	188	784	14152	35329	187949	2974924	66279602	3398221	209979869
k_i	4	145	132	13537	31065	38677	363660	141710341	74750873	37066443
a_i	4	49	200	3649	11147	48237	734702	17681085	18415787	54512659
b_i	1	12	49	894	2731	11818	180001	4331842	4511843	13355528

265 $\sqrt{69}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	9	1	5	2	17	2	1	61	1
l_i	4	29	239	298	1908	4185	38701	152202	225669	9268181
h_i	16	113	97	766	1986	35475	2267	111234	6828333	2214179
k_i	5	352	79	1337	363	37088	154469	5523	16096514	5071015
a_i	4	37	41	242	525	9167	18859	28026	1728445	1756471
b_i	1	9	10	59	128	2235	4598	6833	421411	428244

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	8	4	12	3	3	1	2	1	1
l_i	4	32	264	1080	12075	30912	93316	130084	297870	325535
h_i	16	124	528	6360	16065	32466	29938	106976	60810	—33145
k_i	6	97	134	6145	15659	125782	80011	404846	386345	1094541
a_i	4	33	136	1665	5131	17058	22189	61436	83625	145061
b_i	1	8	33	404	1245	4139	5384	14907	20291	35198

$\sqrt{71}$

q_i	a_i	h_i	k_i	y_i
		8	1	1
		17	2	8
1	1	25	3	9
1	2	42	5	17
1	1	67	8	26
1	2	176	21	69
1	1	243	29	95
1	2	662	79	260
1	1	905	108	355
1	2	2472	295	970
1	1	3377	403	1325
1	2	9226	1101	3620
1	1	12603	1504	4945
1	2	34432	4109	13510
1	1	47035	5613	18455
1	2	128502	15335	50420
1	1	175537	20948	68875
1	2	479576	57231	188170
1	1	655113	78179	257045
1	2	1790802	213768	703260
1	1	2445915	291947	960305
1	2	6682632	797662	2623870
1	1	9128547	1089609	3584175
1	2	24939726	2976880	9792220
1	1	34068273	4066489	13376395
1	2	93076272	11109858	36545010
1	1	127144545	15176347	49921405
1	2	347365362	41462552	136388220
1	1	474509907	56638899	186309625
1	2	1296385176	154740350	509007470
1	1	1770895083	211379249	695316095
1	2	4838175342	577498848	1899640660
1	1	6609070425	788878097	2594956755
1	2	18056316192	2155255042	7089554170
1	1	24665386617	2944133139	9684510925
1	2	67387089426	8043521320	26458576020
1	1	92052476043	10987654459	36143087945
1	2	251492041512	30018829238	98744752910
1	1	343544517555	41006483697	134887840855
10	2	938581076622	112031796632	368520274620

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	6	4	9	3	3	2	3	1	11
l_i	4	32	200	824	6971	20462	70204	129617	592886	747772
h_i	16	92	400	3616	9241	26692	66562	118961	344308	3845218
k_i	8	73	136	3529	9901	48448	65393	711847	99280	13119209
a_i	4	25	104	961	2987	9922	22831	78415	101246	1192121
b_i	1	6	25	231	718	2385	5488	18849	24337	286556

269 $\sqrt{73}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	5	1	1	2	1	3	1	2	1
l_i	4	29	75	158	248	741	1029	3316	4640	9921
h_i	16	61	−15	98	142	351	1293	994	3976	1305
k_i	9	136	143	173	883	460	4609	2817	13897	14768
a_i	4	21	25	46	117	163	606	769	2144	2913
b_i	1	5	6	11	28	39	145	184	513	697

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	5	23	1	5	2	4	1	3	19
l_i	4	34	167	3172	3814	22044	43162	167931	295010	1081834
h_i	16	86	1829	1176	10018	20238	69652	55117	551748	9776624
k_i	10	11	5001	998	16031	15850	237583	116709	85978	24752261
a_i	4	21	487	508	3027	6562	29275	35837	136786	2634771
b_i	1	5	116	121	721	1563	6973	8536	32581	627575

271 $\sqrt{75}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	4	1	1	1	1	7	1	2	6
l_i	4	28	69	117	146	443	717	3510	6500	18488
h_i	16	44	−3	51	−22	319	2343	450	8590	52888
k_i	11	113	114	197	421	148	5853	3475	4513	73387
a_i	4	17	21	38	59	97	738	835	2408	15283
b_i	1	4	5	9	14	23	175	198	571	3624

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	4	4	6	3	2	1	426	2	4
l_i	4	32	136	568	3259	6593	27778	39804	14670568	25197496
h_i	16	60	272	1640	4289	1349	19836	8478590	12344152	36742808
k_i	12	49	140	1633	5441	29127	140	11574579	9385412	179474323
a_i	4	17	72	449	1419	3287	4706	2008043	4020792	18091211
b_i	1	4	17	106	335	776	1111	474062	499235	4271002

273 $\sqrt{77}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	1	13	1	2	1	1	49	5
l_i	4	23	101	134	1181	1665	2296	8253	14581	616042
h_i	16	17	61	848	199	1751	−1120	7077	359443	1268414
k_i	13	118	15	2029	932	4047	7133	442	195097	2790257
a_i	4	13	17	234	251	736	987	1723	85414	428793
b_i	1	3	4	55	59	173	232	405	20077	100790

$\sqrt{78}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	1	2	120	7	1	45	3	2
l_i	4	26	65	145	401	39458	329154	383499	14201946	48888732
h_i	16	26	13	199	24095	107140	182556	8713281	16082496	51410526
k_i	14	91	79	5	9079	436294	12579	7638409	32485614	25955125
a_i	4	13	17	47	5657	39646	45303	2078281	6280146	14638573
b_i	1	3	4	11	1324	9279	10603	486414	1469845	3426104

275 $\sqrt{79}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	2	3	1	1	4	3	1	76
l_i	4	29	93	204	373	941	1867	5989	29312	38612
h_i	16	35	87	258	−89	657	3899	4403	18920	1467280
k_i	15	64	97	631	852	631	3296	33715	757	2257779
a_i	4	13	30	103	133	236	1077	3467	4544	348811
b_i	1	3	7	24	31	55	251	808	1059	81292

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	4	4	1	3	1	9	1	5
l_i	4	32	104	368	1517	1796	8544	10683	94774	107588
h_i	16	44	208	536	613	2032	4716	45159	38932	248506
k_i	16	37	144	2053	803	10576	1711	139933	29304	818443
a_i	4	13	56	237	293	1116	1409	13797	15206	89827
b_i	1	3	13	55	68	259	327	3202	3529	20847

277 $\sqrt[3]{81}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	16	1	1	5	1	1	2	16
l_i	4	35	107	612	1701	3227	9498	16947	43889	111879
h_i	16	53	829	−324	1413	7369	−1098	8547	53737	886383
k_i	17	10	1441	1377	928	16867	15849	26218	10351	1005210
a_i	4	13	212	225	437	2410	2847	5257	13361	219033
b_i	1	3	49	52	101	557	658	1215	3088	50623

$\sqrt[5]{82}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	1	9	3	3	93	4	4	1
l_i	4	20	69	108	936	3381	11244	973442	3332112	10912468
h_i	16	4	45	498	1206	5589	522534	1792388	5185454	2394902
k_i	18	73	17	478	1529	181	373994	1281125	16097922	10735896
a_i	4	9	13	126	391	1299	121198	486091	2065562	2551653
b_i	1	2	3	29	90	299	27897	111887	475445	587332

279

$\sqrt{83}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	1	3	5	174	15	1	2	1
l_i	4	22	57	105	418	2206	357859	3507425	4482501	10292453
h_i	16	8	27	177	1100	192026	2485289	664277	4129023	1680929
k_i	19	65	44	119	19	36659	5992714	2573389	14421476	13986485
a_i	4	9	13	48	253	44070	661303	705373	2072049	2777422
b_i	1	2	3	11	58	10103	151603	161706	475015	636721

280 $\sqrt[3]{84}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	1	1	1	2	1	4	1	33
l_i	4	24	45	62	140	196	652	828	5064	6321
h_i	16	12	9	8	70	112	344	1284	2952	106113
k_i	20	57	71	148	133	764	293	6348	281	53571
a_i	4	9	13	22	35	92	127	600	727	24591
b_i	1	2	3	5	8	21	29	137	166	5615

$\sqrt{85}$

b_i	a_i	k_i	h_i	l_i	g_i	i
1	4	21	16	4	4	1
2	9	49	16	26	2	2
3	13	98	—9	33	1	3
5	22	23	83	107	1	4
63	277	62	1213	193	12	5
3659	16088	178257	97667	2383	58	6
3722	16965	81955	40540	110590	1	7
22269	97913	883232	282885	119235	5	8
23991	114278	355083	198227	600347	1	9
100242	440747	2051243	1400938	867022	3	10

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	2	2	2	5	5	30	1	27
l_i	4	28	62	148	416	1070	6061	30245	909410	946484
h_i	16	20	56	122	440	2734	15565	434339	444826	12635356
k_i	22	41	102	269	302	1759	1527	1343749	51530	33575431
a_i	4	9	22	53	128	693	3593	108483	112076	3134535
b_i	1	2	5	12	29	157	814	24577	25391	710134

283 $\sqrt{87}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	3	7	1	21	1	2	1	12
l_i	4	30	75	227	1886	2165	31431	33429	141457	184409
h_i	16	24	123	653	1006	22453	6813	21801	86227	1036727
k_i	23	33	50	2539	151	53884	20121	163258	22553	3534190
a_i	4	9	31	226	257	5623	5880	17383	23263	296539
b_i	1	2	7	51	58	1269	1327	3923	5250	66923

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	4	3	3	2	5	4	1	1
l_i	4	32	72	312	939	3361	8230	39836	67293	241732
h_i	16	28	144	432	1209	3365	20964	67258	−39801	214240
k_i	24	25	152	457	2285	2319	15200	134551	201931	15096
a_i	4	9	40	129	427	983	5342	22351	27693	50044
b_i	1	2	9	29	96	221	1201	5025	6226	11251

285 $\sqrt{89}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	6	1	1	2	4	6	1	1
l_i	4	34	70	227	425	971	2689	10813	34445	62918
h_i	16	32	194	—37	235	1047	5597	28607	—4975	33448
k_i	25	17	421	388	603	934	2735	63052	57943	93519
a_i	4	9	58	67	125	317	1393	8675	10068	18743
b_i	1	2	13	15	28	71	312	1943	2255	4198

286 $\sqrt[3]{90}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	12	1	16	1	19	5	1	1
l_i	4	36	72	926	998	17064	19179	331106	750828	2006037
h_i	16	36	396	458	7714	8352	188649	693106	−273384	1528593
k_i	26	9	1322	91	24778	1449	103951	1443934	1732653	143613
a_i	4	9	112	121	2048	2169	43259	218464	261723	480187
b_i	1	2	25	27	457	484	9653	48749	58402	107151

$\sqrt{91}$

8758815	4777138	39816877	7954161	4372	4129	243	241	2	1	b_i
339396637	21487287	17906950	35727937	19665	18372	1093	1084	9	4	a_i
826497228	144729649	11762397	87075178	1457	23545l	820	13707	1	27	k_i
13212847	—2398155	57093979	16045493	87076	69679	4103	4762	40	16	h_i
168711207	60566918	27492097	17664l	165772	9017	9946	80	38	4	l_i
1	1	5	181	1	16	1	120	2	4	g_i
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i

288 $\sqrt[5]{92}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	16	1	10	2	3	1	1
l_i	4	12	41	75	1178	1344	12868	25400	56113	96074
h_i	16	−8	37	567	536	6902	10588	31568	−855	40816
k_i	28	33	7	1745	188	9885	11996	87681	95219	158236
a_i	4	5	9	149	158	1729	3616	12577	16193	28770
b_i	1	1	2	33	35	383	801	2786	3587	6373

289 $\sqrt[3]{93}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	7	1	1	1	9	8	1
l_i	4	13	39	72	323	359	1182	1977	16433	141558
h_i	16	7	33	234	17	19	804	9375	54487	70638
k_i	29	32	15	557	376	1201	309	3226	196045	19941
a_i	4	5	9	68	77	145	222	2143	17366	19509
b_i	1	1	2	15	17	32	49	473	3833	4306

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	4	1	5	6	12	1	1
l_i	4	14	37	63	296	436	2596	15112	96015	123760
h_i	16	−6	29	99	134	1214	7856	84476	−3573	31318
k_i	30	31	23	395	114	635	1914	180491	120187	337630
a_i	4	5	9	41	50	291	1796	21843	23639	45482
b_i	1	1	2	9	11	64	395	4804	5199	10003

291 $\sqrt{95}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	3	2	9	3	1	3	1
l_i	4	15	35	68	272	639	4385	14500	20107	53531
h_i	16	−5	25	94	288	2887	3855	6260	27041	6383
k_i	31	30	31	183	103	2424	18355	8789	80572	69661
a_i	4	5	9	32	73	689	2140	2829	10627	134 56
b_i	1	1	2	7	16	151	469	620	2329	2949

$\sqrt[5]{96}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	2	1	2	30	3	1	1
l_i	4	16	33	57	128	288	786	17868	40695	52468
h_i	16	−4	21	39	32	384	11772	17502	5325	6448
k_i	32	29	39	167	160	39	9880	58197	57793	138464
a_i	4	5	9	23	32	87	2642	8013	10655	18668
b_i	1	1	2	5	7	19	577	1750	2327	4077

$\sqrt{97}$

h_i	m_i	k_i	h_i	l_i	g_i	i
1	4	33	16	4	4	1
1	5	28	−3	17	1	2
2	9	47	17	31	1	3
5	23	42	89	77	2	4
37	170	341	735	209	7	5
227	1043	9456	3251	1311	9	6
264	1213	4571	1643	6305	1	7
755	3469	29834	9507	7499	2	8
1019	4682	13755	11321	24327	1	9
3812	17515	183059	31542	29044	3	10

$\sqrt{98}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	1	3	4	3	2	1
l_i	4	18	29	42	98	193	691	2758	7154	14001
h_i	16	−2	13	0	56	313	1319	3626	4298	2549
k_i	34	27	55	98	83	251	1359	5390	18299	21447
a_i	4	5	9	14	23	83	355	1148	2651	3799
b_i	1	1	2	3	5	18	77	249	575	824

295 $\sqrt{99}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	2	14	3	2	1	1
l_i	4	19	27	54	124	332	4117	10089	21258	23111
h_i	16	—1	9	18	158	2312	5083	5895	5274	—3421
k_i	35	26	63	71	35	2143	7586	27153	28385	78364
a_i	4	5	9	14	37	532	1633	3798	5431	9229
b_i	1	1	2	3	8	115	353	821	1174	1995

296 $\sqrt[3]{100}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	3	1	3	4	4	1
l_i	4	20	25	66	96	335	550	2116	8042	16976
h_i	16	0	5	36	114	125	940	4154	13436	−4502
k_i	36	25	71	44	449	225	764	3049	30412	37071
a_i	4	5	9	14	51	65	246	1049	4442	5491
b_i	1	1	2	3	11	14	53	226	957	1183

297 $\sqrt[3]{101}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	10	1	5	4	1	4
l_i	4	21	23	78	116	1077	1441	6763	29033	38861
h_i	16	1	1	54	542	419	4033	9479	12791	75247
k_i	37	24	79	17	1619	372	2699	38512	12913	174444
a_i	4	5	9	14	149	163	964	4019	4983	23951
b_i	1	1	2	3	32	35	207	863	1070	5143

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	19	3	2	3	1	6	1
l_i	4	22	44	128	2051	6571	12506	52442	64706	518808
h_i	16	2	62	1210	2395	6301	12044	27892	168442	285660
k_i	38	23	10	1087	4483	6269	64486	15433	687250	27627
a_i	4	5	14	271	827	1925	6602	8527	57764	66291
b_i	1	1	3	58	177	412	1413	1825	12363	14188

299 $\sqrt{103}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	4	1	80	3	6	1	49
l_i	4	23	41	95	563	699	52953	136749	1056121	1226072
h_i	16	3	53	127	341	28077	73929	323967	595405	29846562
k_i	39	22	37	690	13	27010	35113	1380088	37173	71965813
a_i	4	5	14	61	75	6061	18258	115609	133867	6675092
b_i	1	1	3	13	16	1293	3895	24663	28558	1424005

300 $\sqrt[5]{104}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	2	1	3	21	1	1	1
l_i	4	24	38	84	223	434	1564	16949	20056	59064
h_i	16	4	44	42	97	788	15862	−477	3584	35424
k_i	40	21	64	265	177	112	32811	19579	62648	27851
a_i	4	5	14	33	47	174	3701	3875	7576	11451
b_i	1	1	3	7	10	37	787	824	1611	2435

301 $\sqrt{105}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	1	1	5	2	2	2	27
l_i	4	25	35	56	153	279	1331	2839	9093	22197
h_i	16	5	35	−14	111	687	1009	2329	10689	301623
k_i	41	20	91	139	78	1009	1924	5711	1218	145193
a_i	4	5	14	19	33	184	401	986	2373	65057
b_i	1	1	3	4	7	39	85	209	503	13790

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	1	2	1	5	1	1	8
l_i	4	26	32	92	116	406	587	1354	4118	7708
h_i	16	6	26	34	72	218	1439	—672	3436	30058
k_i	42	19	118	75	478	161	2793	3446	1393	48774
a_i	4	5	14	19	52	71	407	478	885	7558
b_i	1	1	3	4	11	15	86	101	187	1597

303 $\sqrt{107}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	1	23	1	5	1	2	4
l_i	4	27	29	128	171	3355	3770	15429	27967	65341
h_i	16	7	17	82	1919	1265	9170	2489	35527	91289
k_i	43	18	145	11	5274	1007	24599	15228	25217	442240
a_i	4	5	14	19	451	470	2801	3271	9343	40643
b_i	1	1	3	4	95	99	590	689	1968	8561

304 $\sqrt[3]{108}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	3	4	1	6	1	3	1	3
l_i	4	28	43	135	648	804	4653	5616	19980	34881
h_i	16	8	77	189	324	2232	1617	7344	7020	63603
k_i	44	17	53	837	188	6885	2411	27324	13967	19575
a_i	4	5	19	81	100	681	781	3024	3805	14439
b_i	1	1	4	17	21	143	164	635	799	3032

$\sqrt{10}$

7475	4943	2532	2411	121	112	9	4	1	1	b_1
35707	23612	12095	11517	578	535	43	19	5	4	a_1
178868	172035	65993	100466	403	6777	46	117	16	45	k_1
52487	24698	—4749	49973	2388	2011	185	61	9	16	h_1
147367	70412	50493	5269	1	397	173	39	29	4	l_1
1	1	1	19	1	12	2	3	1	4	g_1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i

306 $\sqrt[3]{110}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	3	1	3	1	6	4	8	7
l_i	4	30	35	136	166	725	1045	7161	30293	232820
h_i	16	10	45	56	194	365	3355	14179	121751	747190
k_i	46	15	181	74	919	235	2629	5559	50653	1165130
a_i	4	5	19	24	91	115	781	3239	26693	190090
b_i	1	1	4	5	19	24	163	676	5571	39673

307 $\sqrt[3]{111}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	4	6	1	1	2	2	4	3
l_i	4	31	45	201	617	1214	2398	6816	16854	81045
h_i	16	11	105	531	−115	712	2158	6918	32928	127497
k_i	47	14	51	1148	1099	1555	4487	5943	37991	20928
a_i	4	5	24	149	173	322	817	1956	8641	27879
b_i	1	1	5	31	36	67	170	407	1798	5801

308 $\sqrt[3]{112}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	4	1	1	3	2	1	1	2
l_i	4	32	40	96	221	436	1248	2159	3958	9772
h_i	16	12	80	−24	149	640	780	131	1668	12250
k_i	48	13	176	197	195	944	2939	4089	5720	2093
a_i	4	5	24	29	53	188	429	617	1046	2709
b_i	1	1	5	6	11	39	89	128	217	562

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	5	21	1	33	12	3	2	1
l_i	4	33	47	262	5687	6195	203471	2137125	4975529	12953957
h_i	16	13	137	2578	2847	104797	1177893	2674225	2465483	5512945
k_i	49	12	19	8265	274	25689	1105006	3824877	15419440	10728473
a_i	4	5	29	614	643	21833	262639	809750	1882139	2691889
b_i	1	1	6	127	133	4516	54325	167491	389307	556798

310 $\sqrt[3]{114}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	5	1	1	1	1	2	4	5
l_i	4	34	41	134	210	327	640	1356	3804	15238
h_i	16	14	101	−8	84	33	280	1512	7812	33326
k_i	50	11	235	202	411	673	818	1329	4610	68039
a_i	4	5	29	34	63	97	160	417	1828	9557
b_i	1	1	6	7	13	20	33	86	377	1971

311 $\sqrt{115}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	6	3	2	1	1	1	821	2
l_i	4	35	45	278	692	1475	1535	5858	9309	7521685
h_i	16	15	145	354	398	385	−325	4648	3820823	7392415
k_i	51	10	141	523	1873	1920	5533	17	5671254	535715
a_i	4	5	34	107	248	355	603	958	787121	1575200
b_i	1	1	7	22	51	73	124	197	161861	323919

312 $\sqrt[3]{116}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	7	7	1	2	4	7	1	2
l_i	4	36	47	330	1568	2732	8508	33637	159944	287216
h_i	16	16	181	996	242	3412	17652	103387	22920	368648
k_i	52	9	73	2564	1487	2980	7327	263331	155068	257491
a_i	4	5	39	278	317	912	3965	28667	32632	93931
b_i	1	1	8	57	65	187	813	5878	6691	19260

313 $\sqrt[5]{117}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	8	5	1	4	3	6	4	2
l_i	4	37	47	342	1665	2389	11816	38680	224128	760778
h_i	16	17	203	648	675	5191	17486	115348	396440	504548
k_i	53	8	109	2313	766	5669	9361	84869	578609	1558045
a_i	4	5	44	225	269	1301	4172	26333	109504	245341
b_i	1	1	9	46	55	266	853	5384	22389	50162

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	9	1	1	20	1	4	1	1
l_i	4	38	45	146	510	952	15436	18010	56378	71159
h_i	16	18	205	−104	468	9170	5314	35348	3020	11761
k_i	54	7	351	406	71	24606	5831	91726	74179	195741
a_i	4	5	49	54	103	2114	2217	10982	13199	24181
b_i	1	1	10	11	21	431	452	2239	2691	4930

$315\sqrt[3]{119}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	11	3	2	1	3	1	6	1
l_i	4	39	47	490	1106	3207	4245	18658	22796	178427
h_i	16	19	269	616	490	1611	4695	9718	59810	95821
k_i	55	6	253	861	3697	1952	23353	5419	238237	15000
a_i	4	5	59	182	423	605	2238	2843	19296	22139
b_i	1	1	12	37	86	123	455	578	3923	4501

316 $\sqrt[5]{120}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	13	1	3	1	21	4	25	1
l_i	4	40	45	486	516	2715	3540	77376	299441	7984850
h_i	16	20	285	156	594	1605	87920	154284	3551549	4133860
k_i	56	5	771	224	3309	245	28824	18149	11536399	34720
a_i	4	5	69	74	291	365	7956	32189	812681	844870
b_i	1	1	14	15	59	74	1613	6526	164763	171289

317 $\sqrt[5]{121}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	17	1	1	4	1	1	1	5
l_i	4	41	47	302	791	1469	4408	5221	15325	24270
h_i	16	21	401	−146	635	2545	394	419	9685	57600
k_i	57	4	703	645	526	6953	5615	15744	6791	123119
a_i	4	5	89	94	183	826	1009	1835	2844	16055
b_i	1	1	18	19	37	167	204	371	575	3246

Digitized by Google

10	9	8	7	6	5	25	24	1	1	h_4
1	43	4	36	1	3	1	23	1	4	g_4
30787486	8777236	2225289	6039	4713	866	836	47	42	4	h_3
11498246	18411504	4443856	1099883	2853	994	256	633	22	16	g_3
8699477	4919889	307247	81843	247	6707	374	1369	8	88	h_2
4032747	3941608	911139	22681	615	491	124	119	5	4	g_2
813107	794731	18876	4563	124	99	25	24	1	1	f_2

$\sqrt{122}$

319 $\sqrt[3]{123}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	36	3	2	1	13	4	265	2
l_i	4	43	49	1552	3170	11939	17955	252417	1026847	240278793
h_i	16	23	893	1928	932	7837	119595	513333	135828793	207873153
k_i	59	2	815	2549	12871	1984	93003	5812	188053793	131682066
a_i	4	5	184	557	1298	1855	25413	103507	27454768	55013043
b_i	1	1	37	112	261	373	5110	20813	5520555	11061923

$\sqrt{124}$

b_1	1	1	74	75	299	374	4818	1679 26	2283607 1
a	4	5	369	374	1491	1865	308306	838889	11138174 3
k_1	60	1	4367	1124	17705	249	27691 2	93745	2368273557
h_1	16	24	1781	756	2994	9101	1032796	4144886	5536419 77
l_1	4	44	49	2586	2616	14711	18538	2073652	8823199
g_1	4	1	78	1	3	1	111	4	133
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
									10

									11047 2922
									3847 4934 16
									78030890
									3126214 92
									1563201 28

XXIX.

Wenn zwei der vier Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte sich unendlich entfernen sollen, wie müssen alsdann die Coefficienten ihrer Gleichungen zusammenhangen?

Von dem

Herrn Doctor J. G. H. Swellengrebel

zu Utrecht.

Bevor wir zur eigentlichen Aufgabe übergehen, wollen wir uns vorher mit der ihr verwandten Aufgabe beschäftigen:

I. Welcher Zusammenhang muss, sollen zwei Kegelschnitte eine gemeinschaftliche reelle oder imaginäre Asymptote haben, zwischen den Coefficienten ihrer Gleichungen stattfinden?

um nachher diejenigen Fälle zu betrachten, in welchen zwei Kegelschnitte, ohne den Besitz einer gemeinschaftlichen Asymptote, dennoch die in der primitiven Aufgabe gestellten Forderungen befriedigen.

Es scheint unsere Aufgabe eine ganz bestimmte zu sein und daher auch nur eine einzige ganz bestimmte Antwort zu erheischen. Bedenken wir aber, dass jeder Kegelschnitt, je nach der verschiedenen Lage der Coordinatenaxen, durch verschiedene Gleichungen dargestellt werden kann, so sehen wir, dass in der Frage unbestimmt gelassen worden ist, welche Gleichungen man eigentlich gemeint hätte, und dass also unsere Aufgabe I. mehrere partielle Aufgaben enthält, deren jede ihre eigene Antwort erfordert, z. B.

Digitized by Google

II. Wenn der Scheitel eines gewissen Kegelschnitts als Coordinaten-Ursprung gewählt wird, und eine der Axen dieses Kegelschnitts als Axe $y=0$, wie müssen alsdann die Coefficienten der Gleichung dieses Kegelschnitts, von denen die der Gleichung eines anderen Kegelschnitts abhangen, d. h. wie müssen die Gleichungen

$$y^2 = Ax + B,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

mit einander verbunden sein, damit zwei der vier Asymptoten der Kegelschnitte einander decken?

Wir wollen uns jedoch hier nicht mit diesen speciellen Aufgaben beschäftigen, sondern uns unter der Aufgabe I. die allgemeinere Aufgabe denken, worin nach demjenigen zur Asymptoten-Coincidirung erforderlichen Coefficientenzusammenhang gefragt wird, welcher bei jeder Lage der Coordinaten-Axen stattfinden muss, d. h. welcher die Gleichungen

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

zum Ausdruck zweier eine gemeinschaftliche Asymptote besitzenden Kegelschnitte macht.

Es genügt jedoch diese Annahme noch nicht, um unsere Aufgabe I. zu einer ganz bestimmten zu machen. Es war nämlich in der Frage nur im Allgemeinen von den Coëfficienten die Rede, während es dagegen bei jeder Kegelschnittsgleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

einigermaassen unbestimmt ist, welche man als ihre Coefficienten betrachten soll, weil alle sechs Coefficienten, ohne dass die Bedeutung der Gleichung sich ändere, mit einem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt werden dürfen. Es ist also auch hier zwischen der allgemeineren Aufgabe III. und der specielleren Aufgabe IV. zu unterscheiden; wobei wir Deutlichkeits halber die zwei Gruppen der sechs Coefficienten, wenn zwei solche ausgewählt worden sind, welche jede einer bestimmten Bedingung unterworfen sein soll, durch $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$, wenn sie dagegen ganz willkührlich bleiben sollen, durch $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta$ andeuten wollen?

III. Welcher ist der zur Asymptoten-Coincidirung erforderliche Zusammenhang zwischen den Coefficienten zweier Kegelschnittsgleichungen

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0,$$
$$\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' xy + \delta' x + \varepsilon' y + \zeta' = 0,$$

man möge nun die zwei bestimmten Gruppen unserer jetzigen zwölf Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots \alpha', \beta', \ldots$ oder zwei andere Gruppen

Digitized by Google

$$\alpha M,\ \beta M, \ldots, \alpha' M',\ \beta' M', \ldots$$

oder zwei Gruppen

$$\alpha N,\ \beta N, \ldots \alpha' N',\ \beta' N' \ldots$$

als Coefficienten betrachten?

IV. Wenn jede der zwei Gruppen der sechs Coefficienten einer gewissen Bedingung unterworfen sein soll, z. B. dass F und F' die Einheit darstellen sollen, welcher Zusammenhang ist alsdann zwischen den bestimmten Coefficienten solch eines Ausdrucks

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + 1 = 0,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + 1 = 0$$

zur Asymptoten-Coincidirung erforderlich?

Da ein System zweier Kegelschnitte, soll es die Eigenschaft der Asymptoten-Coincidirung besitzen, zweien Bedingungen genügen muss, nämlich erstens dass die Kegelschnitte einander berühren, zweitens dass diese Berührung in unendlicher Entfernung stattfinde, so besteht die Antwort auf die allgemeine Aufgabe III. aus einem System zweier Gleichungen

$$\psi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta') = 0,$$
$$\chi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta') = 0.$$

Die Antwort dagegen zu jeder speciellen Aufgabe der Art IV besteht aus einem System von vier Gleichungen: Es sind nämlich alsdann erstens die Coefficienten des einen Kegelschnitts, der die gerade benützte Coefficienten-Wahl ausdrückenden Bedingung

$$f(ABCDEF) = 0$$

unterworfen, zweitens die Coefficienten des anderen Kegelschnitts einer ähnlichen Gleichung

$$F(A'B'C'D'E'F') = 0;$$

endlich finden die von der Coefficienten-Wahl unabhängigen Bedingungen der Aufgabe III.

$$\psi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta') = 0$$
$$\chi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta') = 0$$

auch bei unseren Coefficienten statt, so dass die Coefficienten drittens und viertens den Gleichungen

$$\psi(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F') = 0$$
$$\chi(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F') = 0$$

Digitized by Google

unterworfen sind. Man bekommt also zur Antwort auf Aufgabe IV. entweder das System dieser vier Gleichungen selber, oder in den meisten Fällen ein System vier anderer Gleichungen

$$\varphi_1(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0\quad \varphi_2(A...A'...)=0\quad \varphi_3(A...A'...)=0$$
$$\varphi_4(A...A'...)=0$$

deren jede eine Resultante-Gleichung zweier oder mehrerer der vier vorigen Gleichungen ist. Bei jeder anderen Coefficienten-Wahl hat man eine andere Aufgabe der Art IV. zu lösen und es besteht die Antwort aus einem System vier anderer Gleichungen

$$\varphi_5(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0\quad \varphi_6(A...A'...)=0\quad \varphi_7(A...A'...)=0$$
$$\varphi_8(A...A'...)=0$$

worin sowohl die Functionen $\varphi_5\ \varphi_6\ \varphi_7\ \varphi_8$ von den Functionen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4$ verschieden sind, als auch die Zeichen

$$ABCDEF\ A'B'C'D'E'F$$

andere Grössen, als vorher, bedeuten, weil von den vier Gleichungen, deren jede der vier letzten eine Resultante ist, nur die zwei

$$\psi(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0,$$
$$\chi(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0$$

mit den beiden der vorigen Coefficienten-Wahl identisch sind, während die beiden anderen

$$f'(ABCDEF)=0,$$
$$F'(A'B'C'D'E'F)=0$$

von denen der vorigen Aufgabe verschieden sind und die jetzige Coefficienten-Wahl ausdrücken.

Zur Beantwortung der allgemeinen Aufgabe III. können wir anfangen mit der leichteren Arbeit, wobei wir die Antwort auf eine gewisse specielle Aufgabe der Art IV. suchen, um nachher hiermit die gesuchte Antwort zur Aufgabe III. abzuleiten. Je nach den verschiedenen Coefficienten-Wahlen nun, womit man anfängt, d. h. je nach den verschiedenen Aufgaben IV., welche man als intermediäre Hülfsmittel benutzt, gibt es verschiedene Methoden, die Aufgabe III. zu lösen.

Wir wollen damit anfangen, bei derjenigen Wahl der sechs Coefficienten des ersten Kegelsschnitts die Aufgabe IV. zu lösen, wobei man identisch hat

(1) $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F\equiv(ax+by+1)(cx+dy+1)+e$

d. h. nach Entwickelung

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F\equiv(ac)x^2+(bd)y^2+(ad+bc)xy$$
$$+(a+c)x+(b+d)y+(e+1).$$

Digitized by Google

Es sind daher die sechs Coefficienten $ABCDEF$ hier der Bedingung unterworfen, dass sie in den $6-1=5$ Grössen $abcde$ ausgedrückt werden können, und zwar durch die sechs Gleichungen

$$A=ac\ \ B=bd\ \ C=ad+bc\ \ D=a+c\ \ E=b+d\ \ F=e+1$$

d. h. dass sie zusammenhängen durch die, durch Elimination der $abcde$ aus diesen Gleichungen sich ergebende Endgleichung. Combiniren wir, um diese zu erlangen, Nr. 1. mit Nr. 4. und Nr. 2. mit Nr. 5., so ergiebt sich

$$(2)\quad a=\tfrac{1}{2}(D\pm\sqrt{D^2-4A})\quad b=\tfrac{1}{2}(E\pm\sqrt{E^2-4B})$$
$$c=\tfrac{1}{2}(D\mp\sqrt{D^2-4A})\quad d=\tfrac{1}{2}(E\mp\sqrt{E^2-4B}),$$

durch deren Substitution in Nr. 3. wir

$$C=ad+bc=\tfrac{1}{2}DE-\tfrac{1}{2}\sqrt{(D^2-4A)(E^2-4B)}$$

und hieraus nach gehöriger Entwickelung

$$C^2-4AB=CDE-BD^2-AE^2$$

für die, die Natur unserer jetzigen Coefficienten-Wahl ausdrückende Gleichung bekommen. Unterwerfen wir ebenso die Coefficienten des anderen Kegelschnitts der Identität

$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'\equiv(a'x+b'y+1)(c'x+d'y+1)+e',$$

so ergibt sich für zwei der vier bei dieser Coefficienten-Wahl die Antwort der Aufgabe IV. darstellenden Gleichungen

$$(3)\quad \begin{aligned} C^2-4AB&=CDE-BD^2-AE^2\\ C'^2-4A'B'&=C'D'E'-B'D'^2-A'E'^2. \end{aligned}$$

Für die beiden anderen der vier Antwortsgleichungen bekommen wir das eine oder das andere der vier Paare Gleichungen

$$a=a'\ \ a=c'\ \ c=a'\ \ c=c'$$
$$b=b'\ \ b=d'\ \ d=b'\ \ d=d',$$

welche wir jedoch, da nicht nach dem Zusammenhange zwischen den Constanten $abcdabcd$, sondern nach demjenigen zwischen den Coefficienten gefragt war, vorher mittelst der Gleichungen (2) transformiren müssen, wodurch wir das eine oder das andere der Gleichungen-Paare.

$$D\pm\sqrt{D^2-4A}=D'\pm\sqrt{D'^2-4A'} \quad D\pm\sqrt{D^2-4A}=D'\mp\sqrt{D'^2-4A'}$$

$$E\pm\sqrt{E^2-4B}=E'\pm\sqrt{E'^2-4B'} \quad E\pm\sqrt{E^2-4B}=E'\mp\sqrt{E'^2-4B'}$$

$$D\mp\sqrt{D^2-4A}=D'\pm\sqrt{D'^2-4A'} \quad D\mp\sqrt{D^2-4A}=D'\mp\sqrt{D'^2-4A'}$$
$$\mp \qquad\qquad \pm \qquad\qquad \mp \qquad\qquad \mp$$

bekommen.

Zur besseren Einsicht in die Bedeutung dieser verschiedenen Doppelzeichen $\pm$ bedenke man, dass, im Falle die Coefficienten $ABCDEF$ sechs bestimmte wären, auch der Kegelschnitt

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

ein ganz bestimmter wäre, und daher zwei bestimmte Asymptoten hätte, und dass daher die Grössen $a\ b\ c\ d$, je nach der verschiedenen Ordnung, in welcher die Asymptoten auf einander folgend gedacht würden, d. h. jenachdem der Kegelschnitt als

$$(ax+by+1)(cx+dy+1)+e=0$$

oder als

$$(cx+dy+1)(ax+by+1)+e=0$$

betrachtet würde, auf zweifache Weise durch die Coefficienten $ABDE$ ausgedrückt werden könnten, da man der Grösse a entweder den Werth $\frac{1}{2}(D+\sqrt{D^2-4A})$ oder den Werth $\frac{1}{2}(D-\sqrt{D^2-4A})$ zuertheilen könnte, hierdurch aber zugleich bestimmt wäre, welche der Zeichen + oder − man bei den Radicalen der drei übrigen Grössen $b\ c\ d$ nehmen sollte. Hätte man daher ein System zweier Gleichungen

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$
$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'=0$$

mit zwölf bestimmten und den Bedingungen (3) unterworfenen Coefficienten, so konnte man zwar die Zeichen + oder − der in a und a' vorkommenden Radicale willkührlich auswählen; es wären aber alsdann die Zeichen der in $b\ c\ d\ b'\ c'\ d'$ vorkommenden Radicale bestimmt; und es wäre daher nur auf vier verschiedene Weisen möglich, dass unsere Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Asymptote hätten, nämlich in den vier Fällen, worin, bei den verschiedenen Bedeutungen von a und a', das Gleichungen-Paar $\begin{matrix}a=a'\\b=b'\end{matrix}$ stattfände, z. B. in den vier Fällen:

Digitized by Google

$$D+\sqrt{D^2-4A}=D'+\sqrt{D'^2-4A'} \quad D+\sqrt{D^2-4A}=D'-\sqrt{D'^2-4A'}$$
$$E-\sqrt{E^2-4B}=E'+\sqrt{E'^2-4B'} \quad E-\sqrt{E^2-4B}=E'-\sqrt{E'^2-4B'}$$

$$D-\sqrt{D^2-4A}=D'+\sqrt{D'^2-4A'} \quad D-\sqrt{D^2-4A}=D'-\sqrt{D'^2-4A'}$$
$$+ \qquad + \qquad + \qquad -$$

da die aus der Interpretation der drei übrigen Paare Gleichungen

$$a=c' \quad c=a' \quad c=c'$$
$$b=d' \quad d=b' \quad d=d'$$

bei vierfacher Bedeutung der a und a' sich ergebenden $4\times3=12$ Gleichungen-Paare respective mit den vier vorigen identisch sein würden, die 12 übrigen dagegen der 16, aus der Combination der vier Doppelzeichen $\pm$ der Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} D\pm\sqrt{D^2-4A} &= D'\pm\sqrt{D'^2-4A'} \\ E\pm\sqrt{E^2-4B} &= E'\pm\sqrt{E'^2-4B'} \end{aligned}$$

hervorgehenden Fälle keine Asymptoten-Coincidirung, sondern gewisse andere Zusammenhänge der beiden Kegelschnitte andeuten würden. Sind nun, wie in unserer Aufgabe der Fall war, die Coefficienten $ABCDEF$ alle unbestimmt, so weiss man zwar nicht, welche die vier Combinationen der vier Doppelzeichen der Radicale seien, welche die Gleichungen (4) zum Ausdruck des Besitzes einer gemeinschaftlichen Asymptote machen; man weiss aber, dass nicht alle sechszehn Combinationen zugleich als zur gesuchten Antwort gehörig betrachtet werden können; sodass es zwar erlaubt ist, die Zeichen der in a und a' vorkommenden zwei Radicale als zweideutig zu betrachten und die Gleichung

$$D\pm\sqrt{D^2-4A}=D'\pm\sqrt{D'^2-4A'}$$

als das $=0$ Sein des Productes der vier Functionen

$$D'-D+\sqrt{D'^2-4A'}-\sqrt{D^2-4A}$$
$$D'-D+\sqrt{D'^2-4A'}+\sqrt{D^2-4A}$$
$$D'-D-\sqrt{D'^2-4A'}-\sqrt{D^2-4A}$$
$$D'-D-\sqrt{D'^2-4A'}+\sqrt{D^2-4A}$$

d. h. nach Entwickelung als

$$(A'-A)^2=(D'-D)(A'D-AD')$$

zu betrachten, die Zeichen aber der übrigen Radicale alsdann nicht mehr willkührlich sind, und es daher nicht erlaubt ist, auch

Digitized by Google

die andere Gleichung in ähnlicher Weise rational zu machen, und die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned}(A'-A)^2&=(D'-D)(A'D-AD')\\(B'-B)^2&=(E'-E)(B'E-BE')\end{aligned}$$

als diejenigen zwei Gleichungen zu betrachten, welche in Verbindung mit den zwei Gleichungen (3) die Antwort auf unsere Aufgabe IV. darstellen sollten. Denn es würden diese Gleichungen (5) alle 16 Combinationen der Doppelzeichen der Gleichungen (4) darstellen, und daher eine Eigenschaft ausdrücken, welche nicht nur den Kegelschnitten

$$(2x+3y+1)(4x+5y+1)-12\equiv 8x^2+15y^2+22xy+6x+8y-11=0$$

$$(2x+3y+1)(6x+7y+1)-11\equiv 12x^2+21y^2+32xy+8x+10y-10=0$$

zukäme, sondern auch den Kegelschnitten

$$(2x+3y+1)(4x+5y+1)-12\equiv 8x^2+15y^2+22xy+6x+8y-11=0$$

$$(2x+4y+1)(6x+5y+1)-11\equiv 12x^2+20y^2+34xy+8x+9y-10=0$$

welche statt des Besitzes einer gemeinschaftlichen Asymptote die Eigenscheft $\begin{matrix}a=a'\\d=d'\end{matrix}$ besitzen.

Es sind die beiden Gleichungen (4) auch unter anderer Form darstellbar, welche, obschon weniger einfach, in gewissen Fällen jedoch nützlich sein kann. Da nämlich $A=ac$, so ist $\frac{1}{a}=\frac{c}{A}$, und daher

$$\frac{1}{D\pm\sqrt{D^2-4A}}=\frac{D\mp\sqrt{D^2-4A}}{A}.$$

Transformiren wir in ähnlicher Weise die drei Functionen

$$E\pm\sqrt{E^2-4B}\quad D'\pm\sqrt{D'^2-4A'}\quad E'\pm\sqrt{E'^2-4B'},$$

so nehmen die Gleichungen (4) folgende Gestalt an:

$$(6)\qquad \begin{aligned}\frac{D\pm\sqrt{D^2-4A}}{A}&=\frac{D'\pm\sqrt{D'^2-4A'}}{A}\\\frac{E\pm\sqrt{E^2-4B}}{B}&=\frac{E'\pm\sqrt{E'^2-4B'}}{B'}.\end{aligned}$$

Es sind diese Gleichungen (4) oder (6) Resultante-Gleichungen der beiden (3) und der noch zu findenden, bei jeder Coefficienten-Wahl zur Asymptoten-Concidirung erforderlichen Gleichungen

Digitized by Google

$$\psi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta') = 0$$
$$\chi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta') = 0.$$

Wir können daher jedes andere Paar Resultante-Gleichungen der nämlichen vier Gleichungen, statt der beiden Gleichungen (4) oder (6), als die Gleichungen unserer jetzigen Antwort betrachten, d. h. wir können die Gleichungen (4) oder (6) mittelst der Gleichungen (3) transformiren, und zwar nicht nur durch eine blosse, aus der Entwickelung als erlaubt sich ergebende, Aenderung der Art des Zusammenhanges der Grössen $AA'DD'$, wie diejenige der (4) und (6), sondern auch durch solch eine Aenderung, wobei z. B. die unter der Form

$$f(AA'DD') = 0$$

gegebene Gleichung (4) oder (6) von den Grössen D und D' befreit und zur Form

$$F(ABCE\ A'B'C'E') = 0$$

gebracht würde. Umgekehrt kann es sich daher auch sehr wohl ereignen, dass man mittelst einer anderen Methode, ohne dass darum ein Fehler in die Rechnung eingeschlichen wäre, ein von den Gleichungen (4) oder (6) verschiedenes Paar Gleichungen zur Antwort bekommen hätte. Wie z. B. der Fall gewesen sein würde, wenn wir zur Erlangung des Zusammenhanges (2), statt dessen dass wir die Gleichung $C = ad + bc$ unbenützt gelassen und uns nur der Nr. 1), 2), 4), 5) bedient hätten, uns auch der Gleichung $C = ad + bc$ bedient hätten, und daher a als Function der vier Grössen $ABCE$ bekommen hätten.

Da unsere nach der vorigen Methode erhaltene Antwort irrational war und nicht rational gemacht werden konnte, ohne Mehreres als die gefragte Antwort auszudrücken, so wollen wir versuchen, mittelst einer anderen Methode eine Antwort rationaler Form zu bekommen. Wir wollen wiederum die vorige Coefficienten-Wahl nehmen, d. h. wo die Coefficienten den Bedingungen (3) unterworfen sind. Es ist daher der erste Kegelschnitt unter der Form (1)

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F \equiv (ax + by + 1)(cx + dy + 1) + e = 0$$

und der zweite Kegelschnitt unter der ähnlichen Form

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' \equiv (a'x + b'y + 1)(c'x + d'y + 1) + e' = 0$$

darstellbar, statt der wir jedoch, mit Inachtnehmung, dass die Grössen a' und b', sollen die beiden Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Asymptote haben, respective mit den Grössen a und b identisch sein müssen, folgende Form nehmen wollen:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' \equiv (ax + by + 1)(c'x + d'y + 1) + e' = 0$$

Entwickeln wir, so ergibt sich, dass die zehn Coefficienten

Digitized by Google

$$A\,B\,C\,D\,E\;\;A'\,B'\,C'\,D'\,E'$$

den vier Bedingungen unterworfen sind, dass sie in den sechs Grössen $a\;b\;c\;d\;c'\;d'$ müssen ausgedrückt werden können, und zwar durch die zehn Gleichungen

$$A=ac \quad B=bd \quad C=ad+bc \quad D=a+c \quad E=b+d$$
$$A'=ac' \quad B'=bd' \quad C'=ad'+bc' \quad D'=a+c' \quad E'=b+d'$$

so dass sie zusammenhängen durch die vier, aus diesen zehn Gleichungen durch Elimination der $a\;b\;c\;d\;c'\;d'$ zu bekommenden Gleichungen, zu deren Erlangung wir die vier letzten Gleichungen combiniren, und aus ihnen

$$c'-c=D'-D \quad d'-d=E'-E$$

erhalten könnten, deren Verbindung mit den vier ersten uns

$$A'-A=a(D'-D) \quad B'-B=b(E'-E)$$

würde gegeben haben; und wenn wir die hieraus sich ergebenden Werthe der a und b mit ihren nach der vorigen Methode bekommenen Werthen (2) respective identificirten, so erhielten wir die Gleichungen

$$(7) \qquad \frac{A'-A}{D'-D}=D\pm\sqrt{D^2-4A} \qquad \frac{B'-B}{E'-E}=E\pm\sqrt{E^2-4B}$$

welche jedoch von den Gleichungen (4) und (6) nur der Form nach, nicht wesentlich verschieden sein würden, da sich durch Rationalmachung aus ihnen ergäbe

$$[A'-A-D(D'-D)]^2=(D'-D)^2\times(D^2-4A)$$
$$[B'-B-E(E'-E)]^2=(E'-E)^2\times(E^2-4B)$$

d. h. nach Entwickelung die Gleichungen (5). Die beiden dagegen bisher unbenützten Gleichungen liefern uns:

$$C=ad+bc=a\left(\frac{B}{b}\right)+b\left(\frac{A}{a}\right),$$
$$C'=ad'+bc'=a\left(\frac{B'}{b}\right)+b\left(\frac{A'}{a}\right),$$
$$C=ad+bc=a(E-b)+b(D-a)=aE+bD-2ab,$$
$$C'=ad'+bc'=a(E'-b)+b(D'-a)=aE'+bD'-2ab,$$
$$C=ad+bc=(D-c)d+(E-d)c=dD+cE-2cd,$$
$$C'=ad'+bc'=(D'-c')d'+(E'-d')c'=d'D'+c'E'-2c'd'$$

u. s. w.

und wenn wir hierin die Werthe

Digitized by Google

$$a=\frac{A'-A}{D'-D}\quad b=\frac{B'-B}{E'-E}\quad c'=\frac{A'}{a}=\frac{A'(D'-D)}{A'-A}\quad d'=\frac{B'}{b}=\frac{B'(E'-E)}{B'-B}$$

substituiren, so bekommen wir für die gesuchten zwei Gleichungen unserer Antwort entweder die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(A'-A)\,(B'-B)\,(D'-D)\,(E'-E)\,(C)}{C'}\\[2ex] =\dfrac{(A'-A)^2\,(E'-E)^2\,(B)}{B'}+\dfrac{(B'-B)^2\,(D'-D)^2\,(A)}{A'}\end{array}\right.$$

oder aber die Gleichungen

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(A'-A)(E'-E)(E)}{E'}+\dfrac{(B'-B)\,(D'-D)\,(D)}{D'}\\[2ex] =\dfrac{(D'-D)\,(E'-E)\,(C)}{C'}+\dfrac{2(A'-A)\,(B'-B)}{\quad}\end{array}\right.$$

oder endlich, wenn keine der vorigen Formen uns gefällt, die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(A'-A)(E'-E)(BD)}{B'D'}+\dfrac{(B'-B)\,(D'-D)\,(AE)}{A'E'}\\[2ex] =\dfrac{(A'-A)(B'-B)(C)}{C'}+\dfrac{(D'-D)\,(E'-E)\,(2AB)}{2A'B'}\end{array}\right.$$

welche Gleichungen alle, obwohl unter rationaler Form dargestellt, nur denjenigen Kegelschnitten zukommen, welche eine gemeinschaftliche Asymptote haben, nicht, wie die Gleichungen (5), auch denjenigen, welche die Eigenschaft $\begin{matrix}a=a'\\ d=d'\end{matrix}$ besitzen. Denn hätten wir die Grössen a' und d' den Grössen a und d, statt a' und b' den a und b, respective identisch gesetzt, so hätten wir

$$a=\frac{A'-A}{D'-D}\quad d=\frac{B'-B}{E'-E}\quad b=\frac{B}{d}=\frac{B(E'-E)}{B'-B}$$

bekommen, deren Substitution in irgend zwei der Werthe der C und C' uns, weil nur der Werth des a mit dessen früherem Werthe identisch ist, die der b und d dagegen von deren früheren Werthen verschieden sind, niemals zwei der Gleichungen (8) hätte liefern können, sondern uns z. B. die zwei folgenden

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(A-A)(B'-B)(D'-D)\,(E'-E)\,(C)}{C'}\\[2ex] =\dfrac{(A'-A)^2\,(B'-B)^2+(D'-D)^2\,(E'-E)^2\,(AB)}{A'B'}\end{array}\right.$$

geliefert haben würde.

Aus unseren auf die Aufgabe IV. bekommenen Antwortsgleichungen (4) oder (6) oder (7) oder (8) wollen wir jetzt die Ant-

Digitized by Google

wort zur allgemeineren Aufgabe III. herzuleiten suchen. Nehmen wir also an, dass die Gleichung

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0$$

eines der Kegelschnitte der Aufgabe III. solche Coefficienten hätte, welche der Bedingung (3) unserer vorigen Coefficienten-Wahl nicht genügten, so können wir immer, durch Multiplicirung aller Coefficienten mit einem unbestimmten Factor N, uns eine neue Function zweiten Grades denken, deren Coefficienten der genannten Bedingung genügten, d. h. so, dass man identisch hätte

$$\alpha N x^2+\beta N y^2+\gamma N xy+\delta N x+\varepsilon N y+\zeta N\equiv(ax+by+1)(cx+dy+1)+e$$

Durch Entwickelung ergibt sich

$$\alpha N=ac\ \ \beta N=bd\ \ \gamma N=ad+bc\ \ \delta N=a+c\ \ \varepsilon N=b+d,$$

woraus man

$$N=\frac{\gamma^2-4\alpha\beta}{\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2}$$

als denjenigen Quotienten bekommt, welcher bei jeder beliebigen die Darstellbarkeit unter der Form (1) besitzenden Function zweiten Grades

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0$$

den Werth $=1$ hat, bei jeder beliebigen dagegen dieser Darstellbarkeit ermangelden Function

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0$$

allen Coefficienten vorher als Factor zugefügt werden muss, um der Function die Darstellbarkeit (1) zu geben. Substituiren wir also in zwei der zur Aufgabe IV. erhaltenen Antwortsgleichungen, z. B. in den Gleichungen (6), statt $ABDE\ A'B'D'E'$ respective

$$\alpha N,\ \beta N,\ \delta N,\ \varepsilon N,\quad \alpha' N',\ \beta' N',\ \delta' N',\ \varepsilon' N',$$

d. h.

$$\frac{\alpha(\gamma^2-4\alpha\beta)}{\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2},\ \frac{\beta(\gamma^2-4\alpha\beta)}{\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2}\ \text{u. s. w.}\ldots\ \frac{\alpha'(\gamma'^2-4\alpha'\beta')}{\gamma'\delta'\varepsilon'-\beta'\delta'^2-\alpha'\varepsilon'^2}\ \text{u. s. w.}\ldots$$

so sind die nach gehöriger Entwickelung sich ergebenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\delta-2\alpha\varepsilon)}{\alpha\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}} = \dfrac{\delta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\delta'-2\alpha'\varepsilon')}{\alpha'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}} \\ \dfrac{\varepsilon\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\varepsilon-2\beta\delta)}{\beta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}} = \dfrac{\varepsilon'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\varepsilon'-2\beta'\delta')}{\beta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}} \end{cases}$$

diejenigen, welche die gesuchte Antwort zur Aufgabe III. ausmachen, d. h. welche genügen, um jedem Systeme zweier beliebigen Kegelschnitte

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0,$$
$$\alpha' x^2+\beta' y^2+\gamma' xy+\delta' x+\varepsilon' y+\zeta'=0,$$

man möge nun ihre sechs und sechs Coefficienten mit jedem beliebigen Factor multipliciren, jedesmal auf's neue die Eigenschaft des Besitzes einer gemeinschaftlichen Asymptote zu verschaffen. Hätte die andere Antwortsform (4) der Aufgabe IV. die nämliche Verallgemeinerung erlitten, so hätten wir die Antwort der Aufgabe III. in folgender etwas weniger einfachen Gestalt bekommen:

$$\frac{\delta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\delta-2\alpha\varepsilon)}{(\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2)\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}} = \frac{\delta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\delta'-2\alpha'\varepsilon')}{(\gamma'\delta'\varepsilon'-\beta'\delta'^2-\alpha'\varepsilon'^2)\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}$$
$$\frac{\varepsilon\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\varepsilon-2\beta\delta)}{(\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2)\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}} = \frac{\varepsilon'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\varepsilon'-2\beta'\delta')}{(\gamma'\delta'\varepsilon'-\beta'\delta'^2-\alpha'\varepsilon'^2)\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}.$$

Welche aber der Antwortsformen (4) oder (6) oder (7) man auch gewählt hätte, immer würde es uns nicht erlaubt sein, die durch Verallgemeinerung sich ergebenden Gleichungen ohne Aenderung der Bedeutung beide zugleich rational zu machen, aus der nämlichen Ursache, wesshalb die Gleichungen (4) oder (6) oder (7) selbst nicht beide zugleich rational gemacht werden dürfen. Wollen wir daher die Antwort zur Aufgabe III. in rationaler Form bekommen, so müssen wir in irgend einem der Gleichungen-Paare (8) die Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w.... durch die allgemeineren

$$\frac{\alpha(\gamma^2-4\alpha\beta)}{\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2},\quad \frac{\alpha'(\gamma'^2-4\alpha'\beta')}{\gamma'\delta'\varepsilon'-\beta'\delta'^2-\alpha'\varepsilon'^2},\quad \frac{\beta(\gamma^2-4\alpha\beta)}{\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2},\quad \text{u. s. w.}$$

ersetzen, woraus sich ein System zweier verwickelter Formeln ergibt, deren Entwickelung hier füglich unterwegs bleiben darf.

Wir wollen jetzt nochmals die gefragte Antwort auf die Aufgabe III. zu bekommen suchen, diesmal aber mittelst einer anderen Coefficienten-Wahl, d. h. mittelst der Lösung einer anderen intermediären Aufgabe IV. Es sollen nämlich die zwölf Coefficienten

$$ABCDEF\,A'B'C'D'E'F'$$

jetzt nicht den Bedingungen (3), sondern den Bedingungen $A=1$ $A'=1$ unterworfen sein und sich daher auf zehn reduciren. Neh-

Digitized by Google

men wir jetzt die erstere unserer beiden Gleichungen, so können wir immer identisch setzen

$$x^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F\equiv(x+py+q)(x+my+n)+r,$$

und zwar ohne dass wir die Coefficienten $BCDEF$ irgend einer neuen Bedingung zu unterwerfen brauchen; welches letzte dagegen der Fall gewesen sein würde, wenn wir unsere Gleichung der Darstellbarkeit unter der Form (1) unterworfen hätten. Durch Entwickelung ergibt sich, dass die vier Coefficienten $BCDE$ in den vier Grössen $p\ q\ m\ n$ durch die Gleichungen

$$B=pm\quad C=p+m\quad D=q+n\quad E=pn+qm$$

und daher umgekehrt die Grössen $p\ q\ m\ n$ in den Coefficienten durch die Gleichungen

$$p=\frac{1}{2}(C\pm\sqrt{C^2-4B})\qquad q=\frac{1}{2}D\pm\frac{CD-2E}{2\sqrt{C^2-4B}}$$

$$m=\frac{1}{2}(C\mp\sqrt{C^2-4B})\qquad n=\frac{1}{2}D\mp\frac{CD-2E}{2\sqrt{C^2-4B}}$$

ausgedrückt werden. Setzen wir ebenso

$$x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'\equiv(x+p'y+q')(x+m'y+n')+r',$$

so ergibt sich, als die zum gemeinschaftlichen Besitze einer Asymptote nothwendige Bedingung, das Stattfinden des einen oder des anderen der vier folgenden Gleichungen-Paare

$$\begin{array}{cccc} p=p' & p=m' & m=p' & m=m' \\ q=q' & q=n' & n=q' & n=n' \end{array}$$

d. h. das Stattfinden der beiden Gleichungen

$$C\pm\sqrt{C^2-4B}=C'\pm\sqrt{C'^2-4B'}$$

$$\frac{D\sqrt{C^2-4B}\pm(CD-2E)}{\sqrt{C^2-4B}}=\frac{D'\sqrt{C'^2-4B'}\pm(C'D'-2E')}{\sqrt{C'^2-4B'}}$$

bei irgend einer von vier gewissen aus den sechszehn möglichen Combinationen der in ihnen vorkommenden Doppelzeichen $\pm$. Ersetzen wir nun in diesen Anwortsgleichungen unserer jetzigen Aufgabe IV. die Coefficienten $BB'CC'$ u. s. w. respective durch $\frac{\beta}{\alpha}\ \frac{\beta'}{\alpha'}\ \frac{\gamma}{\alpha}\ \frac{\gamma'}{\alpha'}$ u. s. w., so bekommen wir die Antwort der Aufgabe III. unter folgender Form:

Digitized by Google

$$\frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}{\alpha} = \frac{\gamma' \pm \sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}{\alpha'},$$

$$\frac{\delta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta} \pm (\gamma\delta-2\alpha\varepsilon)}{\alpha\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}} = \frac{\delta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'} \pm (\gamma'\delta'-2\alpha'\varepsilon')}{\alpha'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}.$$

Hätten wir diejenige Coefficienten-Wahl genommen, wo nicht $A=1$ $A'=1$, sondern $B=1$ $B'=1$, so hätten wir durch eine ähnliche Argumentation die Antwort auf die Aufgabe III. unter der Form

$$\frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}{\beta} = \frac{\gamma' \pm \sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}{\beta'}$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta} \pm (\gamma\varepsilon-2\beta\delta)}{\beta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}} = \frac{\varepsilon'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'} \pm (\gamma'\varepsilon'-2\beta'\delta')}{\beta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}$$

bekommen, wobei jedoch in beiden Fällen zu beachten ist, dass zwar eine beider Gleichungen, z. B. die erstere, rational gemacht und zur Form

$$(9) \qquad (\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\beta'\gamma-\beta\gamma') + (\alpha'\beta-\alpha\beta')^2 = 0$$

gebracht werden darf, die gleichzeitige Rationalmachung aber der anderen nicht erlaubt ist.

Da jede unserer beiden letzten Coefficienten-Wahlen eine unsymmetrische war, d. h. eine andere in Bezug auf A, B, D, E, als in Bezug auf B, A, E, D, so bekommen wir in diesen beiden Fällen die Antwort der Aufgabe III. in unsymmetrischer Form. Und zwar bekommen wir jedesmal nur eine der beiden Gleichungen, welche die nach der vorigen Methode bekommene symmetrische Antwortsform der Aufgabe III. ausmachten. Die andere unserer jetzigen Gleichungen drückt, wenn wir die Cotangenten der zwischen der Coordinaten-Axe $y=0$ und den Asymptoten der Kegelschnitte begriffenen Winkel μ nennen, die Bedingung aus, dass sowohl

$$\mu = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}{2\alpha}$$

als auch (10)

$$\mu = \frac{\gamma' \pm \sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}{2\alpha'},$$

d. h. die Bedingung, dass eine der beiden Asymptoten des ersten Kegelschnitts eine des zweiten zwar nicht decke, aber doch ihr parallel laufe, d. h. die Bedingung, dass von den vier Durchschnittspunkten der Kegelschnitte einer unendlich vom Coordinaten-Ursprung entfernt sei.

Digitized by Google

Eine andere Methode, die Aufgabe III. zu lösen, ist folgende: Stellen wir uns die gegebene Frage III. unter folgender etwas veränderten Form vor:

V. Aus allen den individuellen Kegelschnitts-Paaren, welche man bekommt, wenn man im Ausdrucke

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$
$$\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' xy + \delta' x + \varepsilon' y + \zeta' = 0$$

den Coefficienten α, β, u. s. w. . . . α', β', u. s. w. alle möglichen reellen Werthe zuertheilt, diejenigen auszusuchen, denen die Eigenschaft des gemeinschaftlichen Besitzes einer Asymptote zukommt?

Um nun zur vollständigen Antwort dieser Frage V. zu gelangen, d. h. zu einem Ausdruck, welcher alle die eine gemeinschaftliche Asymptote besitzenden Kegelschnitts-Paare enthält, wollen wir von einer particulären Lösung ausgehen, d. h. von einem nur einige dieser Kegelschnitts-Paare darstellenden Ausdruck, z. B. vom Ausdruck

$$(y)(gx + hy + 1) + k \equiv gxy + hy^2 + y + k = 0$$
$$(y)(g'x + h'y + 1) + k' \equiv g'xy + h'y^2 + y + k' = 0,$$

welcher, wenn man den Grössen $g\ h\ k\ g'\ h'\ k'$ alle möglichen Werthe zuertheilt, alle möglichen Kegelschnitts-Paare ausdrückt, welche die Coordinaten-Axe $y = 0$ zur gemeinschaftlichen Asymptote haben und daher, ausser den geforderten zwei Bedingungen der Asymptoten-Coincidirung, auch noch den zwei anderen unterworfen sind, dass die gemeinschaftliche Asymptote senkrecht zur Axe $x = 0$ laufe und dass sie den Coordinaten-Ursprung durchstreiche. Es enthält nun aber der erstere der Kegelschnitte unserer particulären Lösung nur drei Unbestimmte $g\ h\ k$, und ist daher, da ein allgemeiner Kegelschnitt deren fünf enthält, 5—3=2 Bedingungen unterworfen, nämlich dass eine ihrer Asymptoten senkrecht zur Axe $x = 0$ laufe und den Punkt $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$ durchstreiche, d. h. es sind ihre durch Entwickelung sich ergebenden Coefficienten nicht die allgemeinen der Gleichungsform

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0,$$

sondern zweien Bedingungen unterworfen, und zwar zweien von der Coefficienten-Wahl unabhängigen: erstens nämlich dass $\alpha = 0$, zweitens dass die Tangente des zwischen der Asymptote und der Axe $y = 0$ begriffenen Winkels sowohl $= -\frac{\delta}{\varepsilon}$, als auch

$$= \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}}{2\beta}$$

sei, d. h. dass man habe $\alpha\varepsilon^2 + \beta\delta^2 = \gamma\delta\varepsilon$, d. h. dass die Darstellbarkeit unter Form (I) im Allgemeinen unmöglich sei. Und auch

Digitized by Google

der zweite Kegelschnitt der particulären Lösung ist zweien ähnlichen Bedingungen

$$\alpha' = 0 \text{ und } \gamma'\delta'\varepsilon' - \beta'\delta'^2 - \alpha'\varepsilon'^2 = 0$$

unterworfen. Es war aber in der Frage V. nach einem Systeme zweier Kegelschnitte gefragt, deren jeder an sich ganz allgemein wäre, sodass nur das ganze System sich durch den Besitz einer gemeinschaftlichen Asymptote specialisirte. Soll daher unsere particuläre Lösung die vollständige Lösung der Frage V. werden, so müssen wir jedem beider Kegelschnitte, damit sie die allgemeine werde, zwei Unbestimmte zu ihren drei vorigen hinzufügen, d. h. wir müssen sie betrachten als einen speciellen Fall eines allgemeinen Kegelschnitts, welche aus dem primitiven durch eine in zweifacher Hinsicht unbestimmte Transformation entstanden sei. Wir würden aber auf diese Weise dem Systeme $2\times 2 = 4$ Unbestimmte hinzufügen, sodass es $6+4=10$ d. h. die zum Ausdruck eines allgemeinen Systems zweier Kegelschnitte nothwendige Anzahl von 2×5 Unbestimmten bekäme und daher keineswegs die in der Frage V. gefragten speciellen Systeme von Kegelschnitten ausdrücken würde. Wir müssen daher nicht jeden Kegelschnitt an sich, sondern beide zugleich, mit Beibehaltung ihrer relativen Lage, verallgemeinern durch eine zwei Unbestimmte ϑ $\varkappa$ enthaltende Transformation, wodurch wir die Lösung der Frage V. d. h. den $6+2=8$ Unbestimmte enthaltenden Ausdruck eines den $10-8=2$ Bedingungen der Asymptoten-Coincidirung unterworfenen Systemes zweier Kegelschnitte bekommen. Und um hiervon zur Lösung der Frage III., d. h. um vom Ausdrucke selbst zum Zusammenhange seiner Coefficienten zu gelangen, stellen wir die zwölf Coefficienten unseres erhaltenen Ausdrucks respective den zwölf Coefficienten eines allgemeinen Systems zweier Kegelschnitte gleich; wobei jedoch zu beachten ist, dass die zwei Gruppen der sechs Coefficienten unserers Ausdrucks, weil sie jede mit einem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt werden dürfen, nicht die allgemeinen der Aufgabe III., sondern die bestimmten der Aufgabe IV. sind, und daher den zwölf Coefficienten

$$ABCDEF\ A'B'C'D'E'F'$$

eines bei irgend einer bestimmten Coefficienten-Wahl stattfindenden Ausdrucks

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

respective gleichgestellt werden müssen, aus welchem System von zwölf Gleichungen wir durch Elimination der acht Grössen $ghk\ g'h'k'\ \vartheta\varkappa$ die verlangten vier Gleichungen zwischen den zwölf Coefficienten

$$ABCDEF\ A'B'C'D'E'F',$$

d. h. die Lösung der jedesmaligen Frage IV. bekommen; woraus alsdann weiter, wie früher, die Antwort der Aufgabe III. abgeleitet werden muss.

Digitized by Google

Es ist aber wohl zu beachten, dass nicht jede beliebige, zwei Unbestimmte enthaltende, Transformation dazu geeignet ist, unsere particuläre Lösung der Frage V. in die vollständige abzuändern. Nehmen wir z. B. diejenige Transformation, wobei die älteren Coordinaten x und y respective durch neuere

$$x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta + \lambda \qquad y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$

ersetzt werden, so bekommen wir den Ausdruck

$$(h\sin^2\vartheta + g\sin\vartheta\cos\vartheta)x^2 + (h\cos^2\vartheta - g\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + [g(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + 2h\sin\vartheta\cos\vartheta]xy + \ldots\ldots + (g\lambda+1)(\sin\vartheta)x + (g\lambda+1)(\cos\vartheta)y + k = 0$$

$$(h'\sin^2\vartheta + g'\sin\vartheta\cos\vartheta)x^2 + (h'\cos^2\vartheta - g'\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + [g'(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + 2h'\sin\vartheta\cos\vartheta]xy + \ldots\ldots + (g'\lambda+1)(\sin\vartheta)x + (g'\lambda+1)(\cos\vartheta)y + k' = 0$$

und wenn wir die so bekommenen zwölf Coefficienten respectiv den zwölf Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w. gleichstellen, bekommen wir unmittelbar

$$\frac{D}{E} = -\operatorname{tg}\vartheta = \frac{D'}{E'} \text{ d. h. } DE' - D'E = 0$$

d. h einen Coefficientenzusammenhang, welchen wir durch keine der vorigen Methoden als der Eigenschaft der Asymptoten-Coincidirung zukommend gefunden haben; und doch, wenn er wirklich ihr zukäme, hätte er, da er ein von der Coefficienten-Wahl unabhängiger ist und daher durch $\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon = 0$ dargestellt werden kann, entweder eine der Gleichungen (11) oder doch eine Resultante dieser beiden Gleichungen sein sollen. Es ergibt sich dann auch bei näherer Betrachtung, dass wir nicht die vollständige, sondern eine neue particuläre Lösung der Frage V. bekommen haben, sodass unsere Gleichung $\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon = 0$ nur denjenigen Kegelschnitts-Paaren zukommt, welche, ausser den beiden Eigenschaften der Asymptoten-Coincidirung, noch durch eine dritte Eigenschaft specialisirt sind. Es ist nämlich unsere Transformation zu betrachten als eine Translation der primitiven Figur parallel der Axe $y=0$, d. h. als eine Ersetzung der x und y durch neue Coordinaten $x' = x + \lambda$, $y' = y$, der eine Umdrehung um den Coordinaten-Ursprung, d. h. eine Ersetzung der x und y durch

$$x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$$
$$y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$

nachgefolgt wäre. Es ändert nun aber die erstere dieser partiellen Transformationen die gegebene particuläre Lösung in

$$(y)\left(\frac{g}{g\lambda+1}x + \frac{h}{g\lambda+1}y + 1\right) + \frac{k}{g\lambda+1} = 0$$

Digitized by Google

$$(y)\left(\frac{g'}{g'\lambda+1}x+\frac{h'}{g'\lambda+1}y+1\right)+\frac{k'}{g'\lambda+1}=0$$

d. h. in

$$(y)(g''x+h''y+1)+k''=0$$
$$(y)(g'''x+h'''y+1)+k'''=0$$

und ist daher eigentlich nicht als Verallgemeinerung zu betrachten, sodass die ganze Doppel-Transformation als aus der einfachen Transformation

$$x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta$$
$$y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta$$

bestehend und daher nur eine einzige Unbestimmte ϑ der particulären Lösung zuführend zu betrachten ist, sodass diese particuläre Lösung von ihren vier Specialisirungsbedingungen nur die einzige, dass die gemeinschaftliche Asymptote senkrecht zur Axe $x=0$ laufe, verloren hat, die zwei Bedingungen dagegen der Asymptoten-Coincidirung und die dritte, dass die gemeinschaftliche Asymptote, d. h. die Vereinigungs-Gerade beider Kegelschnitts-Centra, den Coordinaten-Ursprung durchstreiche, noch behalten hat; und diese dritte Bedingung wird eben durch die erhaltene Gleichung $\delta\varepsilon'-\delta'\varepsilon=0$ ausgedrückt.

Wir müssen daher die Verallgemeinerung auf andere Weise einrichten, z. B. die Translation $\begin{matrix}x'=x+\lambda\\y'=y\end{matrix}$ der Umdrehung

$$x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta$$
$$y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta$$

nicht vorausgehen, sondern folgen lassen, und daher die Transformation

$$x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta+\lambda\cos\vartheta$$
$$y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta+\lambda\sin\vartheta$$

benutzen; oder, wenn wir statt der Translation $\begin{matrix}x'=x+\lambda\\y'=y\end{matrix}$ die andere $\begin{matrix}x'=x\\y'=y+\varkappa\end{matrix}$ nehmen, können wir diese der Drehung

$$x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta$$
$$y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta$$

entweder folgen oder vorangehen lassen. Nehmen wir letzteren Fall und ersetzen wir daher die Coordinaten x und y unserer particulären Lösung durch

Digitized by Google

$$x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$$
$$y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta + \varkappa,$$

so bekommen wir den Ausdruck

$$(h\sin^2\vartheta + g\sin\vartheta\cos\vartheta)x^2 + (h\cos^2\vartheta - g\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + [g(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + 2h\sin\vartheta\cos\vartheta]xy + \ldots\ldots + [(2h\varkappa + 1)\sin\vartheta + g\varkappa\cos\vartheta]x + [(2h\varkappa + 1)\cos\vartheta - g\varkappa\sin\vartheta]y + (h\varkappa^2 + \varkappa + k) = 0$$

$$(h'\sin^2\vartheta + g'\sin\vartheta\cos\vartheta)x^2 + (h'\cos^2\vartheta - g'\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + [g'(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + 2h'\sin\vartheta\cos\vartheta]xy + \ldots\ldots + [(2h'\varkappa + 1)\sin\vartheta + g'\varkappa\cos\vartheta]x + [(2h'\varkappa + 1)\cos\vartheta - g'\varkappa\sin\vartheta]y + (h'\varkappa^2 + \varkappa + k') = 0$$

Multipliciren wir jetzt Alles mit $\sin\vartheta$, setzen wir zur Abkürzung $\operatorname{cotg}\vartheta = \mu$ und identificiren wir unsere zwölf Coefficienten mit den Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w., so bekommen wir das System der zwölf Gleichungen

$$A = \frac{h + g\mu}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad B = \frac{h\mu^2 - g\mu}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad C = \frac{g\mu^2 + 2h\mu - g}{(\mu^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$A' = \frac{h' + g'\mu}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad B' = \frac{h'\mu^2 - g'\mu}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad C' = \frac{g'\mu^2 + 2h'\mu - g'}{(\mu^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$D = \frac{(2h\varkappa+1) + (g\varkappa\mu)}{\mu^2+1} \quad E = \frac{(2h\varkappa+1)\mu - (g\varkappa)}{\mu^2+1} \quad F = \frac{h\varkappa^2 + \varkappa + k}{\sqrt{\mu^2+1}}$$

$$D' = \frac{(2h'\varkappa+1) + (g'\varkappa\mu)}{\mu^2+1} \quad E' = \frac{(2h'\varkappa+1)\mu - (g'\varkappa)}{\mu^2+1} \quad F' = \frac{h'\varkappa^2 + \varkappa + k'}{\sqrt{\mu^2+1}}.$$

Sondern wir aus den vier ersten Gleichungen die Grössen $gg'hh'$ ab, so bekommen wir

$$h = (A+B)\sqrt{\mu^2+1} \quad h' = (A'+B')\sqrt{\mu^2+1}$$

$$g = \frac{(A\mu^2 - B)\sqrt{\mu^2+1}}{\mu} \quad g' = \frac{(A'\mu^2 - B')\sqrt{\mu^2+1}}{\mu}$$

und substituiren wir dieses in die Werthe der C und C', so ergibt sich

$$C = \frac{A\mu^2 + B}{\mu} \quad C' = \frac{A'\mu^2 + B'}{\mu},$$

aus welchen Gleichungen sich die beiden Werthe (10) der Grösse μ und daher durch deren Gleichstellung die Gleichung (9) ergibt. Um die übrigen Gleichungen der gesuchten Antwort zu bekommen, nehmen wir aus den zwölf Gleichungen die Nr. (7), (8), (9), (10), und verbinden sie zu

Digitized by Google

$$\mu E + D = 2h\varkappa + 1 \quad \mu E' + D' = 2h'\varkappa + 1$$

woraus wir bekommen

$$\frac{\mu E + D - 1}{2(A+B)\sqrt{\mu^2+1}} = \varkappa = \frac{\mu E' + D' - 1}{2(A'+B')\sqrt{\mu^2+1}}$$

und wenn wir den hieraus sich ergebenden Werth des μ dessen beiden vorher erhaltenen Werthen (10) respective gleichstellen, bekommen wir zwei neue Antwortsgleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{(D'-1)(A+B)-(D-1)(A'+B')}{E(A'+B')-E'(A+B)} = \dfrac{C \pm \sqrt{C^2-4AB}}{2A} \\ \dfrac{(D'-1)(A+B)-(D-1)(A'+B')}{E(A'+B')-E'(A+B)} = \dfrac{C' \pm \sqrt{C'^2-4A'B'}}{2A'} \end{cases}.$$

Und durch eine etwas andere Einrichtung der Elimination könnten wir diesen drei Gleichungen leicht noch eine vierte hinzufügen und so die vollständige Lösung unserer jetzigen Aufgabe IV. bekommen. Von diesen Gleichungen ist die erste, d. h. die Gleichung (9), eine von der Coefficienten-Wahl unabhängige; die übrigen dagegen finden nur bei unserer jetzigen Coefficienten-Wahl statt. Und es ist diese eine von den vorher benützten verschiedene; denn der die Natur der Coefficienten-Wahl ausdrückende Zusammenhang zwischen den sechs Coefficienten einer Kegelschnittsgleichung ist hier nicht das sich zu fünf Reduciren der sechs Coefficienten oder die Darstellbarkeit der Gleichung unter der Form (1), sondern es ist ihre Entspringbarkeit aus der Form

$$(y)(gx + hy + 1) + k = 0$$

mittelst der Transformation

$$x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$$
$$y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta + \varkappa,$$

sodass der in der Antwort angegebene Zusammenhang nicht mehr — wie früher, da die Gleichungen (4) die Antwort darstellten, der Fall war — den Coefficienten der Gleichungen

$$(2x+3y+1)(4x+5y+1) - 12 \equiv 8x^2 + 15y^2 + 22xy + 6x + 8y - 11 = 0$$

$$(2x+3y+1)(6x+7y+1) - 11 \equiv 12x^2 + 21y^2 + 32xy + 8x + 10y - 10 = 0$$

zukommt, dieser Zusammenhang (12) dagegen den Coefficienten der, durch Multiplicirung der vorigen Gleichungen mit $\frac{2}{13}$ sich ergebenden Gleichungen

$$\frac{16}{13}x^2 + \frac{30}{13}y^2 + \frac{44}{13}xy + \frac{12}{13}x + \frac{16}{13}y - \frac{22}{13} = 0$$

Digitized by Google

$$\frac{24}{13}x^2+\frac{42}{13}y^2+\frac{64}{13}xy+\frac{16}{13}x+\frac{20}{13}y-\frac{20}{13}=0$$

zukommt. Wollen wir nun weiter aus der erhaltenen Antwort zur jetzigen Aufgabe IV. die zur Aufgabe III. herleiten, so müssen wir in den Gleichungen (12) nebst zwei anderen bei der nämlichen Coefficienten-Wahl stattfindenden Gleichungen, die Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w. respective durch αN, $\alpha' N'$, βN, $\beta' N'$, u. s. w. ersetzen, wobei N und N' respective die unbekannten Functionen der allgemeinen Coefficienten $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'$ bedeuten, deren jede, wenn sie mit den sechs Coefficienten irgend einer beliebigen Kegelschnittsgleichung multiplicirt wird, diese zu den Coefficienten unserer jetzigen Wahl abändert; aus welchem Systeme von vier Gleichungen sich alsdann einerseits, durch Absonderung der N und N', der Werth dieser unbekannten Factoren, andererseits, durch Elimination der N und N', die Antwort der Aufgabe III., d. h. die gesuchten von der Coefficienten-Wahl unabhängigen zwei Gleichungen zwischen den Grössen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'$ finden liesse.

Bei dieser Methode der Lösung der Aufgabe IV., wo man sich einer gewissen particulären Lösung als Hülfsmittel zur Erlangung der vollständigen bedient, fängt man nicht, wie bei den vorigen Methoden, damit an, sich irgend zwei bestimmte Coefficienten-Gruppen auszuwählen; man lässt vielmehr die Coefficienten-Wahl unbestimmt, bis man die vollständige Lösung der Frage V., d. h. den Ausdruck der verallgemeinten Kegelschnitte bekommen hat. Und jetzt erst wählt man sich eine bestimmte Art der Coefficienten aus, je nachdem man die erhaltenen Gleichungen unverändert lässt oder aber sie mit einem oder anderen Factor multiplicirt. Hätten wir z. B. unsere Antwort zur Frage V., statt sie mit $\sin\vartheta$ zu multipliciren, ungeändert gelassen oder aber sie durch $\sin\vartheta$ oder $\sin^2\vartheta$ u. s. w. dividirt, so hätten wir statt (12) andere Gleichungen bekommen.

Wollen wir bei unserer jetzigen Methode die Coefficienten-Wahl nehmen der Bedingungen (3), d. h. der Darstellbarkeit unter Form (1), so müssen wir beachten, dass der zur Antwort auf die Frage V. erhaltene Ausdruck die Form hatte:

$$[x\sin\vartheta+y\cos\vartheta+\varkappa][(h\sin\vartheta+g\cos\vartheta)x+(h\cos\vartheta-g\sin\vartheta)y+(h\varkappa+1)]+k=0$$

$$[x\sin\vartheta+y\cos\vartheta+\varkappa][(h'\sin\vartheta+g'\cos\vartheta)x+(h'\cos\vartheta-g'\sin\vartheta)y+(h'\varkappa+1)]+k'=0$$

sodass, soll jeder Factor der in den ersten Termen der Gleichungen vorkommenden Producte die Einheit zum Coefficienten ihres mit x oder y nicht multiplicirten Terms haben, erstens beide Gleichungen durch $\varkappa$, zweitens die erstere durch $h\varkappa+1$, die zweite durch $h'\varkappa+1$ dividirt werden muss. Identificiren wir nach vollführter Division die erhaltenen zwölf Coefficienten respective

Digitized by Google

mit den Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w. und setzen wir wiederum zur Abkürzung $\cotg\vartheta=\mu$, so bekommen wir die zwölf Gleichungen:

$$A=\frac{h+g\mu}{\varkappa(h\varkappa+1)(\mu^2+1)} \qquad A'=\frac{h'+g'\mu}{\varkappa(h'\varkappa+1)(\mu^2+1)}$$

$$B=\frac{h\mu^2-g\mu}{\varkappa(h\varkappa+1)(\mu^2+1)} \qquad B'=\frac{h'\mu^2-g'\mu}{\varkappa(h'\varkappa+1)(\mu^2+1)}$$

u. s. w., woraus wir bekommen:

$$h\varkappa+1=\frac{k}{\varkappa(A+B)} \qquad h'\varkappa+1=\frac{h'}{\varkappa(A'+B')}$$

$$g=\frac{h}{\mu}\times\frac{A\mu^2-B}{A+B} \qquad g'=\frac{h'}{\mu}\times\frac{A'\mu^2-B'}{A'+B'}$$

und wenn wir diese Werthe der vier Grössen g, g', $h\varkappa+1$, $h'\varkappa+1$ in die Werthe der D und D' substituiren, erhalten wir nach gehöriger Reduction

$$D=\frac{(h\varkappa+1)+h\varkappa+g\varkappa\mu}{\varkappa(h\varkappa+1)\sqrt{\mu^2+1}}=\frac{A\varkappa^2(\mu^2+1)+1}{\varkappa\sqrt{\mu^2+1}}$$

$$D'=\frac{(h'\varkappa+1)+h'\varkappa+g'\varkappa\mu}{\varkappa(h'\varkappa+1)\sqrt{\mu^2+1}}=\frac{A'\varkappa^2(\mu^2+1)+1}{\varkappa\sqrt{\mu^2+1}}$$

und wenn wir die hieraus sich ergebenden Werthe

$$\varkappa=\frac{D\pm\sqrt{D^2-4A}}{2A\sqrt{\mu^2+1}} \qquad \varkappa=\frac{D'\pm\sqrt{D'^2-4A'}}{2A'\sqrt{\mu^2+1}}$$

einander gleichstellen, bekommen wir die erstere der Gleichungen (6), während die zweite in ähnlicher Weise, nur mit einer kleinen Aenderung der Eliminationsweise, gefunden werden würde.

Nachdem wir nun die Aufgaben III. und IV., und daher auch die, beide enthaltende, Aufgabe I. gelöst haben, wollen wir einen anderen Fall betrachten, worin zwei Kegelschnitte auf solche Weise zusammenhangen, dass zwei ihrer vier Durchschnittspunkte sich unendlich vom Coordinaten-Ursprung entfernen. Wir wollen uns nämlich die Aufgabe stellen:

> VI. Wie müssen, sollen die beiden reellen oder imaginären Asymptoten eines Kegelschnitts respective den beiden eines anderen parallel laufen, die Coefficienten beider Kegelschnittsgleichungen zusammenhangen?

So wie wir nun oben die Aufgabe I. in die allgemeinere III. und in die specielleren IV. getrennt haben, so könnten wir auch hier unsere Aufgabe VI. in eine allgemeinere und in verschiedene speciellere trennen. Wir wollen dieses jedoch unterlassen, da

wir sogleich die Antwort zur allgemeineren Aufgabe, d. h. den von der jedesmaligen Coefficienten-Wahl unabhängigen Coefficientenzusammenhang bekommen: Denn nennen wir wiederum μ die Cotangenten der zwischen Asymptote und Coordinaten-Axe $y=0$ begriffenen Winkel, so sind die Asymptoten-Richtungen der beiden Kegelschnitte

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0$$
$$\alpha' x^2+\beta' y^2+\gamma' xy+\delta' x+\varepsilon' y+\zeta'=0$$

respective durch die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\alpha\mu^2+\gamma\mu+\beta=0$$

und durch diejenigen der Gleichung

$$\alpha'\mu^2+\gamma'\mu+\beta'=0$$

gegeben. Soll daher den in der Aufgabe VI. gestellten Forderungen genügt werden, so müssen die beiden Wurzeln der ersteren Gleichung gleich denen der zweiten sein, d. h. es müssen die beiden Gleichungen selbst identisch sein; was nur entweder so möglich ist, dass die drei Coefficienten α, β, γ den drei Coefficienten α', β', γ' respective gleich sind, oder aber so, dass sie von ihnen nur durch einen gemeinschaftlichen Factor verschieden sind. Wir erhalten daher sogleich zur Antwort auf die Aufgabe VI.

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma} \text{ d. h. } \begin{matrix}\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0\\ \beta\gamma'-\beta'\gamma=0\end{matrix}. \qquad (13)$$

Wir wollen jetzt einen dritten Fall betrachten, worin den Forderungen der primitiven Aufgabe genügt wird: Stellen wir uns also die Aufgabe:

VII. Wie müssen die Coefficienten zweier Kegelschnittsgleichungen beschaffen sein, damit einer beider Kegelschnitte sich zu einer Geraden reducire, und daher von den vier in endlicher Entfernung vom Coordinaten-Ursprung liegenden reellen oder imaginären Durchschnittspunkten der zwei Kegelschnitte nur zwei übrig bleiben, nämlich diejenigen der Geraden mit dem sich nicht zu einer Geraden reducirenden Kegelschnitt?

Wir bekommen sogleich zur Antwort, dass das System der zwei Kegelschnitte

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$
$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'=0$$

obigen Forderungen genügt, wenn entweder die drei Gleichungen $A=0$ $B=0$ $C=0$ zugleich stattfinden, oder aber die drei anderen $A'=0$ $B'=0$ $C'=0$. Und es ist diese Antwortsform einigermassen von der Coefficienten-Wahl unabhängig, da sie die Antwort

Digitized by Google

nicht nur bei derjenigen Coefficienten-Wahl darstellt, wo die Coefficienten F und F' respective als Einheiten angenommen werden und die zwölf Coefficienten sich daher auf zehn reduciren, sondern auch bei derjenigen, wo $E=1$ $E'=1$ gesetzt wird, so wie auch bei der dritten, wo $D=1$ $D'=1$. Bei den drei anderen Coefficienten-Wahlen dagegen

$$A=1 \quad B=1 \quad C=1$$
$$A'=1 \quad B'=1 \quad C'=1$$

muss die erhaltene Antwortsform durch diese ersetzt werden, dass die zur Aufgabe VII. erforderliche Coefficienten-Beschaffenheit entweder aus dem Zusammenbestehen der drei Gleichungen $D=\infty$ $E=\infty$ $F=\infty$, oder aber aus dem der drei Gleichungen $D'=\infty$ $E'=\infty$ $F'=\infty$ besteht. Bei allen Coefficienten-Wahlen endlich, wo die zwölf Coefficienten, ohne dass sie sich auf zehn reducirten, irgend zweien Bedingungen, z. B. den Bedingungen (3) unterworfen werden, kann man entweder die eine oder die andere Antwortsform nehmen. Eine dagegen von der Coefficienten-Wahl ganz unabhängige Antwortsform zur Aufgabe VII. wäre das Zusammenbestehen entweder der drei Bedingungen

$$\frac{\alpha}{\delta\varepsilon\zeta}=0 \quad \frac{\beta}{\delta\varepsilon\zeta}=0 \quad \frac{\gamma}{\delta\varepsilon\zeta}=0 \qquad (14)$$

oder der drei anderen

$$\frac{\alpha'}{\delta'\varepsilon'\zeta'}=0 \quad \frac{\beta'}{\delta'\varepsilon'\zeta'}=0 \quad \frac{\gamma'}{\delta'\varepsilon'\zeta'}=0. \qquad (15)$$

Es ist jetzt zu untersuchen, ob ausser diesen drei Fällen der Aufgaben I., VI., VII. noch andere möglich sind, in welchen den Forderungen der primitiven Aufgabe:

VIII. Wann werden zwei Kegelschnitte scheinbar nur zwei reelle oder imaginäre Durchschnittspunkte besitzen, weil die zwei anderen unendlich weit gerückt sind?

genügt wird. Dass keine solchen Fälle mehr vorhanden sind, ergibt sich aus folgender Betrachtung: Es waren in der Form VIII. der primitiven Frage beide Kegelschnitte als unbestimmt und veränderlich angenommen; da es jedoch hier nur auf den Zusammenhang zwischen den Kegelschnitten ankommt, so können wir auch einen beider Kegelschnitte als constant und bestimmt ansehen und uns die Frage unter folgender Form vorlegen:

IX. Es sei ein gewisser bestimmter Kegelschnitt

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

mit bestimmten und constant bleibenden Coefficienten und daher auch mit bestimmten und unveränderlichen Asymptoten kn und lm. Es sei überdiess ein zweiter, den er-

Digitized by Google

steren in den vier Punkten p q r s durchschneidender Kegelschnitt

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0,$$

dessen Coefficienten man jeden beliebigen Werth zuerkennen darf, sodass dessen Form und Asymptoten tw und uv veränderlich seien: Wie müssen alsdann die Coefficienten $A'B'C'D'E'F'$ sich ändern, damit zwei der vier Durchschnittspunkte p q r s unendlich weit rücken?

Es kann nun den Forderungen IX. nur auf diese Weise genügt werden, dass die beiden unendlich weit rückenden Punkte sich nach den Spitzen der Asymptoten kn und lm begeben. Denn es hat der unveränderliche Kegelschnitt keine anderen unendlich entfernten Punkte als eben diese Spitzen; und doch sollen die beiden unendlich weit rückenden Punkte stets Durchschnittspunkte bleiben, d. h. sich nicht vom unveränderlichen Kegelschnitt entfernen. Es ist also die Bedingung der Frage IX. nur auf folgende Weisen möglich: Entweder so, dass die Punkte p und q sich beide zur Spitze der Asymptote kn, oder aber so, dass sie sich beide zur Spitze der lm begeben, oder überhaupt so, dass das Punktenpaar pr oder das Paar ps oder qr oder qs oder rs sich zur Spitze der kn oder sich zur Spitze der lm begebe. Ueberdiess wird die genannte Bedingung noch erfüllt, wenn der Punkt p sich zur Spitze der kn, und zugleich der Punkt q sich zur Spitze der lm, oder aber wenn umgekehrt p sich nach lm und q sich nach kn begiebt, oder wenn überhaupt von den 6 Punkten-Paaren pq, pr, ps, qr, qs, rs der eine Punkt sich zur Spitze der kn, der andere sich zu der der lm begiebt. Es vereinigen sich nun alle erstgenannten Fälle zu der Bedingung, dass zwei der vier Durchschnittspunkte sich beide nach der Spitze einer der beiden Asymptoten des constant bleibenden Kegelschnitts begeben, alle letztgenannten Fälle zu der Bedingung, dass einer der vier Durchschnittspunkte sich zu der Spitze einer dieser Asymptoten und zugleich ein anderer der vier sich zur Spitze der anderen Asymptote begiebt. Es sind nun diese beiden Bedingungen im Allgemeinen respective diejenigen der Aufgaben I. und VI. Denn es wird die zweite unserer Bedingungen im Allgemeinen auf diese Weise erfüllt, dass der veränderliche Kegelschnitt so lange sich umdrehe und seine Form ändere, bis seine Asymptoten-Richtungen respective diejenigen der beiden Asymptoten kn und lm geworden sind; während die erstere Bedingung im Allgemeinen auf diese Weise erfüllt wird, dass der veränderliche Kegelschnitt, ohne gerade seine Form abzuändern zu brauchen, so lange seinen Ort wechsele, bis eine seiner Asymptoten eine der Asymptoten kn oder lm decke. Es können aber beide Bedingungen auch noch auf andere Weise erfüllt werden, wenn nämlich die vier Asymptoten kn, lm, tw, uv vier verschiedene Geraden darstellen, ein gewisser Theil aber des veränderlichen Kegelschnitts sich zu einer fünften, von allen vorigen verschiedenen, Geraden ausdehnt: in welchem Fall die beiden unendlich weit rückenden Punkte sich zwar immer noch auf dem veränderlichen Kegelschnitt,

Digitized by Google

nicht aber auf dieser fünften Geraden befinden, weil sie sonst nicht in den Spitzen der *kn* und *lm* würden liegen können; und es findet in diesem Falle die Bedingung (15) statt.

Die in der Frage IX. gesuchte Aenderung des Kegelschnitts

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

ist also nur auf diese Weise möglich, dass entweder die Bedingungen (11) oder (13) oder (15) erfüllt werden. Soll es aber erlaubt sein, die primitive Aufgabe VIII. unter der Form IX. sich vorzulegen, so muss man der Aufgabe IX. noch die Supplement-Aufgabe hinzufügen:

X. Es sei ein veränderlicher Kegelschnitt

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

mit veränderlichen Asymptoten *kn* und *lm*, und ein constanter Kegelschnitt

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

mit den constanten Asymptoten *tw* und *uv*. Welche Aenderung der *ABCDEF* giebt dem Systeme die in der Frage VIII. gesuchte Eigenschaft?

Und es besteht alsdann die Antwort auf die Frage VIII. aus den respectiven Antworten der IX. und X. zusammen. Die verschiedenen Fälle nun, in welchen der Aufgabe X. genügt wird, vereinigen sich ebenfalls zu drei Gruppen; deren beide ersteren resp. diejenigen sind der Aufgaben VI. und I., d. h. der Bedingungen (13) und (11), und daher den Aufgaben IX. und X. gemeinschaftlich sind; während die dritte Gruppe diejenigen Fälle umfasst, in welchen der in der Aufgabe X. veränderliche Kegelschnitt sich unendlich vergrössert, d. h. wenn die Bedingungen (14) stattfinden.

Da also ausser den Fällen der drei Aufgaben I., VI, VII. keine anderen vorhanden sind, in welchen der Aufgabe VIII. genügt wird, so bekommen wir sogleich als den gesuchten zur Aufgabe VIII. erforderlichen Coefficienten-Zusammenhang, dass es derjenige ist, bei welchem irgend eines der vier Gleichungs-Systeme

(11) (13) (14) (15)

stattfindet. Es setzt diess jedoch voraus, dass keine der drei Aufgaben I., VI., VII. eine Specialisirung einer der beiden anderen sei, da man alsdann sich mit den Antworten zu denjenigen beiden Aufgaben begnügen könnte, welche die dritte als speciellen Fall in sich enthielten. Und wirklich würde man oberflächlich meinen, es sei die Aufgabe VII. ein specieller Fall der I., denn es werde der Aufgabe I. in den beiden Fällen der VII. genügt,

weil die Antwortsgleichung (9) der Aufgabe I. sowohl durch die Bedingungen (14) als auch durch (15) zu $0=0$ reducirt wird. Es ist aber zu beachten, dass der Gleichung (9), soll sie die vollständige sein, noch ein Factor $\frac{1}{\alpha\alpha'}$ oder $\frac{1}{\beta\beta'}$ zukommen muss, weil sie vor ihrer Rationalmachung das Einandergleichsein der beiden Werthe (10) des μ bedeutete. Es wird nun der erstere dieser beiden Werthe

$$\mu=\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}{2\alpha}$$

durch die Annahme $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ zur Form $\frac{0}{0}$ reducirt, und ist — im Fall man die Gerade nur als Gerade betrachtet, d. h. im Fall man die Coefficienten α, β, γ nicht näher bestimmt, als dass sie $=0$ sein sollen — gänzlich unbestimmt; wenn man dagegen die Gerade als unendlich grossen Kegelschnitt betrachtet, so drückt unsere Formel die beiden Asymptoten-Richtungen aus, welche dem Kegelschnitt vor seiner Vergrösserung zukamen und auch noch nach vollführter Vergrösserung zukommen. (Nicht zu verwechseln mit der Richtung der Geraden selbst, welche, da jede Gerade als ihre eigene Asymptote betrachtet werden kann, in gewisser Hinsicht eine dritte Asymptote der Figur ist). Jedenfalls aber ist kein Grund vorhanden, weshalb durch die Bedingungen (14), der erstere dieser beiden Werthe (10) des μ dem anderen, nur von α', β', γ' abhangenden und daher von den Bedingungen (14) keinen Einfluss empfindenden Werth desselben gleich werden sollte; woraus sich ergibt, dass die Aufgabe VII. keine Specialisirung der I. ist. Andererseits aber sollte man meinen, es sei die Aufgabe I., d. h. dass zwei Kegelschnitte einander in unendlicher Entfernung vom Coordinaten-Ursprung berühren sollen, ein specieller Fall der Aufgabe VII., wo die Kegelschnitte einander zweimal in unendlicher Entfernung durchschneiden sollen, ebenso wie überhaupt das Sich-Berühren zweier Kegelschnitte ein specieller Fall ist des allgemeineren, wo sie sich durchschneiden. Denken wir uns jedoch, dass in der Aufgabe VIII., z. B. in der Aufgabe IX, schon einer der vier Durchschnitspunkte, z. B. der Punkt p, unendlich weit gerückt wäre, und zwar nach der Spitze der Asymptote kn, sodass nur noch der Punkt q unendlich weit rücken sollte: es hat alsdann dieser Punkt q, um in's Unendliche zu gelangen, die Wahl zwischen zwei Wegen, demjenigen der Asymptote kn und demjenigen der lm: im ersteren Fall wird der Aufgabe I. genügt, im letzteren Fall der Aufgabe VI.: es hat nun eben so viele Wahrscheinlichkeit für sich, dass der Punkt q die erstere, als dass er die zweite Bahn wählen wird; und es ist keineswegs die eine Wahl, d. h. die eine Aufgabe, ein specieller Fall der anderen. Weit entfernt also, dass die Aufgabe I. ein specieller Fall der VI. wäre, wird im Gegentheil, sobald der Aufgabe I. genügt wird, der VI. im Allgemeinen nicht genügt: denn es sei z. B. die Bedingung I. auf diese Weise erfüllt, dass die Asymptoten kn und tw einander decken, so ist die relative Lage der lm und ur zu einander unbestimmt gelassen, und es sind daher die lm und ur einander

Digitized by Google

im Allgemeinen nicht parallel; während dagegen die Frage VI. forderte, dass nicht nur die *kn* der *tw*, sondern auch die *ln* der *uv* parallel wäre.

Da also die primitive Aufgabe VIII. aus den drei Aufgaben I., VI., VII. zusammengesetzt ist, so ist die Antwort zur Aufgabe VIII. auf zweierlei Weise zu bekommen: entweder unmittelbar, ohne dass wir die VIII. in die drei partiellen Aufgaben trennen; oder aber so, dass wir die zu den drei partiellen Aufgaben I., VI., VII. erhaltenen vier Antworten (11), (13), (14), (15) zusammenfügen. Die letztere Weise wäre sehr leicht, wenn jede dieser vier Antworten nur aus einer einzigen Gleichung bestände, da man alsdann die vier Gleichungen nur mit einander zu multipliciren brauchte, um die verlangte Antwortsgleichung zur primitiven Aufgabe zu bekommen. Die gegenseitige Multiplication jedoch der zwei Gleichungen der Antwort (11) mit den beiden der Antwort (13) würde uns Mehreres als die Summe der Antworten (11) und (13) liefern; wozu noch kommt, dass jede der Antworten (14) und (15) aus einem System dreier Gleichungen besteht, sodass es durch unmittelbare Multiplication unmöglich ist, ein den Complex der vier Gleichungs-Systeme (11), (13), (14), (15) ausdrückendes Gleichungs-System zu finden. Wir wollen uns daher lieber der anderen Auflösungsweise der Aufgabe VIII. bedienen und auf folgende Weise argumentiren:

Wir wollen diejenige Coefficienten-Wahl nehmen, wo $C=1$, $C'=1$, und daher anfangen mit der Auflösung einer speciellen Aufgabe, die zur VIII. steht, wie die IV. zur III. Dass nun zwei der vier Durchschnittspunkte der Kegelschnitte

$$Ax^2+By^2+xy+Dx+Ey+F=0,$$

$$A'x^2+B'y^2+xy+D'x+E'y+F'=0$$

unendlich vom Coordinaten-Ursprung entfernt seien, erheischt im Allgemeinen, dass zwei der vier Ordinaten der Durchschnittspunkte unendlich grosse Werthe besitzen, d. h. dass die durch Elimination von x aus den gegebenen beiden Gleichungen sich ergebende Gleichung vierten Grades $f_4(y)=0$ zwei unendlich grosse Wurzeln besitze und sich daher auf eine Gleichung zweiten Grades $F_2(y)=0$ reducire. Es ist nun die genannte Gleichung $f_4(y)=0$ folgende:

$$\frac{-(y+D)\pm\sqrt{(y+D)^2-4A(By^2+Ey+F)}}{2A}$$

$$=x=\frac{-(y+D')\pm\sqrt{(y+D')^2-4A'(B'y^2+E'y+F')}}{2A'},$$

d. h. das $=0$ Sein eines Productes von vier Functionen, deren drei letzteren von der ersten

Digitized by Google

$$(A-A')y+\tfrac{1}{2}(AD'-A'D)$$
$$+A'\sqrt{(y+D)^2-4A(By^2+Ey+F)}-A\sqrt{(y+D')^2-4A'(B'y^2+E'y+F')}$$

nur durch die Zeichen der beiden Radicale verschieden sind. Entwickeln wir, so bekommen wir nach gehöriger Reduction, dass die Function

$$[A'-A-2(A'B-AB')]\,y^2+.....$$
$$....+[2A'D-A(D+D')-2A(A'E-AE')]y+...$$
$$....+[D(A'D-AD')-2A(A'F-AF')]$$

in's Quadrat erhoben, gleich sei dem Producte

$$[(A'-A)^2y^2+2(A'-A)(A'D-AD')y+(A'D-AD')^2]\times.....$$
$$....\times[(1-4AB)y^2+(2D-4AE)y+(D^2-4AF)].$$

Es hat also unsere Gleichung $f_4(y)=0$, wenn wir zur Abkürzung die mit y^2, mit y^1 und mit y^0 multiplicirten Termen respective durch die Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, k andeuten, die Form

$$(a+b+c)^2=(d+e+f)(g+h+k)$$

und wird daher durch Entwickelung die Form annehmen

$$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=dg+dh+dk+eg+eh+ek+fg+fh+fk.$$

Es drückt nun die Gleichung $a^2=dg$ die Bedingung aus, dass die Coefficienten der mit y^4 multiplicirten Termen einander aufheben, d. h. dass die Gleichung $f_4(y)=0$ sich zu einer $F_3(y)=0$ reducire, d. h. dass eine der vier Durchschnittpunkts-Ordinaten unendlich gross sei. In ähnlicher Weise drückt das System der beiden Gleichungen

$$a^2=dg, \qquad 2ab=dh+eg$$

die Bedingung aus, dass unsere Gleichung $f_4(y)=0$ eine $F_2(y)=0$ werde, d. h. dass zwei der vier Durchschnitts-Ordinaten unendlich gross seien, d. h. den gesuchten bei unserer jetzigen Aufgabe erforderlichen Coefficienten-Zusammenhang. Es ist nun die Gleichung $a^2=dg$ die folgende:

$$[A'-A-2A(A'B-AB')]^2=(A'-A)^2\times(1-4AB),$$

d. h. nach Entwickelung:

$$(A'-A)(B'-B)+(A'B-AB')^2=0.$$

Digitized by Google

Die Gleichung

$$2ab = dh + eg$$

dagegen liefert uns nach Entwickelung das $=0$ Sein eine Summe von 34 Termen, deren sie jedoch 13 verliert, weil durch die Identität

$$2(A'-A)[2A'D-A(D+D')]$$
$$=[(A'-A)^2\times 2D]+[2(A'-A)(A'D-AD')]$$

sechs Termen des ersten Gliedes durch sieben des anderen Gliedes aufgehoben werden. Die einundzwanzig übrigen Termen liefern nach gehöriger Reduction die Gleichung

$$(A'-A)(E'-E)+(A'-A)(B'D-BD')+(B'-B)(A'D-AD')$$
$$+2(A'B-AB')(A'E-AE')=0.$$

Um nun von diesen bei unserer jetzigen Coefficienten-Wahl stattfindenden Gleichungen zur Antwort der allgemeineren Aufgabe VIII. zu gelangen, wo von keiner bestimmten Coefficienten-Wahl die Rede ist, müssen wir statt $AA'BB'$ etc. respective

$$\frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\alpha'}{\gamma'},\ \frac{\beta}{\gamma},\ \frac{\beta'}{\gamma'}\ \text{etc. .....}$$

substituiren, wodurch wir als die gesuchte Antwort auf die Aufgabe VIII. das System der zwei Gleichungen

$$(9)\qquad (\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\beta'\gamma-\beta\gamma')+(\alpha'\beta-\alpha\beta')^2=0,$$

$$(16)\quad (\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)+(\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\beta'\delta-\beta\delta')+(\beta'\gamma-\beta\gamma')(\alpha'\delta-\alpha\delta')$$
$$+2(\alpha'\beta-\alpha\beta')(\alpha'\varepsilon-\alpha\varepsilon')=0$$

bekommen, deren erstere wir schon früher als eine der Antwortsgleichungen der Aufgabe I. bekommen haben.

Es ist aber das System dieser beiden Gleichungen noch keineswegs die vollständige Lösung der Aufgabe VIII, sondern nur eine particuläre, d. h. ein nur denjenigen Kegelschnitts-Paaren zukommender Coefficienten-Zusammenhang, welche, ausser der gefragten Eigenschaft, dass zwei ihrer vier Durchschnittspunkte sich unendlich entfernen sollen, noch gewisse andere Eigenschaften besitzen. Es war nämlich die erhaltene Antwort eigentlich diejenige der folgenden von der VIII. verschiedenen Aufgabe:

XI. Welcher Coefficienten-Zusammenhang wird erfordert, damit zwei der vier Durchschnittpunkts-Ordinaten zweier Kegelschnitte unendlich gross seien?

Von den der Aufgabe I. genügenden Kegelschnitts-Paaren genügen nun der Aufgabe XI. keineswegs diejenigen, welche die Axe $y=0$ oder eine ihr parallele und endlich von ihr entfernte

Digitized by Google

Gerade $y=b$ zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, sondern nur diejenigen, deren gemeinschaftliche Asymptote entweder der Axe $y=0$ nicht parallel ist, oder, wie die Parabel $y^2=px$, ihr parallel ist, sondern unendlich von ihr entfernt. So auch sind unter den der Aufgabe VI. genügenden Kegelschnitts-Paaren einige, welche der Aufgabe XI. nicht genügen. Will man daher alle die der Aufgabe VIII. genügenden Kegelschnitts-Paare bekommen, so muss man der Frage XI. noch folgende Supplement-Frage hinzufügen:

XII. Bei welchem Coefficienten-Zusammenhang werden zwei der vier Durchschnitts-Abscissen unendlich gross?

Zur Beantwortung der Aufgabe XII. brauchen wir bloss in der zur Beantwortung der XI. stattgefundenen Argumentation die Coefficienten A, B, D, E, A', B', D', E' überall respective durch B, A, E, D, B', A', E', D' zu ersetzen, welcher Umtausch die Gleichung (9) unverändert lässt, die (16) aber in folgende

$$(17)\quad (\beta'\gamma-\beta\gamma')(\gamma\delta'-\gamma'\delta)+(\beta'\gamma-\beta\gamma')(\alpha'\varepsilon-\alpha\varepsilon')+(\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\beta'\varepsilon-\beta\varepsilon')+2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta'\delta-\beta\delta')=0$$

abändert. Und es wird nun die Antwort der Aufgabe VIII. durch die Zusammenfügung der Antworten der XI. und der XII. ausgedrückt, d. h. durch ein System zweier Gleichungen, deren erstere die (9), die zweite aber das Product der (16) und (17) ist.

Bei dieser Methode, wo wir die primitive Aufgabe VIII. nicht in die drei partiellen I., VI., VII. getrennt haben, hat dennoch eine neue Trennung der VIII. in die XI. und XII. stattgefunden. Hätten wir gar keine Trennung der VIII. vornehmen wollen, so hätten wir auf folgende Weise argumentiren müssen: Es war in der Aufgabe VIII. gefragt, dass zwei der vier Durchschnittspunkte der Kegelschnitte

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0,$$

$$\alpha' x^2+\beta' y^2+\gamma' xy+\delta' x+\varepsilon' y+\zeta'=0$$

die Eigenschaft besässen, dass ihre Entfernung $r=\sqrt{x^2+y^2}$ vom Coordinaten-Ursprung den Werth ∞ hätte, d. h. dass sie sich irgendwo auf dem unendlichen grossen Kreise $x^2+y^2=\infty$ befänden. Wir können uns also unsere Frage in folgender Form vorlegen.

XIII. Welcher Coefficienten-Zusammenhang wird gefordert, damit die drei Curven

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0,$$

$$\alpha' x^2+\beta' y^2+\gamma' xy+\delta' x+\varepsilon' y+\zeta'=0,$$

$$x^2+y^2=\infty$$

Digitized by Google

einander in zwei Punkten gemeinschaftlich durchschneiden?

Zur Beantwortung dieser Frage bringen wir die drei Curven auf die Form

$$r^2(\alpha\cos^2\varphi+\beta\sin^2\varphi+\gamma\sin\varphi\cos\varphi)+r(\delta\cos\varphi+\varepsilon\sin\varphi)+\zeta=0,$$

$$r^2(\alpha'\cos^2\varphi+\beta'\sin^2\varphi+\gamma'\sin\varphi\cos\varphi)+r(\delta'\cos\varphi+\varepsilon'\sin\varphi)+\zeta'=0,$$

$$r=\infty,$$

eliminiren aus den beiden ersteren die Coordinate φ, und suchen alsdann die Bedingung, dass die resultirende Gleichung $f_4(r)=0$ eine $F_2(r)=0$ werde; d. h. sich vom vierten Grad auf den zweiten Grad reducire. Bei der vorigen Methode hatten wir uns das Unendliche als ein unendlich grosses Quadrat vorgestellt, welches, da es zwei Paare gegenüberstehende Seiten hatte, eine Trennung der primitiven Aufgabe in zwei andere verursachte, während bei gegenwärtiger Methode, wo das Unendliche als ein unendlich grosser, keine gegenüberstehenden Seiten habender Kreis, gedacht wird, keine solche Trennung nöthig ist.

Anmerkung.

Wenn auch obige Abhandlung im Ausdruck noch einige undeutsche Wendungen enthält, die man einem Ausländer gewiss gern verzeihen wird, so ist die Sprache doch im Ganzen so deutlich und leicht verständlich, dass ich mir, ohne den Eindruck der ganzen Darstellung zu verwischen, wesentliche Aenderungen vorzunehmen nicht erlauben zu müssen glaubte und auch nicht erlauben durfte. Ich danke vielmehr dem geehrten Herrn Vf., dass er die Abhandlung in deutscher Sprache verfasst hat. G.

XXX.

Ueber einige geometrische Sätze und die Rechnung mit den imaginären Grössen.

Von dem

Herrn Doctor Zech

zu Stuttgart.

I.

Aufgabe. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen, der einen anderen gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers des letzteren Kreises schneidet.

Auflösung. Die beiden gegebenen Punkte seien A und B (Taf. VIII. Fig. 6.), der Mittelpunkt des gegebenen Kreises sei C; man ziehe die Gerade AC und senkrecht darauf den Halbmesser CD, beschreibe sofort aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CA einen Kreis und schneide in diesem die Sehne $AE=AD$ ab; endlich fälle man von E eine Senkrechte auf AC, welche gehörig verlängert die auf AB im Halbirungspunkte errichtete Senkrechte im Punkte F schneide: dann ist der aus F mit dem Halbmesser FA beschriebene Kreis der gesuchte.

Beweis. Der gefundene Kreis geht durch A und, weil sein Mittelpunkt auf der auf AB im Halbirungspunkte errichteten Senkrechten liegt, auch durch B. Es ist also nur noch zu beweisen, dass derselbe den gegebenen Kreis auf die verlangte Weise schneidet. Letzteres ist, wie man leicht sieht, dann und nur dann der Fall, wenn der Halbmesser des gefundenen Kreises gleich ist der

Digitized by Google

Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der Halbmesser des gegebenen Kreises und dessen andere Kathete die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise ist; d. h. wenn

$$\overline{FA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{FC}^2.$$

Nun ist aber, wenn man den Durchschnittspunkt der Geraden EF und AC durch G bezeichnet, nach der Construction

$$2AC \times AG = \overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2,$$

also

$$AC \times (2AG - AC) = \overline{CD}^2$$

oder weil

$$AC = AG + GC:$$

und

$$2AG - AC = AG - (AC - AG) = AG - GC:$$

$$\overline{AG}^2 - \overline{GC}^2 = \overline{CD}^2, \quad \overline{AG}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{GC}^2.$$

Ferner ist in dem bei G rechtwinkligen Dreieck FGA

$$\overline{FA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GF}^2,$$

also nach der letzten Gleichung

$$\overline{FA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GF}^2,$$

oder, weil FGC ein bei G rechtwinkliges Dreieck ist,

$$\overline{FA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{FC}^2 \text{ q. e. d.}$$

Die Auflösung ist immer möglich, so lange die von E auf AC gefällte Senkrechte und die auf AB im Halbirungspunkte errichtete Senkrechte einander nicht parallel sind, d. h. so lange die drei Punkte A, B, C nicht in derselben Geraden liegen. Die Gerade EF ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch den Punkt A gehen und den gegebenen Kreis auf die verlangte Weise schneiden.

Man kommt auf die gegebene Construction sogleich, wenn man das Dreieck FAC betrachtet, in welchem

Digitized by Google

$$\overline{FC}^2 = \overline{FA}^2 + \overline{AC}^2 - 2FA \times AC \times \cos FAC$$

ist; weil nämlich

$$\overline{FC}^2 = \overline{FA}^2 - \overline{CD}^2$$

sein soll, so folgt

$$2AC \times FA \times \cos FAC = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$$

d. h.

$$2AC \times AG = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2.$$

II.

Lehrsatz. Wenn in einem Dreieck zwei Winkel im gleichen Verhältniss getheilt werden und die bis an die gegenüberliegenden Seiten verlängerten Theilungslinien einander gleich sind, so sind die getheilten Winkel einander gleich.

Beweis. Das Dreieck sei ABC (Taf. VII. Fig. 5.), die gleichen Theilungsstrecken, welche die Winkel BAC und ABC im gleichen Verhältniss theilen, seien AD und BE, so dass also

$$\text{W. } BAD \text{ . W. } DAC = \text{W. } ABE : \text{W. } EBC$$

ist. Wäre nun

$$\text{W. } ABC < \text{W. } BAC,$$

so lege man das Dreieck so umgekehrt auf sich selbst, dass der Punkt B auf den Punkt A und die beiden Theilungslinien auf einander fallen; dann fällt, wegen $BE = AD$, auch der Punkt E auf D, und weil bei der Theilung beider Winkel in demselben Verhältniss die Annahme

$$\text{W. } ABC < \text{W. } BAC$$

die beiden Ungleichungen

$$\text{W. } ABE < \text{W. } BAD \text{ und } \text{W. } EBC < \text{W. } DAC$$

nach sich zieht, wird BA in eine Lage AF zwischen AB und AD, BC in eine Lage AG zwischen AD und AC kommen. Dabei müssen die drei Punkte F, D, G stets in gerader Linie liegen und Dreieck $FAG \cong$ Dr. ABC sein.

Es sind nun drei Fälle denkbar; entweder fällt der Punkt F ausserhalb des Dreiecks ABC, oder auf BC, oder innerhalb des Dreiecks ABC.

Digitized by Google

1) Der Punkt F falle ausserhalb ABC (Taf. VII. Fig. 5. Nr. (1.)), dann fällt G nothwendig innerhalb ABC; dann aber ist nach einem bekannten Satze

$$\text{W. } FGA > \text{W. } ACB,$$

also

$$\text{Dr. } FGA \text{ nicht} \cong \text{Dr. } ACB.$$

2) Der Punkt F falle auf BC (Taf. VII. Fig. 5. Nr. (2.)); und zwar nach dem oben Bemerkten nothwendig zwischen B und D; dann fällt auch G auf BC und zwar zwischen D und C; dann aber ist

$$\text{W. } FGA > \text{W. } ACB,$$

oder

$$\text{W. } FAG < \text{W. } AFB,$$

d. h., weil

$$AF = AB:$$

$$\text{W. } FAG < \text{W. } ABC;$$

also in beiden Fällen

$$\text{Dr. } FAG \text{ nicht} \cong \text{Dr. } ABC.$$

3) Der Punkt F falle innerhalb ABC (Taf. VII. Fig. 5. Nr. (3.)); dann fällt G ausserhalb ABC; zieht man nun die Gerade BF, so liegt diese nach der Voraussetzung zwischen BC und BA, und muss daher verlängert die Gerade AG schneiden; es ist also

$$\text{W. } FAG < \text{W. } AFB,$$

aber, weil $AF = AB$:

$$\text{W. } AFB = \text{W. } ABF,$$

also auch

$$\text{W. } FAG < \text{W. } ABF,$$

und um so mehr

$$\text{W. } FAG < \text{W. } ABC;$$

also wiederum

$$\text{Dr. } FAG \text{ nicht} \cong \text{Dr. } ABC.$$

Digitized by Google

Die Annahme W. $ABC <$ W. BAC führt also in jedem denkbaren Falle auf einen Widerspruch, und kann daher nicht richtig sein. Ganz ebenso wird bewiesen, dass eben so wenig W. $BAC <$ W. ABC sein kann; es muss also

$$\text{W. } ABC = \text{W. } BAC$$

sein, w. z. b. w.

III.

Man rechnet allgemein mit imaginären Zahlen ganz nach denselben Formeln, die für reelle Zahlen aufgestellt worden sind, ohne dass man bis jetzt die Giltigkeit der letztern Formeln auch für imaginäre Zahlen nachgewiesen hat. Die Ohm'sche Behauptung, dass z. B. die Gesetze des Addirens, nachdem sie für positive ganze Zahlen bewiesen worden sind, nun auch für alle anderen Zahlformen gelten, weil letztere erst später entstehen, weil man also durch Anwendung jener Gesetze auf dieselben jedenfalls nichts Unrichtiges, d. h mit Früherem in Widerspruch Stehendes erhalte, ist offenbar nicht stichhaltig. Man hat daher die Gesetze des Addirens der Reihe nach auch für negative ganze Zahlen, gebrochene und irrationale Zahlen bewiesen, und ebenso hat man es bei den andern Operationen gemacht. Ein Beweis für imaginäre Zahlen fehlt bis jetzt. Im Folgenden soll ein Versuch gemacht werden, diese Lücke auszufüllen.

Die imaginären Zahlen verdanken ihren Ursprung der Auflösung der quadratischen Gleichungen; wir müssen also von diesen ausgehen, wenn wir über jene etwas aussagen wollen. Seien zu dem Ende

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{l} x^2 - sx + p = 0 \\ \text{und} \\ x^2 - s_1 x + p_1 = 0 \end{array}\right.$$

zwei quadratische Gleichungen, deren Wurzeln beziehungsweise x', x'' und x'_1, x''_1 seien, so dass also

$$(2.)\quad \left\{\begin{array}{l} s = x' + x'', \quad p = x'x'' \\ \text{und} \\ s_1 = x'_1 + x''_1, \quad p_1 = x'_1 x''_1 \end{array}\right.$$

ist. Dann ist

$$(3.)\quad \ldots\ldots\quad (x' + x'_1) + (x'' + x''_1) = s + s_1,$$

$$(x' + x'_1).(x'' + x''_1) = x'x'' + x'x''_1 + x''x'_1 + x'_1 x''_1,$$

$$(4.)\quad \ldots\ldots\quad (x' + x'_1).(x'' + x''_1) = p + p_1 + x'x''_1 + x''x'_1.$$

Digitized by Google

Nun ist aber

$$s^2 - 4p = (x' - x'')^2,$$

$$s_1^2 - 4p_1 = (x'_1 - x''_1)^2;$$

also

$$(5.) \quad \begin{cases} \pm\sqrt{(s^2-4p)(s_1^2-4p_1)} = (x'-x'')(x'_1-x''_1), \\ \pm\sqrt{(s^2-4p)(s_1^2-4p_1)} = x'x'_1 - x'x''_1 - x''x'_1 + x''x''_1, \end{cases}$$

ferner

$$(6.) \quad \ldots\ldots \quad ss_1 = x'x'_1 + x'x''_1 + x''x'_1 + x''x''_1.$$

Zieht man die zweite der Gleichungen (5.) von der Gleichung (6.) ab und dividirt dann auf beiden Seiten mit 2, so folgt

$$x'x''_1 + x''x'_1 = \frac{1}{2}ss_1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{(s^2-4p)(s_1^2-4p_1)}.$$

Dieser Werth in die Gleichung (4.) substituirt gibt

$$(7.) \quad (x'+x'_1)(x''+x''_1) = p + p_1 + \frac{1}{2}ss_1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{(s^2-4p)(s_1^2-4p_1)}.$$

In den Gleichungen (3.) und (7.) ist enthalten folgender

I.) *Lehrsatz.* Die quadratische Gleichung

$$x^2 - (s+s_1)x + p + p_1 + \frac{1}{2}ss_1 \mp \sqrt{(s^2-4p)(s_1^2-4p_1)} = 0$$

hat zu Wurzeln die beiden Summen von je einer Wurzel der ersten und einer Wurzel der zweiten der Gleichungen (1.).

Ferner folgt, wenn man die zweite der Gleichungen (5.) und (6.) addirt und dann auf beiden Seiten mit 2 dividirt:

$$x'x'_1 + x''x''_1 = \frac{1}{2}ss_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(s^2-4p)(s_1^2-4p_1)};$$

ausserdem ist $(x'x'_1).(x''x''_1) = pp_1$.

In den beiden letzten Gleichungen ist enthalten folgender

II.) *Lehrsatz.* Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \left(\frac{1}{2}ss_1 \pm \sqrt{(s^2-4p)(s_1^2-4p_1)}\right)x + pp_1 = 0$$

Digitized by Google

sind die beiden Producte von je einer Wurzel der ersten und einer Wurzel der zweiten der Gleichungen (1.)

Um nun den Uebergang zu den imaginären Zahlen zu machen, sei

$$\left.\begin{aligned} s&=2a, \quad p=a^2+b^2 \\ s_1&=2a_1, \quad p_1=a^2_1+b^2_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8.);$$

dann sind die Wurzeln der ersten der Gleichungen (1.) $a \pm b\sqrt{-1}$, die der zweiten $a_1 \pm b_1\sqrt{-1}$. Ferner folgt aus den Gleichungen (8.)

$$s^2 - 4p = -4b^2,$$

$$s^2_1 - 4p_1 = -4b^2_1,$$

also

$$\pm\sqrt{(s^2-4p)\,(s^2_1-4p_1)} = \pm 4bb_1;$$

hiemit wird

$$\begin{aligned} p + p_1 + \frac{1}{2}ss_1 &\mp \frac{1}{2}\sqrt{(s^2-4p)\,(s^2_1-4p_1)} \\ &= a^2+b^2+a^2_1+b^2_1+2aa_1 \mp 2bb_1 \\ &= (a+a_1)^2+(b\mp b_1)^2. \end{aligned}$$

Sonach lässt sich der Lehrsatz (1.) so ausdrücken: Die quadratische Gleichung

$$x^2-2(a+a_1)x+(a+a_1)^2+(b\mp b_1)^2=0$$

hat zu Wurzeln die beiden Summen, welche entstehen, wenn man je einen der beiden Ausdrücke $a \pm b\sqrt{-1}$ und einen der beiden Ausdrücke $a_1 \pm b_1\sqrt{-1}$ zu einander addirt. Da aber die Wurzeln jener quadratischen Gleichung

$$a+a_1 \pm (b \mp b_1)\sqrt{-1},$$

wo die obern und untern Zeichen sich nicht nothwendig entsprechen, sind, so hat man

$$(a \pm b\sqrt{-1}) + (a_1 \pm b_1\sqrt{-1}) = (a+a_1) \pm (b \mp b_1)\sqrt{-1} \quad \ldots (A)$$

wo in Beziehung auf die Zeichen auf jeder Seite für sich die eben gemachte Bemerkung gleichfalls gilt. In dieser Gleichung (A) sind alle möglichen Fälle enthalten, wie auch die Zeichen linker Hand combinirt werden mögen.

Ferner hat man

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}ss_1 \pm \sqrt{(s^2-4p)\,(s^2_1-4p_1)} = 2aa_1 \pm 2bb_1\,,$$

$$pp_1 = a^2a^2_1 + a^2b^2_1 + a^2_1b^2 + b^2b^2_1\,.$$

Der Lehrsatz (II.) lässt sich also jetzt folgendermaassen aussprechen: Die quadratische Gleichung

$$x^2-2(aa_1 \pm bb_1)x + a^2a^2_1 + a^2b^2_1 + a^2_1b^2 + b^2b^2_1 = 0$$

hat zu Wurzeln die beiden Producte, welche entstehen, wenn man je einen der beiden Ausdrücke $a \pm b\sqrt{-1}$ und einen der beiden Ausdrücke $a_1 \pm b_1\sqrt{-1}$ mit einander multiplicirt. Nun sind aber die Wurzeln jener Gleichung

$$\begin{aligned}(aa_1 \pm bb_1) &\pm \sqrt{(aa_1 \pm bb_1)^2 - a^2a^2_1 - a^2b^2_1 - a^2_1b^2 - b^2b^2_1} \\ &= (aa_1 \pm bb_1) \pm \sqrt{\pm 2aa_1bb_1 - a^2b^2_1 - a^2_1b^2} \\ &= (aa_1 \pm bb_1) \pm (ab_1 \mp a_1b)\sqrt{-1}\,,\end{aligned}$$

wo die obern und untern Zeichen in den Klammern einander entsprechen, diesen aber nicht nothwendig die ausser den Klammern. Also

$$(a \pm b\sqrt{-1}).(a_1 \pm b_1\sqrt{-1}) = (aa_1 \pm bb_1) \pm (ab_1 \mp a_1b)\sqrt{-1} \ldots (B)$$

wo für die Zeichen auf der rechten Seite die eben gemachte Bemerkung gilt, auf der linken Seite dagegen die Zeichen beliebig gewählt werden dürfen.

Auch diese Gleichung (B) umfasst alle möglichen Fälle, wie auch die Zeichen auf der linken Seite combinirt werden mögen.

Die Formeln für die Differenz und für den Quotienten zweier imaginären Ausdrücke können auf dieselbe Weise abgeleitet oder aus den Formeln für die Summe und für das Product hergeholt werden.

Digitized by Google

XXXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn H. Scheffler, Bau-Conducteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Aufgabe.

Es sind (Taf. VII Fig. 6.) die beiden Punkte A, B und der um C beschriebene Kreis gegeben; man sucht einen Kreis, welcher durch A und B geht, und den gegebenen Kreis in den Endpunkten Ein und desselben Durchmessers schneidet.

Auflösung. Man beschreibe einen beliebigen Kreis, welcher durch A und B geht und den gegebenen Kreis in zwei Punkten D, E schneidet, ziehe die Geraden AB, DE bis zu ihrem Durchschnittspunkte F und lege durch F und das Centrum C des gegebenen Kreises die Linie GH; so stellt dieselbe den gesuchten Durchmesser dar, und A, B, H, G sind vier Punkte des verlangten Kreises.

Beweis. Angenommen ein durch die drei Punkte A, B, H gelegter Kreis schneide die Gerade GF in einem Punkte G'; alsdann hat man

im Kreise $DEHG$ $\quad FG.FH = FD.FE$,

im Kreise $ABHG'$ $\quad FG'.FH = FA.FB$,

im Kreise $ABED$ $\quad FD.FE = FA.FB$,

folglich $\quad FG'.FH = FG.FH$,

$$FG' = FG,$$

d. h. die beiden Punkte G und G' fallen zusammen, oder der durch A, B, H gelegte Kreis geht auch durch G.

Digitized by Google

XXXII.

Miscellen.

Literarische Bemerkung von dem Herrn Dr. Grebe zu Cassel.

Um der im Archiv für M. u. Ph. Theil XV. Heft 2. S. 137. enthaltenen Aufforderung zu entsprechen, theile ich Folgendes mit. Das dort erwähnte Werk von Bramer führt den Titel: „BENJAMIN BRAMERI Beschreibung Eines sehr leichten Per„spectiv- und grundreissenden Instruments auff einem Stande: „Auff Herrn Johan Faulhabers, bestellten Ingenieurs des Heyl: „Reichs Stadt Vlm, weitere continuation seines Mathemati„schen Kunstspiegels, geordnet. Gedruckt zu Cassel, durch Johan „Wessel, vnd zu Franckfurt bey Eberhard Kiesern Kupfferste„chern zu finden. Im Jahr 1630.“ Der Beschreibung selbst geht eine Zueignung an den Ehrnvesten Hochachtbarn vnd Kunstreichen Herrn Johan Faulhabern etc. voran, welche folgendermassen anfängt: „DAss in den Mathematischen künsten viel wun„derbare vnd verborgene Geheimnuss, auch offtmahls Dinge, so „fast vnmöglich scheinen, gleichwohl aber durch geringe mittel „zu wege gebracht werden können, ist auss vielen dingen zu se„hen. Als zum Exempel, durch zusammen: oder übereinander „schreibung einer Arithmetischen vnd Geometrischen pro„gress, kan man viel wunderbare Dinge verrichten, wann nur die „Arithmetische mit einem 0, die Geometrische aber mit 1 „anfängt, Nemblich, das Multiplicirn durch Addirn, das Di„vidirn durch Subtrahirn, Radicem quadratam extrahirn „durch halbirn, Cubicam durch 3, Zensicensicam durch 4, „Sursolidam 5, vnnd so forthan mit andern quantiteten di„vidirn, Welches dem Herrn als einem jetziger zeit in Teutsch„land berühmten Arithmetico, genugsamb bekant, vnnd also „ohne noht ware, dessen Exempel zu setzen. Damit aber die „vngeübten meine Meynung sehen mögen, stehen die Zahlen bei„der progressionen also:

„Arithm:	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
„Geomet:	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.

„Arithm:	10.	11.	12.	13.
„Geomet:	1024.	2048.	4096.	8192.“

Digitized by Google

Einen Druckfehler des Buchs im drittletzten Gliede der geometrischen Progression habe ich verbessert. Es werden nun an diesen beiden Reihen die Grundregeln des Rechnens mit Logarithmen erläutert, und dann heisst es Seite 5. weiter: „Auss diesem Fundament hat mein lieber Schwager und Praeceptor Jobst „Burgi, vor zwantzig vnd mehr Jahren, eine schöne progress „tabul mit ihren differentzen von 10 zu 10 in 9 Ziffern cal„culirt, auch zu Prag ohne bericht in Anno 1620 drucken lassen. Vnd „ist also die Invention der Logarith: nicht dess Neperi, „sondern von gedachtem Burgi (wie solches vielen wissend, vnd „ihm auch Herr Keplerus zeugnuss gibt) lange zuvor erfunden.“

Um diese Stelle vollständig zu verstehen, muss man wissen, dass Bramer, zu Felsberg in Hessen 1588 geboren, schon in seiner frühesten Kindheit in das Haus seines Schwagers Burgi, der als Hofuhrmacher in den Diensten des Landgrafen Wilhelm IV. zu Cassel stand, gekommen und mit diesem 1603 nach Prag gezogen war. Wahrscheinlich war der Umstand, dass Burgi nach dem Tode von Bramers Schwester sich 1611 anderweitig verheirathete, die Veranlassung, dass Bramer in sein Vaterland zurückkehrte, wo er 1612 eine Anstellung als Baumeister zu Marburg erhielt. Statt zu sagen „vor zwantzig und mehr Jahren“ hätte Bramer sich ausdrücken können: als ich noch in dem Hause meines Schwagers Burgi zu Prag lebte. Die erste Schrift von Bramer, die unter dem Titel: Problema, wie aus bekannt gegebenem Sinu eines Grades Minuten oder Secunden alle folgenden Sinus aufs leichteste zu finden und der canon sinuum zu absolviren seye, zu Marburg 1614 erschien, lässt vermuthen, dass Bramer die Neigung zum Berechnen von Tabellen sich bei seinem Schwager angeeignet habe, und diesem bei der Berechnung von dessen Logarithmentafel hülfreich zur Hand werde gewesen sein. Dass Burgi seine Tafel so lange zurückhielt und sie auch dann ohne Bericht herausgab, scheint bei ihm, der keine Sprachstudien gemacht hatte, aus unbesiegbarer Scheu vor schriftlicher Darstellung zu erklären zu sein.

Anmerkung.

Nach dem eingesandten Manuscript des Herrn Vfs. scheint das, was ich im Obigen habe gesperrt drucken lassen, in Bramers Buche mit lateinischen, das Uebrige mit deutschen Lettern gedruckt zu sein. G.

Digitized by Google

XXXIII.

Sur les fonctions elliptiques.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer,

de Groningue.

Les fonctions elliptiques ayant tiré leur origine du problème de l'intégration des fonctions irrationnelles, on a toujours en vue l'application, qu'on pourra en faire pour les quadratures. Mais par cette raison on a trop négligé, à ce qui me semble, les propriétés de ces fonctions, qui ne se prêtent pas immédiatement aux quadratures. Si donc il y a quelque succès dans l'analyse suivante, c'est, parcequ'en suivant une marche rationnelle, je ne me suis pas souci du parti, qu'on saura en tirer pour l'intégration des fonctions irrationnelles, persuadé, comme je suis, que toute analyse exacte trouvera ensuite son application.

---

§. 1.

Théorie des fonctions elliptiques de la première espèce.

La fonction elliptique de la première espèce, dénotée par F_φ ou $F_{\varphi,c}$, est déterminée par l'équation

$$F_\varphi = F_{\varphi,c} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \tag{1}$$

dans laquelle on a

$$\Delta^2\varphi = \Delta^2_{\varphi,c} = 1 - c^2\sin^2\varphi, \quad \Delta_0 = 1,$$

c étant un module supposé positif et inférieur à l'unité.

Digitized by Google

En considérant au contraire la variable φ comme fonction de F_φ, et posant

$$p = F_\varphi,$$

on aura la fonction inverse

$$\varphi = \operatorname{amp} p,$$

ou bien

$$\sin\varphi = \sin\operatorname{amp} p.$$

Cette manière d'envisager la fonction elliptique et son inverse a ses difficultés. En effet, la fonction F_φ ou p étant déterminée par l'équation (1), il ne sera permis de considérer p comme variable indépendante, à moins qu'elle ne reçoive toute valeur possible réelle et imaginaire en laissant varier φ par degrés insensibles. Or ce n'est pas difficile de montrer, que cette condition ne sera pas remplie.

On pourra, à la verité, considérer φ ou $\sin\varphi$ comme fonction d'une variable indépendante x, et poser

$$\sin\varphi = \sin\operatorname{amp} x;$$

mais on aura tort d'affirmer, qu'il s'en suivra

$$p = x.$$

Tout ce qu'on pourra établir, c'est, que la fonction F_φ ou p, substituée à x, satisfera à l'équation

$$\sin\varphi = \sin\operatorname{amp} x,$$

ou, que p sera une racine de cette équation résolue par rapport à x, savoir cette racine, qui s'évanouit avec φ.

Un pareil cas se présente, lorsqu'on voudra déduire la théorie des fonctions circulaires de l'équation

$$\psi = \psi_u = \int_0^u \frac{d_u}{\overline{\omega}_u},$$

dans laquelle la fonction $\overline{\omega}_u$ est déterminée par les équations

$$\overline{\omega}^2{}_u = 1 - u^2, \quad \overline{\omega}_0 = 1.$$

Or, comme on a la coutume de traiter d'abord les fonctions $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, et de passer ensuite à la fonction ψ enprimée par l'intégrale précédente, il sera de même plus méthodique de convertir, quant aux fonctions elliptiques, l'ordre suivi: et, au lieu de partir de l'équation (1), nous considérons directement la fonction regardée à l'ordinaire comme fonction inverse de la fonction elliptique.

Digitized by Google

Désignons par u cette fonction, ou, plutôt, représentons par u, v, w trois fonctions de x, c; en sorte qu'on ait

$$(2) \qquad u = P_x = P_{x,c}, \quad v = Q_x = Q_{x,c}, \quad w = R_x = R_{x,c}.$$

Alors les fonctions u, v, w seront complètement déterminées par le système des équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \partial_x u = vw, & \partial_x v = -wu, & \partial_x w = -c^2 uv, \\ P_0 = 0, & Q_0 = 1, & R_0 = 1. \end{cases}$$

C'est de ces équations, qu'il faut déduire les proprietés des fonctions u, v, w.

On en tire à l'instant les relations par lesquelles ces fonctions sont liées entre elles: car, puisqu'on a

$$u\partial_x u = -v\partial_x v = -\frac{1}{c^2} w\partial_x w,$$

il viendra, en intégrant, et en observant, que u se change en 0, v et w en 1, lorsque x s'évanouit,

$$u^2 = 1 - v^2 = \frac{1}{c^2}(1 - w^2),$$

d'où

$$(4) \qquad \begin{cases} P_x^2 = 1 - Q_x^2 = \frac{1}{c^2}(1 - R_x^2), \\ Q_x^2 = 1 - P_x^2 = -\frac{1}{c^2}(b^2 - R_x^2), \\ R_x^2 = 1 - c^2 P_x^2 = b^2 + c^2 Q_x^2, \end{cases}$$

ayant posé pour abréger

$$b^2 = 1 - c^2.$$

Désignons ensuite par x une racine de l'équation

$$u = P_x$$

résolue par rapport à x; on aura

$$u = P_{\mathrm{x}},$$

et x sera une fonction de u, qu'on pourra représenter par

$$\mathrm{x} = X_u.$$

Mais u étant une fonction de x, il s'ensuit que x sera aussi une fonction de x. Donc on aura

$$\partial_x u = \partial_x P_{\mathrm{x}} = \partial_{\mathrm{x}} P_{\mathrm{x}} \partial_x \mathrm{x},$$

Digitized by Google

d'où

$$\partial_x \mathrm{x} = \frac{\partial x\, u}{\partial \mathrm{x} P_{\mathrm{x}}} = \frac{vw}{Q_{\mathrm{x}} R_{\mathrm{x}}};$$

et comme, en ayant égard aux équations (4), on a

$$Q_{\mathrm{x}}^2 = 1 - P_{\mathrm{x}}^2 = 1 - u^2 = v^2,$$
$$R_{\mathrm{x}}^2 = 1 - c^2 P_{\mathrm{x}}^2 = 1 - c^2 u^2 = w^2,$$

il se présente deux cas, selon qu'on a

$$Q_{\mathrm{x}} R_{\mathrm{x}} = vw, \text{ ou } Q_{\mathrm{x}} R_{\mathrm{x}} = -vw,$$

auxquels cas correspondent par suite

$$\partial_x \mathrm{x} = 1, \qquad \partial_x \mathrm{x} = -1;$$

d'où, en intégrant,

$$v + \mathrm{x} = x, \qquad v' - \mathrm{x} = x,$$

v et v' étant constantes par rapport à x. En substituant ces valeurs de x dans les équations correspondantes, on obtiendra

$$P_{v+\mathrm{x}} = P_{\mathrm{x}}, \qquad P_{v'-\mathrm{x}} = P_{\mathrm{x}},$$
$$Q_{v+\mathrm{x}} R_{v+\mathrm{x}} = Q_{\mathrm{x}} R_{\mathrm{x}}, \quad Q_{v'-\mathrm{x}} R_{v'-\mathrm{x}} = -Q_{\mathrm{x}} R_{\mathrm{x}};$$

puis, en prenant $\mathrm{x} = 0$:

$$P_v = 0, \qquad P_{v'} = 0,$$
$$Q_v R_v = 1, \quad Q_{v'} R_{v'} = -1,$$

équations auxquelles les constantes v et v' doivent satisfaire.

D'ailleurs l'équation

$$u = P_{\mathrm{x}},$$

differentiée par rapport à u donnera

$$1 = \partial_{\mathrm{x}} P_{\mathrm{x}} \partial_u \mathrm{x} = Q_{\mathrm{x}} R_{\mathrm{x}} \partial_u \mathrm{x},$$

d'où

$$\partial_u \mathrm{x} = \frac{1}{Q_{\mathrm{x}} R_{\mathrm{x}}}.$$

Ajoutons que, comme on a $P_0 = 0$, on pourra choisir la racine x de manière, qu'elle s'evanouisse avec u, en sorte qu'on ait

$$\mathrm{X}_0 = 0;$$

et, en considérant Q_{x} et R_{x} comme fonctions de u, si l'on pose

Digitized by Google

$$Qx=\bar{\omega}_u, \quad Rx=\bar{\omega}'_u,$$

aura

$$\bar{\omega}_u^2=1-u^2, \qquad \bar{\omega}_0=1$$
$$\bar{\omega}'^2=1-c^2u^2, \quad \bar{\omega}'_0=1,$$

ù

$$\bar{\omega}'_u=\bar{\omega}_{cu};$$

nc la racine x sera complètement déterminée en fonction de u, il suivra

$$x=X_u=X_{u,c}=\int_0^u \frac{du}{\bar{\omega}_u\,\bar{\omega}_{cu}},$$

, si l'on veut,

$$x=X_u=X_{u,c}=\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-c^2u^2}},$$

ourvu que les radicaux $\sqrt{1-u^2}$, $\sqrt{1-c^2u^2}$ soient pris de manière à devenir égaux à l'unité, lorsque u s'evanouit.

La racine x déterminée par l'équation précédente peut remplacer avec succès la fonction elliptique. Pour reconnaitre la liaison ntre ces deux fonctions, posons

$$\psi=\psi_u=\int_0^u \frac{du}{\bar{\omega}_u};$$

on aura, non seulement

$$\partial_u\psi=\frac{1}{\bar{\omega}_u},$$

mais encore

$$\sin\psi=u, \quad \cos\psi=\bar{\omega}_u;$$

puis, en considérant $\bar{\omega}_{cu}$ et x comme fonctions de ψ, si l'on fait

$$\Delta\psi=\bar{\omega}_{cu}, \quad x=F_\psi,$$

on aura

$$\Delta_\psi^2=1-c^2u^2=1-c^2\sin^2\psi,$$
$$\Delta_0=1, \qquad F_0=0,$$

et, à cause de

Digitized by Google

$$\frac{1}{\bar{\omega}_u \bar{\omega}_{cu}} = \partial_u x = \partial_u F_\psi = \partial_\psi F_\psi \, \partial_u \psi = \frac{\partial_\psi F_\psi}{\bar{\omega}_u},$$

il viendra

$$\partial_\psi F_\psi = \frac{1}{\bar{\omega}_{cu}} = \frac{1}{\Delta_\psi},$$

d'où

$$x = F_\psi = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta_\psi}.$$

Remarquons que, ψ étant introduite comme fonction de u, il ne sera permis d'attribuer à ψ que des valeurs, qu'elle acquiert par suite de la variation de u; d'où il suit que la valeur réelle de ψ restera toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Mais cela ne nous empêche pas de trouver la valeur de F_φ, lorsque φ depasse les limites de ψ. En effet, si, pour une valeur quelconque de φ, on fait

$$F_\varphi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta_\varphi},$$

on aura

$$F_{\pi+\psi} = F_\pi + F_\psi,$$

d'où, n étant un nombre entier,

$$F_{n\pi+\psi} = n F_\pi + F_\psi;$$

puis, en vertu de $F_\varphi = -F_{-\varphi}$, on aura encore

$$F_{\pi-\psi} = F_\pi - F_\psi,$$

et, en prenant $\psi = \frac{\pi}{2}$,

$$F_{\frac{\pi}{2}} = F_\pi - F_{\frac{\pi}{2}},$$

d'où

$$F_\pi = 2 F_{\frac{\pi}{2}};$$

il viendra par conséquent

$$F_{n\pi+\psi} = 2n F_{\frac{\pi}{2}} + F_\psi = 2n X_1 + x.$$

Digitized by Google

Nous avons fait cette démarche, pour montrer la connexion entre la racine x et entre la fonction elliptique $F\varphi$. Toutefois on pourra se dispenser de cette fonction en introduisant la racine x, comme cela a été fait; et le résultat principal de ce paragraphe sera compris dans les termes suivants.

Soient

$$u=P_x=P_{x,c},\ v=Q_x=Q_{x,c},\ w=R_x=R_{x,c}$$

trois fonctions de x, c déterminées par les équations

$$\partial_x u=vw,\quad \partial_x v=-wu,\quad \partial_x w=-c^2uv,$$
$$P_0=0,\quad Q_0=1,\quad R_0=1;$$

soit x une fonction de u déterminée par léquation

$$x=X_u=X_{u,c}=\int_0^u \frac{du}{\bar\omega_u\,\bar\omega_{cu}},$$

dans laquelle

$$\bar\omega_u=1-u^2,\quad \bar\omega_0=1;$$

on aura

$$u=P_x=P_x,$$
$$\bar\omega_u=Q_x,\quad \bar\omega_{cu}=R_x.$$

et

$$x=v+x,\ \text{ou}\ x=v'-x,$$

selon que l'on a

$$Q_xR_x=Q_xR_x,\ \text{ou}\ Q_xR_x=-Q_xR_x,$$

v et v' étant deux constantes assujetties à la condition de vérifier les équations

$$P_v=0,\qquad P_{v'}=0$$
$$Q_vR_v=1,\qquad Q_{v'}R_{v'}=-1.$$

Ajoutons que, pour des valeurs finies de P_x, les fonc ons P_x, Q_x, R_x se changeront en $\sin x$, $\cos x$, 1, lorsqu'on suppose $c=0$; de sorte qu'on aura

$$P_{x,0}=\sin x,\ Q_{x,0}=\cos x,\ R_{x,0}=1.$$

On pourra de même considérer P_x, Q_x, R_x comme des fonctions particulières d'une autre classe de fonctions, dont il sera aisé d'établir les équations différentielles. En continuant de cette manière, il sera utile d'embrasser toutes ces fonctions par une dénomination et une notation générale. On pourra p. e. appeler ces fonc-

Digitized by Google

tions fonctions circulaires, en les classifiant en divers ordres et rangs, et en les désignant par le signe

$$\underline{n|m},$$

m indiquant le rang et n l'ordre de la fonction circulaire. Dans cet état de choses $\sin x$ sera la première et $\cos x$ la seconde fonction circulaire du premier ordre, et P_x sera la première, Q_x la seconde et R_x la troisième fonction circulaire du second ordre; ce qu'on exprimera par la notation

$$\sin x = \underline{1|1}_x, \quad \cos x = \underline{1|2}_x,$$

$$P_x = \underline{2|1}_x, \quad Q_x = \underline{2|2}_x, \quad R_x = \underline{2|3}_x,$$

et ainsi de suite.

§. II.

Sur les valeurs particulières des fonctions circulaires du second ordre.

Puisque la valeur de la fonction ϖ_u, déterminée par les équations

$$\varpi_u{}^2 = 1 - u^2, \quad \varpi_0 = 1,$$

est positive pour $u=0$, elle restera positive et comprise entre les limites 0 et 1, en faisant varier u par degrés insensibles entre les limites -1 et $+1$.

Si donc la valeur de c restera comprise entre les limites 0 et 1, et qu'on pose

$$b = \varpi_c, \tag{1}$$

la valeur de b sera positive et inférieur ou, tout au plus, égale à 1. Puis, comme on a

$$b^2 = 1 - c^2,$$

il s'en suit

$$c^2 = 1 - b^2;$$

et on aura, non seulement

$$c^2 = \varpi_b{}^2,$$

mais encore

$$c = \varpi_b;$$

d'où l'on conclut, que b se changera en c, lorsque c se réduit à b.

Digitized by Google

Mais la valeur de $\bar{\omega}_u$ sera encore positive, lorsqu'en partant de la valeur nulle de u, on attribue à u^2 des valeurs negatives, ou à u des valeurs imaginaires, et elle restera positive en faisant varier u jusqu'a l'infini. Donc en désignant par ∞ l'infini positif, et par i une des racines quarrées de -1, mais toujours la même racine, on aura

$$\bar{\omega}_{xi}=\infty .$$

Cela posé, on sera assuré, que la fonction sous le signe intégral dans l'équation

$$x=X_u=\int_0 \frac{du}{\bar{\omega}_u \bar{\omega}_{cu}}$$

restera positive en faisant $u=1$ et $u=\infty i$; ce qui conduit à considérer les valeurs particulières X_1 et X_{xi}, que nous désignons, pour abréger, par τ ou τ_c et ϱ ou ϱ_c; en sorte qu'on ait

$$\tau=\tau_c=\int_0^1 \frac{du}{\bar{\omega}_u \bar{\omega}_{cu}}, \qquad \varrho=\varrho_c=\int_0^{xi} \frac{du}{\bar{\omega}_u \bar{\omega}_{cu}}.$$

Maintenant nous avons vu dans le paragraphe précédent, qu'en déterminant les fonctions circulaires du second ordre

$$u=P_x=P_{x,c},\ v=Q_x=Q_{x,c},\ w=R_x=R_{x,c}$$

par le système des équations

$$\partial_x u=vw,\ \partial_x v=-wu,\ \partial_x w=-c^2uv$$
$$P_0=0, \quad Q_0=1, \quad R_0=1,$$

on aura

$$P_x=u,\ Q_x=\bar{\omega}_u,\ R_x=\bar{\omega}_{cu};$$

donc, à cause de

$$\bar{\omega}_0=1,\ \bar{\omega}_c=b,\ \bar{\omega}_1=0,\ \bar{\omega}_{xi}=\infty,\ X_1=\tau,\ X_{xi}=\varrho,$$

il résultera

$$(2) \qquad \begin{cases} P_\tau=1, & Q_\tau=0, & R_\tau=b, \\ P_\varrho=\infty i, & Q_\varrho=\infty, & R_\varrho=\infty. \end{cases}$$

Quant aux rapports

$$\frac{P_\varrho}{Q_\varrho},\ \frac{P_\varrho}{R_\varrho}$$

on pourra s'assurer, qu'ils seront égaux au produit d'une quantité positive par i; et comme on a

Digitized by Google

$$Q_x^2 = 1 - P_x^2, \quad R_x^2 = 1 - c^2 P_x^2$$

on obtiendra, non seulement

$$\left(\frac{P_\varrho}{Q_\varrho}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{P_\varrho^2} - 1} = -1, \quad \left(\frac{P_\varrho}{R_\varrho}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{P_\varrho^2} - c^2} = -\frac{1}{c^2},$$

mais encore

$$\frac{P_\varrho}{Q_\varrho} = i, \quad \frac{P_\varrho}{R_\varrho} = \frac{i}{c}. \tag{3}$$

Ajoutons, qu'entre les fonctions τ et ϱ, exprimées par les équations

$$\tau = \int_0^1 \frac{du}{\bar{\omega}_u \bar{\omega}_{cu}}, \quad \varrho = \int_0^{\infty i} \frac{du}{\bar{\omega}_u \bar{\omega}_{cu}}, \tag{4}$$

il existe une relation assez simple. En effet, si l'on pose

$$u = i \frac{u'}{\bar{\omega}_{u'}},$$

on trouvera

$$\bar{\omega}_u = \frac{1}{\bar{\omega}_{u'}}, \quad \bar{\omega}_{cu} = \frac{\bar{\omega}_{bu'}}{\bar{\omega}_{u'}}, \quad du = i \frac{du'}{\bar{\omega}_{u'}^2},$$

d'où

$$\frac{du}{\bar{\omega}_u \bar{\omega}_{cu}} = i \frac{du'}{\bar{\omega}_{u'} \bar{\omega}_{bu'}}.$$

Or, en faisant varier u' depuis 0 jusqu'à 1, $\frac{u}{i}$ variera depuis 0 jusqu'à ∞: donc on aura

$$\int_0^{\infty i} \frac{du}{\bar{\omega}_u \bar{\omega}_{cu}} = i \int_0^1 \frac{du'}{\bar{\omega}_{u'} \bar{\omega}_{bu'}},$$

ou

$$\varrho_c = i \tau_b; \tag{5}$$

d'où encore, d'après ce qui a été dit ci-dessus,

$$\varrho_b = i \tau_c.$$

Nous ne nous arrêteront pas aux divers procédés propres à l'évaluation des fonctions τ et ϱ. Celui, qui se présente d'abord,

Digitized by Google

consiste dans le développement de la fonction $\frac{1}{\omega_{cu}}$ en série suivant les puissances entières et positives de u; ce qui conduit par des quadratures connues à la série

$$(6)\quad \tau=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2c^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2c^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2c^6+\ldots\right\},$$

d'où, à cause de l'équation (5),

$$(7)\quad \varrho=\frac{\pi i}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2b^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2b^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)b^6+\ldots\right\}.$$

§. III.

Sur les formules fondamentales des fonctions circulaires du second ordre.

Les fonctions circulaires du second ordre

$$(1)\qquad u=P_x=P_{x,c},\quad v=Q_x=Q_{x,c},\quad w=R_x=R_{x,c}$$

sont complètement déterminées par le système des équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \partial_x u=vw, & \partial_x v=-wu, & \partial_x w=-c^2uv,\\ P_0=0, & Q_0=1, & R_0=1; \end{cases}$$

d'où l'on a déduit, §. 1. (4), les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} u^2=1-v^2=\dfrac{1}{c^2}(1-w^2),\\ v^2=1-u^2=-\dfrac{1}{c^2}(b^2-w^2),\\ w^2=1-c^2u^2=b^2+c^2v^2, \end{cases}$$

ayant posé, pour abréger,

$$(4)\qquad b^2=1-c^2.$$

Ajoutons toutefois, pour compléter la détermination de b, qu'elle sera toujours prise dans le sens de devenir 1, lorsque c s'évanouit, comme elle est introduite par l'équation (1), §. II.

Cela posé, on tire des équations (2) et (3):

$$\begin{aligned} (\partial_x u)^2&=1-(1+c^2)u^2+c^2u^4,\\ (\partial_x v)^2&=-b^2+(b^2-c^2)v^2+c^2v^4,\\ (\partial_x w)^2&=b^2-(1+b^2)w^2+w^4; \end{aligned}$$

d'où, en différentiant par rapport à x,

Digitized by Google

$$\partial_x^2 u = -u\{1 + c^2 - 2c^2u^2\},$$
$$\partial_x^2 v = -v\{c^2 - b^2 - 2c^2v^2\},$$
$$\partial_x^2 w = -w\{1 + b^2 - 2w^2\}.$$

Soient maintenant u', v', w' trois fonctions, qui se déduisent de u, v, w par le changement de x en $x+h$, h étant indépendante de x, en sorte qu'on ait

$$u' = P_{x+h},\ v' = Q_{x+h},\ w' = R_{x+h}; \tag{5}$$

on aura de même

$$\partial_x u' = v'w',\quad \partial_x v' = -w'u',\quad \partial_x w' = -c^2u'v', \tag{6}$$

$$(\partial_x u')^2 = 1 - (1 + c^2)\,u'^2 + c^2u'^4,$$
$$(\partial_x v')^2 = -b^2 + (b^2 - c^2)\,v'^2 + c^2v'^4,$$
$$(\partial_x w')^2 = b^2 - (1 + b^2)\,w'^2 + w'^4$$

et

$$\partial_x^2 u' = -u'\{1 + c^2 - 2c^2u'^2\},$$
$$\partial_x^2 v' = -v'\{c^2 - b^2 - 2c^2v'^2\},$$
$$\partial_x^2 w' = -w'\{1 + b^2 - 2w'^2\}.$$

De ces équations, jointes aux précédentes, on déduit :

$$(u\partial_x u')^2 - (u'\partial_x u)^2 = \{1 - c^2(uu')^2\}\{u^2 - u'^2\},$$
$$(v\partial_x v')^2 - (v'\partial_x v)^2 = -\{b^2 + c^2(vv')^2\}\{v^2 - v'^2\},$$
$$(w\partial_x w')^2 - (w'\partial_x w)^2 = \{b^2 - (ww')^2\}\{w^2 - w'^2\}$$

et

$$u\partial_x^2 u' - u'\partial_x^2 u = -2c^2uu'(u^2 - u'^2),$$
$$v\partial_x^2 v' - v'\partial_x^2 v = -2c^2v'(v^2 - v'^2),$$
$$w\partial_x^2 w' - w'\partial_x^2 w = -2ww'(w^2 - w'^2);$$

d'où

$$\frac{u\partial_x^2 u' - u'\partial_x^2 u}{(u\partial_x u')^2 - (u'\partial_x u)^2} = -\frac{2c^2uu'}{1 - c^2(uu')^2},$$

$$\frac{v\partial_x^2 v' - v'\partial_x^2 v}{(v\partial_x v')^2 - (v'\partial_x v)^2} = \frac{2c^2vv'}{b^2 + c^2(vv')^2},$$

$$\frac{w\partial_x^2 w' - w'\partial_x^2 w}{(w\partial_x w')^2 - (w'\partial_x w)^2} = -\frac{2ww'}{b^2 - (ww')^2}.$$

Mais on a

Digitized by Google

$$u\partial_x^2 u' - u'\partial_x^2 u = \partial_x (u\partial_x u' - u'\partial_x u),$$
$$v\partial_x^2 v' - v'\partial_x^2 v = \partial_x (v\partial_x v' - v'\partial_x v),$$
$$w\partial_x^2 w' - w'\partial_x^2 w = \partial_x (w\partial_x w' - w'\partial_x w),$$

et

$$(u\partial_x u')^2 - (u'\partial_x u)^2 = (u\partial_x u' - u'\partial_x u)(u\partial_x u' + u'\partial_x u),$$
$$(v\partial_x v')^2 - (v'\partial_x v)^2 = (v\partial_x v' - v'\partial_x v)(v\partial_x v' + v'\partial_x v),$$
$$(w\partial_x w')^2 - (w'\partial_x w)^2 = (w\partial_x w' - w'\partial_x w)(w\partial_x w' + w'\partial_x w),$$

ou

$$(u\partial_x u')^2 - (u'\partial_x u)^2 = (u\partial_x u' - u'\partial_x u)\partial_x (uu'),$$
$$(v\partial_x v')^2 - (v'\partial_x v)^2 = (v\partial_x v' - v'\partial_x v)\partial_x (vv'),$$
$$(w\partial_x w')^2 - (w'\partial_x w)^2 = (w\partial_x w' - w'\partial_x w)\partial_x (ww');$$

donc on obtiendra

$$\frac{\partial_x (u\partial_x u' - u'\partial_x u)}{u\partial_x u' - u'\partial_x u} = -\frac{2c^2 uu'\partial_x (uu')}{1 - c^2 (uu')^2},$$

$$\frac{\partial_x (v\partial_x v' - v'\partial_x v)}{v\partial_x v' - v'\partial_x v} = \frac{2c^2 vv'\partial_x (vv')}{b^2 + c^2 (vv')^2},$$

$$\frac{\partial_x (w\partial_x w' - w'\partial_x w)}{w\partial_x w' - w'\partial_x w} = -\frac{2ww'\partial_x (ww')}{b^2 - (ww')^2};$$

ou, en ayant égard aux équations (2) et (6),

$$\frac{\partial_x (uv'w' - u'vw)}{uv'w' - u'vw} = \frac{\partial_x (1 - c^2 u^2 u'^2)}{1 - c^2 u^2 u'^2},$$

$$\frac{\partial_x (vw'u' - v'wu)}{vw'u' - v'wu} = \frac{\partial_x (b^2 + c^2 v^2 v'^2)}{b^2 + c^2 v^2 v'^2},$$

$$\frac{\partial_x (wu'v' - w'uv)}{wu'v' - w'uv} = \frac{\partial_x (b^2 - w^2 w'^2)}{b^2 - w^2 w'^2}.$$

Puis, comme, en général, d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{\partial_x p}{p} = \frac{\partial_x q}{q}$$

on tire

$$\frac{\partial_x p}{p} - \frac{\partial_x q}{q} = 0$$

ou

Digitized by Google

$$\partial_x \frac{p}{q} = 0,$$

il viendra

$$\partial_x \frac{uv'w' - u'vw}{1 - c^2u^2u'^2} = 0,$$

$$\partial_x \frac{vw'u' - v'wu}{b^2 + c^2v^2v'^2} = 0,$$

$$\partial_x \frac{wu'v' - w'uv}{b^2 - w^2w'^2} = 0;$$

ou bien, en vertu des équations (1) et (5),

$$\partial_x \frac{P_x Q_{x+h} R_{x+h} - P_{x+h} Q_x R_x}{1 - c^2 P_x^2 P^2_{x+h}} = 0,$$

$$\partial_x \frac{Q_x R_{x+h} P_{x+h} - Q_{x+h} R_x P_x}{b^2 + c^2 Q_x^2 Q^2_{x+h}} = 0,$$

$$\partial_x \frac{R_x P_{x+h} Q_{x+h} - R_{x+h} P_x Q_x}{b^2 - R_x^2 R^2_{x+h}} = 0.$$

En intégrant, et en déterminant les constantes d'intégration par la supposition de $x=0$, ce qui changera P_x, Q_x, R_x en 0, 1, 1, on sera conduit à

$$\frac{P_x Q_{x+h} R_{x+h} - P_{x+h} Q_x R_x}{1 - c^2 P_x^2 P^2_{x+h}} = -P_h,$$

$$\frac{Q_x R_{x+h} P_{x+h} - Q_{x+h} R_x P_x}{b^2 + c^2 Q_x^2 Q^2_{x+h}} = \frac{R_h P_h}{b^2 + c^2 Q_h^2},$$

$$\frac{R_x P_{x+h} Q_{x+h} - R_{x+h} P_x Q_x}{b^2 - R_x^2 R^2_{x+h}} = \frac{P_h Q_h}{b^2 - R_h^2};$$

et, en faisant $x+h=y$, ou $h=y-x$, et en observant, qu'en vertu des équations (1) et (3) on aura

$$b^2 + c^2 Q_h^2 = R_h^2, \quad b^2 - R_h^2 = -c^2 Q_h^2,$$

il s'en suivra

$$P_{y-x} = -\frac{P_x Q_y R_y - P_y Q_x R_x}{1 - c^2 P_x^2 P_y^2},$$

$$\frac{P_{y-x}}{R_{y-x}} = -\frac{Q_x R_y P_y - Q_y R_x P_x}{b^2 + c^2 Q_x^2 Q_y^2},$$

$$\frac{P_{y-x}}{Q_{y-x}} = -c^2 \frac{R_x P_y Q_y - R_y P_x Q_x}{b^2 - R^2_x R_y^2}.$$

Digitized by Google

Les variables x et y étant indépendantes l'une de l'autre, on obtiendra, en prenant $y=0$,

$$P_{-x}=-P_x,\ \frac{P_{-x}}{R_{-x}}=-\frac{P_x}{R_x},\quad \frac{P_{-x}}{Q_{-x}}=-\frac{P_x}{Q_x},$$

d'où

$$(7)\qquad P_x=-P_{-x},\ Q_x=Q_{-x},\ R_x=R_{-x}.$$

En substituant donc $-x$ à x, les équations précédentes donneront

$$(8)\quad \begin{cases} P_{x+y}=\dfrac{P_xQ_yR_y+P_yQ_xR_x}{1-c^2P_x^2P_y^2},\\ \dfrac{P_{x+y}}{R_{x+y}}=\dfrac{Q_xR_yP_y+Q_yR_xP_x}{b^2+c^2Q_x^2Q_y^2},\\ \dfrac{P_{x+y}}{Q_{x+y}}=-c^2\dfrac{R_xP_yQ_y+R_yP_xQ^x}{b^2-R_x^2R_y^2}. \end{cases}$$

On pourra déduire de ces équations une foule de formules. Il ne suffira pas même de les établir toutes trois, puisque deux se déduisent de la troisième à l'aide des relations (3).

Profitons d'abord des valeurs particulières du paragraphe précédent. En déterminant τ et ϱ par les équations (4) ou (6) et (7), §. II., on a trouvé, (2), (3), §. II.,

$$(9)\quad \begin{cases} P_\tau=1,\quad Q_\tau=0,\quad R_\tau=b,\\ \dfrac{1}{P_\varrho}=0,\quad \dfrac{1}{Q_\varrho}=0,\quad \dfrac{1}{R_\varrho}=0,\\ \dfrac{P_\varrho}{Q_\varrho}=i,\quad \dfrac{Q_\varrho}{R_\varrho}=\dfrac{1}{c},\quad \dfrac{R_\varrho}{P_\varrho}=\dfrac{c}{i}. \end{cases}$$

Au moyen de ces valeurs particulières on tire des équations (8) jointes aux relations (3)

$$P_{x+\tau}=\frac{Q_x}{R_x},\quad \frac{P_{x+\tau}}{R_{x+\tau}}=\frac{1}{b}Q_x,\quad \frac{P_{x+\tau}}{Q_{x+\tau}}=-\frac{1}{b}\frac{Q_x}{P_x},$$

$$P_{x+\varrho}=\frac{1}{cP_x},\ \frac{P_{x+\varrho}}{R_{x+\varrho}}=\frac{i}{cQ_x},\quad \frac{P_{x+\varrho}}{Q_{x+\varrho}}=\frac{i}{R_x};$$

d'où

$$(10)\quad \begin{cases} P_{x+\tau}=\dfrac{Q_x}{R_x},\quad Q_{x+\tau}=-b\dfrac{P_x}{R_x},\quad R_{x+\tau}=b\dfrac{1}{R_x},\\ P_{x+\varrho}=\dfrac{1}{cP_x},\ Q_{x+\varrho}=\dfrac{1}{ci}\dfrac{R_x}{P_x},\quad R_{x+\varrho}=\dfrac{1}{i}\dfrac{Q_x}{P_x}. \end{cases}$$

Digitized by Google

De plus, si l'on fait, pour abréger,

$$\sigma = \sigma_c = \tau + \varrho, \tag{11}$$

ou, suivant l'équation (5). §. II.

$$\sigma_c = \tau_a + i\tau_b,$$

il viendra

$$P_{x+\sigma} = \frac{Q_{x+\varrho}}{R_{x+\varrho}}, \quad Q_{x+\sigma} = -b\frac{P_{x+\varrho}}{R_{x+\varrho}}, \quad R_{x+\sigma} = b\frac{1}{R_{x+\varrho}},$$

ou

$$P_{x+\sigma} = \frac{1}{c}\frac{R_x}{Q_x}, \quad Q_{x+\sigma} = \frac{b}{ci}\frac{1}{Q_x}, \quad R_{x+\sigma} = bi\frac{P_x}{Q_x}, \tag{12}$$

et, en prenant $x = 0$,

$$P_\sigma = \frac{1}{c}, \quad Q_\sigma = \frac{b}{ci}, \quad R_\sigma = 0.$$

Si maintenant on substitue successivement $y + \tau$, $y + \sigma$, $y + \varrho$ à y dans les formules (8), en observant, que des relations (3) on déduit

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - c^2 P_x^2 P_y^2 = Q_y^2 + R_x^2 P_y^2 = R_y^2 + c^2 Q_x^2 P_y^2; \\ b^2 + c^2 Q_x^2 Q_y^2 = R_y^2 - c^2 P_x^2 Q_y^2 = b^2 P_y^2 + R_x^2 Q_y^2, \\ b^2 - R_x^2 R_y^2 = c^2(b^2 P_y^2 - Q_x^2 R_y^2) = -c^2(Q_y^2 - P_x^2 R_y^2), \end{array}\right. \tag{14}$$

on trouvera, à l'aide des formules (10) et (12),

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{Q_{x+y}}{R_{x+y}} = -\dfrac{b^2 P_x P_y - Q_x R_x Q_y R_y}{b^2 + c^2 Q_x^2 Q_y^2}, \\ Q_{x+y} = \dfrac{Q_x Q_y - P_x R_x P_y R_y}{1 - c^2 P_x^2 P_y^2}, \\ \dfrac{Q_{x+y}}{P_{x+y}} = c^2\dfrac{R_x P_y Q_y - R_y P_x Q_x}{R_x^2 - R_y^2}; \end{array}\right. \tag{15}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{R_{x+y}}{Q_{x+y}} = -c^2\dfrac{b^2 P_x P_y + Q_x R_x Q_y R_y}{b^2 - R_x^2 R_y^2}, \\ \dfrac{R_{x+y}}{P_{x+y}} = \dfrac{Q_x R_y P_y - Q_y R_x P_x}{Q_x^2 - Q_y^2}, \\ R_{x+y} = \dfrac{R_x R_y - c^2 P_x Q_x P_y Q_y}{1 - c^2 P_x^2 P_y^2}; \end{array}\right. \tag{16}$$

Digitized by Google

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{P_{x+y}} = \dfrac{P_xQ_yR_y - P_yQ_xR_x}{P_x^2 - P_y^2}, \\ \dfrac{1}{Q_{x+y}} = -c^2\dfrac{Q_xQ_y + P_xR_xP_yR_y}{b^2 - R_x^2R_y^2}, \\ \dfrac{1}{R_{x+y}} = \dfrac{R_xR_y + c^2P_xQ_xP_yQ_y}{b^2 + c^2Q_x^2Q_y^2}. \end{cases}$$

En combinant ces formules on en tirera d'autres, que nous n'écrivons pas. Toutefois il sera bon d'en établir encore quelques-unes, dont nous profiterons dans la suite.

En vertu des équations (7) on déduit des formules (17)

$$P_{x-y} = \frac{P_x^2 - P_y^2}{P_xQ_yR_y + P_yQ_xR_x},$$

$$Q_{x-y} = -\frac{1}{c^2}\frac{b^2 - R_x^2R_y^2}{Q_xQ_y - P_xR_xP_yR_y},$$

$$R_{x-y} = \frac{b^2 + c^2Q_x^2Q_y^2}{R_xR_y - c^2P_xQ_xP_yQ_y}.$$

En y joignant les formules (8), (15), (16), on trouvera

$$(18)\quad \begin{cases} P_{x+y}P_{x-y} = \dfrac{P_x^2 - P_y^2}{1 - c^2P_x^2P_y^2}, \\ Q_{x+y}Q_{x-y} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{b^2 - R_x^2R_y^2}{1 - c^2P_x^2P_y^2}, \\ R_{x+y}R_{x-y} = \dfrac{b^2 + c^2Q_x^2Q_y^2}{1 - c^2P_x^2P_y^2}; \end{cases}$$

formules qui, à l'aide des équations (10), (12), (14), se réduisent à.

$$(19)\quad \begin{cases} P_{x+y}P_{x-y} = -P_y^2\dfrac{1 - \dfrac{P_x^2}{P_y^2}}{1 - \dfrac{P_x^2}{P_{y+\varrho}^2}}, \\ Q_{x+y}Q_{x-y} = Q_y^2\dfrac{1 - \dfrac{P_x^2}{P_{y+\iota}^2}}{1 - \dfrac{P_x^2}{P_{y+\varrho}^2}}, \\ R_{x+y}R_{x-y} = R_y^2\dfrac{1 - \dfrac{P_x^2}{P_{y+\sigma}^2}}{1 - \dfrac{P_x^2}{P_{y+\varrho}^2}}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Enfin, si l'on fait $x+y=z$, d'où $y=z-x$, z étant indépendante de x, on aura

$$\partial_x P_y = -Q_y R_y,\ \partial_x Q_y = R_y P_y,\ \partial_x R_y = c^2 P_y Q_y;$$

donc on tirera des formules (17), (16), (15):

$$\frac{1}{P_z} = -\frac{P_x \partial_x P_y + P_y \partial_x P_x}{P_x^2 - P_y^2},$$

$$\frac{R_z}{P_z} = \frac{Q_x \partial_x Q_y + Q_y \partial_x Q_x}{Q_x^2 - Q_y^2},$$

$$\frac{Q_z}{P_z} = \frac{R_x \partial_x R_y + R_y \partial_x R_x}{R_x^2 - R_y^2};$$

d'où

$$(20)\quad \begin{cases} P^2{}_x - P_y^2 = -P_z \partial_x (P_x P_y), \\ Q_x^2 - Q_y^2 = \dfrac{P_z}{R_z} \partial_x (Q_x Q_y), \\ R_x^2 - R_y^2 = \dfrac{P_z}{Q_z} \partial_x (R_x R_y). \end{cases}$$

Or, suivant les relations (3), on a

$$(21)\quad P_x^2 - P_y^2 = -(Q_x^2 - Q_y^2) = -\frac{1}{c^2}(R_x^2 - R_y^2);$$

donc il suivra

$$\partial_x (P_x P_y) = \frac{1}{R_z} \partial_x (Q_x Q_y) = \frac{1}{c^2 Q_z} \partial_x (R_x R_y);$$

puis, en intégrant et en observant, que, pour $x=0$, y se réduit à z, on obtiendra

$$P_x P_y = \frac{1}{R_z}(Q_x Q_y - Q_z) = \frac{1}{c^2 Q_z}(R_x R_y - R_z);$$

d'où, en remettant $x+y$ à z et ayant égard aux relations (3),

$$(22)\quad \begin{cases} Q_x Q_y - P_x P_y R_{x+y} = Q_{x+y}, \\ R_x R_y - c^2 P_x P_y Q_{x+y} = R_{x+y}, \\ R_x R_y R_{x+y} - c^2 Q_x Q_y Q_{x+y} = b^2. \end{cases}$$

Digitized by Google

§. IV.

Relation entre les variables et les modules de deux fonctions circulaires du second ordre dont le rapport est constant.

En posant

$$(1)\quad \begin{cases} P_{y_1,c_1}=\alpha_1 P_{x,c}, & Q_{y_1,c_1}=\beta_1 Q_{x,c}, & R_{y_1,c_1}=\gamma_1 R_{x,c}, \\ P_{y_2,c_2}=\alpha_2 P_{x,c}, & Q_{y_2,c_2}=\beta_2 R_{x,c}, & R_{y_2,c_2}=\gamma_2 Q_{x,c}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} P_{y_3,c_3}=\alpha_3 Q_{x,c}, & Q_{y_3,c_3}=\beta_3 R_{x,c}, & R_{y_3,c_3}=\gamma_3 P_{x,c}, \\ P_{y_4,c_4}=\alpha_4 Q_{x,c}, & Q_{y_4,c_4}=\beta_4 P_{x,c}, & R_{y_4,c_4}=\gamma_4 R_{x,c}, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} P_{y_5,c_5}=\alpha_5 R_{x,c}, & Q_{y_5,c_5}=\beta_5 P_{x,c}, & R_{y_5,c_5}=\gamma_5 Q_{x,c}, \\ P_{y_6,c_6}=\alpha_6 R_{x,c}, & Q_{y_6,c_6}=\beta_6 Q_{x,c}, & R_{y_6,c_6}=\gamma_6 P_{x,c}; \end{cases}$$

il s'agit de déterminer y_k en fonction de x, et α_k, β_k, γ_k, c_k en fonction de c.

Comme on a

$$\partial_x P_{x,c}=Q_{x,c}R_{x,c},\ \partial_x Q_{x,c}=-R_{x,c}P_{x,c},\ \partial_x R_{x,c}=-c^2 P_{x,c}Q_{x,c},$$

il s'en suit

$$\partial_x P_{y_k,c_k}=Q_{y_k,c_k}R_{y_k,c_k}\partial_x y_k,\ \partial_x Q_{y_k,c_k}=-R_{y_k,c_k}P_{y_k,c_k}\partial_x y_k,$$
$$\partial_x R_{y_k,c_k}=-c^2{}_k P_{y_k,c_k}Q_{y_k,c_k}\partial_x y_k;$$

et, en faisant, pour abréger,

$$(4)\qquad \partial_x y_k=\mu_k,$$

on en déduira, au moyen des équations (1), (2), (3):

$$(5)$$

$$\begin{cases} \mu_1=\dfrac{\alpha_1}{\beta_1\gamma_1}=\dfrac{\beta_1}{\gamma_1\alpha_1}=\dfrac{c^2}{c_1{}^2}\dfrac{\gamma_1}{\alpha_1\beta_1},\ \mu_2=\dfrac{\alpha_2}{\beta_2\gamma_2}=c^2\dfrac{\beta_2}{\gamma_2\alpha_2}=\dfrac{1}{c_2{}^2}\dfrac{\gamma_2}{\alpha_2\beta_2}, \\ \mu_3=-\dfrac{\alpha_3}{\beta_3\gamma_3}=c^2\dfrac{\beta_3}{\gamma_3\alpha_3}=-\dfrac{1}{c_3{}^2}\dfrac{\gamma_3}{\alpha_3\beta_3},\ \mu_4=-\dfrac{\alpha_4}{\beta_4\gamma_4}=-\dfrac{\beta_4}{\gamma_4\alpha_4}=\dfrac{c^2}{c^2{}_4}\dfrac{\gamma_4}{\alpha_4\beta_4}, \\ \mu_5=-c^2\dfrac{\alpha_5}{\beta_5\gamma_5}=-\dfrac{\beta_5}{\gamma_5\alpha_5}=\dfrac{1}{c_5{}^2}\dfrac{\gamma_5}{\alpha_5\beta_5},\ \mu_6=-c^2\dfrac{\alpha_6}{\beta_6\gamma_6}=\dfrac{\beta_6}{\gamma_6\alpha_6}=-\dfrac{1}{c_6{}^2}\dfrac{\gamma_6}{\alpha_6\beta_6}; \end{cases}$$

d'où l'on voit, que μ_k est indépendante de x, de sorte qu'on aura

Digitized by Google

(6) $$y_k = \mu_k x + \delta_k,$$

δ_k étant constante par rapport à x. En prenant donc respectivement $x=0$, $x=\tau$, $x=\sigma$ dans les équations (1), (2), (3), et en observant, qu'on a trouvé, (2), (9), (13), §. III.

$$\begin{aligned} P_0 &= 0, \quad Q_0 = 1, \quad R_0 = 1, \\ P_\tau &= 1, \quad Q_\tau = 0, \quad R_\tau = b, \\ P_\sigma &= \frac{1}{c}, \quad Q_\sigma = \frac{b}{ci}, \quad R_\sigma = 0, \end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned} P_{\delta_1,c_1} &= 0, \quad Q_{\delta_1,c_1} = \beta_1, \quad R_{\delta_1,c_1} = \gamma_1, \\ P_{\delta_2,c_2} &= 0, \quad Q_{\delta_2,c_2} = \beta_2, \quad R_{\delta_2,c_2} = \gamma_2, \\ P_{\mu_3\tau+\delta_3,c_3} &= 0, \quad Q_{\mu_3\tau+\delta_3,c_3} = \beta_3 b, \quad R_{\mu_3\tau+\delta_3,c_3} = \gamma_3, \\ P_{\mu_4\tau+\delta_4,c_4} &= 0, \quad Q_{\mu_4\tau+\delta_4,c_4} = \beta_4, \quad R_{\mu_4\tau+\delta_4,c_4} = \gamma_4 b, \\ P_{\mu_5\sigma+\delta_5,c_5} &= 0, \quad Q_{\mu_5\sigma+\delta_5,c_5} = \beta_5 \frac{1}{c}, \quad R_{\mu_5\sigma+\delta_5,c_5} = \gamma_5 \frac{b}{ci}, \\ P_{\mu_6\sigma+\delta_6,c_6} &= 0, \quad Q_{\mu_6\sigma+\delta_6,c_6} = \beta_6 \frac{b}{ci}, \quad R_{\mu_6\sigma+\delta_6,c_6} = \gamma_6 \frac{1}{c}, \end{aligned}$$

équations, auxquelles on satisfait en faisant

(7) $\delta_1=0$, $\delta_2=0$, $\delta_3=-\mu_3\tau$, $\delta_4=-\mu_4\tau$, $\delta_5=-\mu_5\sigma$, $\delta_6=-\mu_6\sigma$;

ce qui donnera

(8) $$\left.\begin{aligned} &\beta_1=1,\ \beta_2=1,\ \beta_3=\frac{1}{b}, \quad \beta_4=1,\ \beta_5=c,\ \beta_6=\frac{ci}{b}, \\ &\gamma_1=1,\ \gamma_2=1,\ \gamma_3=1, \quad \gamma_4=\frac{1}{b},\ \gamma_5=\frac{ci}{b},\ \gamma_6=c. \end{aligned}\right\}$$

Les constantes β_k, γ_k étant ainsi déterminées, les équations (5) se réduiront à

$$\mu_1=\alpha_1=\frac{1}{\alpha_1}=\frac{c^2}{{c_1}^2}\frac{1}{\alpha_1}, \quad \mu_2=\alpha_2=c^2\frac{1}{\alpha_2}=\frac{1}{{c_2}^2}\frac{1}{\alpha_2},$$

$$\mu_3=-b\alpha_3=\frac{c^2}{b}\frac{1}{\alpha_3}=-\frac{b}{{c_3}^2}\frac{1}{\alpha_3}, \quad \mu_4=-b\alpha_4=-b\frac{1}{\alpha_4}=\frac{c^2}{b{c_4}^2}\frac{1}{\alpha_4},$$

$$\mu_5=-\frac{b}{i}\alpha_5=-\frac{b}{i}\frac{1}{\alpha_5}=\frac{i}{b{c^2}_5}\frac{1}{\alpha_5}, \quad \mu_6=-\frac{b}{i}\alpha_6=\frac{i}{b}\frac{1}{\alpha_6}=-\frac{b}{ic^2_6}\frac{1}{\alpha_6};$$

d'où l'on tire

Digitized by Google

$$\alpha_1^2=1,\ \alpha_2^2=c^2,\ \alpha_3^2=-\frac{c^2}{b^2},\quad \alpha_4^2=1,\ \alpha^2{}_5=1,\ \alpha_6^2=\frac{1}{b^2},$$

$$c_1^2=c^2,\ c_2^2=\frac{1}{c^2},\ c^2{}_3=-\frac{b^2}{c^2},\quad c_4^2=-\frac{c^2}{b^2},\quad c_5^2=\frac{1}{b^2},\ c_6^2=b^2,$$

$$\mu_1=\alpha_1,\ \mu_2=\alpha_2,\ \mu_3=-b\alpha_3,\ \mu_4=-b\alpha_4,\ \mu_5=-\frac{b}{i}\alpha_5,\ \mu_6=-\frac{b}{i}\alpha_6.$$

Ces équations, déterminant les constantes α_k et c_k au signe près, on pourra en choisir à volonté. Nous posons parsuite

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha_1=1,\ \alpha_2=c_1,\ \alpha_3=-\dfrac{ci}{b},\ \alpha_4=-1,\ \alpha_5=1,\ \alpha_6=\dfrac{1}{b}, \\ c_1=-c,\ c_2=\dfrac{1}{c},\ c_3=\dfrac{b}{ci},\ c_4=\dfrac{ci}{b},\ c_5=\dfrac{1}{b},\ c_6=b, \\ \mu_1=1,\ \mu_2=c,\ \mu_3=ci,\ \mu_4=b,\ \mu_5=bi,\ \mu_6=i. \end{cases}$$

En éliminant y_k, α_k, β_k, γ_k, c_k à l'aide des équations (6), (7), (8), (9), les équations (1), (2), (3) se réduiront à

$$(10)\quad P_{x,-c}=P_{x,c},\quad Q_{x,-c}=Q_{x,c},\quad R_{x,-c}=R_{x,c},$$

$$(11)\quad P_{cx,\frac{1}{c}}=cP_{x,c},\quad Q_{cx,\frac{1}{c}}=R_{x,c},\quad R_{cx,\frac{1}{c}}=Q_{x,c},$$

$$(12)\quad \begin{cases} P_{ci(x-\tau),\frac{b}{ci}}=-\dfrac{ci}{b}Q_{x,c},\ Q_{ci(x-\tau),\frac{b}{ci}}=\dfrac{1}{b}R_{x,c},\ R_{ci(x-\tau),\frac{b}{ci}}=P_{x,c}, \\ P_{b(x-\tau),\frac{ci}{b}}=-Q_{x,c},\ Q_{b(x-\tau),\frac{ci}{b}}=P_{x,c},\ R_{b(x-\tau),\frac{ci}{b}}=\dfrac{1}{b}R_{x,c}, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} P_{bi(x-\sigma),\frac{1}{b}}=R_{x,c},\ Q_{bi(x-\sigma),\frac{1}{b}}=cP_{x,c},\ R_{bi(x-\sigma),\frac{1}{b}}=\dfrac{ci}{b}Q_{x,c}, \\ P_{i(x-\sigma),b}=\dfrac{1}{b}R_{x,c},\ Q_{i(x-\sigma),b}=\dfrac{ci}{b}Q_{x,c},\ R_{i(x-\sigma),b}=cP_{x,c}. \end{cases}$$

Les formules (10) font voir, que les fonctions P, Q, R ne changeront pas en remplaçant le module c par $-c$. Au moyen des formules (11) on passe d'un module c inférieur à l'unité au module reciproque $\frac{1}{c}$ supérieur à l'unité. Il suffira donc de conserver des formules (12) et (13) les trois premières ou les trois dernières, puisqu'on en déduit les autres à l'aide des formules (11). En conservant les trois dernières on en tire

Digitized by Google

$$(14)\begin{cases} P_{bx,\frac{ci}{b}} = -Q_{x+\tau,c},\quad Q_{bx,\frac{ci}{b}} = P_{x+\tau,c},\quad R_{bx,\frac{ci}{b}} = \frac{1}{b} R_{x+\tau,c}, \\ P_{ix,b} = \frac{1}{b} R_{x+\sigma,c},\quad Q_{ix,b} = \frac{ci}{b} Q_{x+\sigma,c},\quad R_{ix,b} = c\, P_{x+\sigma,o}; \end{cases}$$

ou, suivant les équations (10) et (12), §. III.

$$(15)\quad P_{bx,\frac{ci}{b}} = b\frac{P_{x,c}}{R_{x,c}},\quad Q_{bx,\frac{ci}{b}} = \frac{Q_{x,c}}{R_{x,c}},\quad R_{bx,\frac{ci}{b}} = \frac{1}{R_{x,c}},$$

$$(16)\quad P_{ix,b} = i\frac{P_{x,c}}{Q_{x,c}},\quad Q_{ix,b} = \frac{1}{Q_{x,c}},\quad R_{ix,b} = \frac{R_{x,c}}{Q_{x,c}}.$$

Les formules (15) serviront à la réduction des fonctions circulaires du second ordre à module imaginaire, et les formules (16) à la réduction des mêmes fonctions à variable imaginaire.

Ajoutons, que, par suite des relations

$$Q^2{}_x = 1 - P^2{}_x,\quad R^2{}_x = 1 - c^2 P_x{}^2,$$

jointes aux formules (10) et (12), §. III. on trouvera aisément

$$1 - \frac{Q^2{}_{x+\tau}}{Q^2{}_{y+\tau}} = \frac{1}{Q^2{}_{y+\tau}}(Q^2{}_{y+\tau} - Q^2{}_{x+\tau}) = \frac{1}{c^2 Q^2{}_{y+\tau}}(R^2{}_{y+\tau} - R^2{}_{x+\tau})$$
$$= \frac{R^2{}_y}{c^2 P^2{}_y}\left(\frac{1}{R^2{}_y} - \frac{1}{R^2{}_x}\right) = \frac{1}{c^2 P^2{}_y R^2{}_x}(R^2{}_x - R^2{}_y) = \frac{1}{R^2{}_x}\left(1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_y}\right),$$

et

$$1 - \frac{R^2{}_{x+\sigma}}{R^2{}_{y+\sigma}} = \frac{1}{R^2{}_{y+\sigma}}(R^2{}_{y+\sigma} - R^2{}_{x+\sigma}) = \frac{c^2}{R^2{}_{y+\sigma}}(Q^2{}_{y+\sigma} - Q^2{}_{x+\sigma})$$
$$= \frac{Q^2{}_y}{P^2{}_y}\left(\frac{1}{Q^2{}_y} - \frac{1}{Q^2{}_x}\right) = \frac{1}{P^2{}_y Q^2{}_x}(Q^2{}_x - Q^2{}_y) = \frac{1}{Q^2{}_x}\left(1 - \frac{P^2{}_x}{P_y{}^2}\right):$$

donc on aura

$$1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_y} = R_x{}^2\left(1 - \frac{Q^2{}_{x+\tau}}{Q^2{}_{y+\tau}}\right) = Q^2{}_x\left(\frac{R^2{}_{x+\sigma}}{R^2{}_{y+\sigma}}\right),$$

ou

$$(17)\quad P^2{}_{x+\varrho}\left(1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_y}\right) = -Q^2{}_{x+\varrho}\left(1 - \frac{Q^2{}_{x+\tau}}{Q^2{}_{y+\tau}}\right)$$
$$= -\frac{1}{c^2} R^2{}_{x+\varrho}\left(1 - \frac{R^2{}_{x+\sigma}}{R^2{}_{y+\sigma}}\right),$$

et

Digitized by Google

$$(18)\qquad \frac{1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_y}}{1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_z}}=\frac{1-\frac{Q^2{}_{x+\tau}}{Q^2{}_{y+\tau}}}{1-\frac{Q^2{}_{x+\tau}}{Q^2{}_{z+\tau}}}=\frac{1-\frac{R^2{}_{x+\sigma}}{R^2{}_{y+\sigma}}}{1-\frac{R^2{}_{x+\sigma}}{R^2{}_{z+\sigma}}}.$$

Or des formules (11), (12), (13) on déduit

$$\frac{P_x}{P_y}=\frac{P_{cx,\frac{1}{c}}}{P_{cy,\frac{1}{c}}},\qquad \frac{Q_{x+\tau}}{Q_{y+\tau}}=\frac{P_{cix,\frac{b}{ci}}}{P_{ciy,\frac{b}{ci}}}=\frac{P_{bx,\frac{ci}{b}}}{P_{by,\frac{ci}{b}}},$$

$$\frac{R_{x+\sigma}}{R_{y+\sigma}}=\frac{P_{bix,\frac{1}{b}}}{P_{biy,\frac{1}{b}}}=\frac{P_{ix,b}}{P_{iy,b}};$$

donc il viendra, eu égard aux formules (18),

$$(19)\qquad \frac{1-\frac{P^2{}_{x,c}}{P^2{}_{y,c}}}{1-\frac{P^2{}_{x,c}}{P^2{}_{z,c}}}=\frac{1-\frac{P^2{}_{bx,\frac{ci}{b}}}{P^2{}_{by,\frac{ci}{b}}}}{1-\frac{P^2{}_{bx,\frac{ci}{b}}}{P^2{}_{bz,\frac{ci}{b}}}}=\frac{1-\frac{P^2{}_{ix,b}}{P^2{}_{iy,b}}}{1-\frac{P^2{}_{ix,b}}{P^2{}_{iz,b}}}$$

$$=\frac{1-\frac{P^2{}_{cx,\frac{1}{c}}}{P^2{}_{cy,\frac{1}{c}}}}{1-\frac{P^2{}_{cx,\frac{1}{c}}}{P^2{}_{cz,\frac{1}{c}}}}=\frac{1-\frac{P^2{}_{cix,\frac{b}{ci}}}{P^2{}_{ciy,\frac{b}{ci}}}}{1-\frac{P^2{}_{cix,\frac{b}{ci}}}{P^2{}_{ciz,\frac{b}{ci}}}}=\frac{1-\frac{P^2{}_{bix,\frac{1}{b}}}{P^2{}_{biy,\frac{1}{b}}}}{1-\frac{P^2{}_{bix,\frac{1}{b}}}{P^2{}_{biz,\frac{1}{b}}}}.$$

§. V.

Relation entre les fonctions circulaires du second ordre par rapport à une variable x et entre les mêmes fonctions prises par rapport à un multiple de x.

En vertu des formules (8), (15), (16) §. III. on a

$$(1)\quad \begin{cases} P_{x+y} = \dfrac{P_x Q_y R_y + P_y Q_x R_x}{1 - c^2 P^2{}_x P^2{}_y}, \\ Q_{x+y} = \dfrac{Q_x Q_y - P_x P_y R_x R_y}{1 - c^2 P^2{}_x P^2{}_y}, \\ R_{x+y} = \dfrac{R_x R_y - c^2 P_x P_y Q_x Q_y}{1 - c^2 P^2{}_x P^2{}_y}. \end{cases}$$

En y joignant les équations (7)

$$(2)\qquad P_x = -P_{-x},\ Q_x = Q_{-x},\ R_x = R_{-x},$$

il viendra, en substituant $-y$ à y,

$$(3)\quad \begin{cases} P_{x-y} = \dfrac{P_x Q_y R_y - P_y Q_x R_x}{1 - c^2 P^2{}_x P^2{}_y}, \\ Q_{x-y} = \dfrac{Q_x Q_y + P_x P_y R_x R_y}{1 - c^2 P^2{}_x P^2{}_y}, \\ R_{x-y} = \dfrac{R_x R_y + c^2 P_x P_y Q_x Q_y}{1 - c^2 P^2{}_x P^2{}_y}; \end{cases}$$

d'où

$$(4)\quad \begin{cases} P_{x+y} + P_{x-y} = 2\dfrac{P_x Q_y R_y}{1 - c^2 P^2{}_x P_y{}^2}, \\ Q_{x+y} + Q_{x-y} = 2\dfrac{Q_x Q_y}{1 - c^2 P_x{}^2 P^2{}_y}, \\ R_{x+y} + R_{x-y} = 2\dfrac{R_x R_y}{1 - c^2 P^2{}_x P^2{}_y}. \end{cases}$$

En prenant $x = y$, et en observant, qu'on a

$$(5)\qquad P_0 = 0,\quad Q_0 = 1,\quad R_0 = 1.$$

on trouvera

Digitized by Google

$$(6)\quad \begin{cases} P_{2x}=2\dfrac{P_xQ_xR_x}{1-c^2P_x^4}, \\ Q_{2x}=2\dfrac{Q_x^2}{1-c^2P^4_x}-1, \\ R_{2x}=2\dfrac{R_x^2}{1-c^2P_x^4}-1; \end{cases}$$

puis, en ayant égard aux relations

$$(7)\quad Q^2_x=1-P_x^2,\quad R_x^2=1-c^2P^2_x,$$

il s'en suivra

$$(8)\quad \begin{cases} P_{2x}=2\dfrac{P_xQ_xR_x}{1-c^2P_x^4}, \\ Q_{2x}=\dfrac{1-2P_x^2+c^2P_x^4}{1-c^2P_x^4}, \\ R_{2x}=\dfrac{1-2c^2P_x^2+c^2P_x^4}{1-c^2P_x^4}. \end{cases}$$

En substituant ensuite $2x$ à x et x à y, on tirera des formules (4)

$$P_{3x}+P_x=2\frac{P_{2x}Q_xR_x}{1-c^2P^2_{2x}P_x^2},$$

$$Q_{3x}+Q_x=2\frac{Q_{2x}Q_x}{1-c^2P^2_{2x}P_x^2},$$

$$R_{3x}+R_x=2\frac{R_{2x}R_x}{1-c^2P^2_{2x}P_x^2};$$

d'où, éliminant P_{2x}, Q_{2x}, R_{2x} par les formules (8),

$$P_{3x}=P_x\left\{\frac{4Q^2_xR^2_x(1-c^2P_x^4)}{(1-c^2P_x^4)^2-4c^2P_x^4Q_x^2R_x^2}-1\right\},$$

$$Q_{3x}=Q_x\left\{\frac{2(1-2P^2_x+c^2P_x^4)(1-c^2P_x^4)}{(1-c^2P_x^4)^2-4c^2P_x^4Q_x^2R_x^2}-1\right\},$$

$$R_{3x}=R_x\left\{\frac{2(1-2c^2P_x^2+c^2P_x^4)(1-c^2P_x^4)}{(1-c^2P_x^4)^2-4c^2P_x^4Q_x^2R_x^2}-1\right\};$$

ou, en ayant égard aux relations (7),

Digitized by Google

$$(9)\quad \begin{cases} P_{3x}=P_x\dfrac{3-4(1+c^2)P_x^2+6c^2P_x^4-c^4P_x^8}{1-6c^2P_x^4+4c^2(1+c^2)P_x^6-3c^4P_x^8}, \\ Q_{3x}=Q_x\dfrac{1-4P_x^2+6c^2P_x^4-4c^4P_x^6+c^4P_x^8}{1-6c^2P_x^4+4c^2(1+c^2)P_x^6-3c^4P_x^8}, \\ R_{3x}=R_x\dfrac{1-4c^2P_x^2+6c^2P_x^4-4c^2P_x^6+c^4P_x^8}{1-6c^2P_x^4+4c^2(1+c^2)P_x^6-3c^4P_x^8}. \end{cases}$$

Remplaçons encore x par $2x$ dans les formules (6); il viendra

$$P_{4x}=2\frac{P_{2x}Q_{2x}R_{2x}}{1-c^2P_{2x}^4},$$

$$Q_{4x}=2\frac{Q_{2x}}{1-c^2P_{2x}^4}-1,$$

$$R_{4x}=2\frac{R_{2x}}{1-c^2P_{2x}^4}-1;$$

d'où, à l'aide des formules (8),

$$(10)\quad \begin{cases} P_{4x}=4P_xQ_xR_x\dfrac{(1-2P_x^2+c^2P_x^4)(1-2c^2P_x^2+c^2P_x^4)(1-c^2P_x^4)}{(1-c^2P_x^4)^4-16c^2P_x^4Q_x^4R_x^4}, \\ Q_{4x}=2\dfrac{(1-2P_x^2+c^2P_x^4)^2(1-c^2P_x^4)^2}{(1-c^2P_x^4)^4-16c^2P_x^4Q_x^4R_x^4}-1, \\ R_{4x}=2\dfrac{(1-2c^2P_x^2+c^2P_x^4)^2(1-c^2P_x^4)^2}{(1-c^2P_x^4)^4-16c^2P_x^4Q_x^4R_x^4}-1. \end{cases}$$

Sans qu'on ait besoin de développer les expressions contenues dans les seconds membres de ces équations, on reconnaitra, que $P^2{}_{4x}$, $Q^2{}_{4x}$, $R^2{}_{4x}$ peuvent être représentées par des fonctions rationelles et fractionnaires par rapport à $P_x{}^2$. On sera donc conduit à supposer par induction, qu'on saura satisfaire aux équations

$$(11)\quad P_{nx}=\frac{A_n}{D_n},\quad Q_{nx}=\frac{B_n}{D_n},\quad R_{nx}=\frac{C_n}{D_n},$$

en désignant par $A^2{}_n$, $B^2{}_n$, $C^2{}_n$, $D^2{}_n$ des fonctions entières par rapport à $P_x{}^2$, et par n un nombre entier et positif.

En comparant les équations (6), (8), (10) aux équations précédentes, on conclura, que $3=2^2-1$ sera le degré de $A_2{}^2$, $4=2^2$ celui de $D^2{}_2$, $9=3^2$ celui de $A_3{}^2$, $8=3^2-1$ celui de $D_3{}^2$, $15=4^2-1$ celui de $A_4{}^2$, $16=4^2$ celui de $D_4{}^2$; et on supposera par induction, que n^2-1 et n^2 seront les degrés de $A_n{}^2$ et $D_n{}^2$, lorsque n désigne un nombre pair, et que n^2 et n^2-1 seront les degrés de $A_n{}^2$ et $D^2{}_n$, lorsque n désigne un nombre impair.

Digitized by Google

Allons confirmer ces suppositions, en démontrant, qu'elles seront verifiées pour le nombre $m+2$, lorsqu'on les suppose exactes pour les nombres m et $m+1$.

On a trouvé, (18) §. III.,

$$P_{x+y}P_{x-y}=\frac{P_x^2-P_y^2}{1-c^2P_x^2P_y^2};$$

en substituant $(m+1)x$ à x et x à y, il viendra

$$P_{(m+2)x}P_{mx}=\frac{P^2_{(m+1)x}-P^2_x}{1-c^2P^2_xP^2_{(m+1)x}},$$

d'où, en vertu des équations (11),

$$\frac{A_{m+2}A_m}{D_{m+2}D_m}=\frac{A^2_{m+1}-P^2_xD^2_{m+1}}{D^2_{m+1}-c^2P_x^2A^2_{m+1}}.$$

De plus, en concevant, que A_m, A_{m+1}, D_m, D_{m+1} soient des fonctions déterminées d'après les suppositions faites ci-dessus, on disposera de A_{m+2} et D_{m+2} de manière qu'on ait

$$A_{m+2}\,A_m=A^2_{m+1}-P^2_xD^2_{m+1},$$

$$D_{m+2}\,D_m=D^2_{m+1}-c^2P^2_xA^2_{m+1}.$$

Dans le cas, où m désigne un nombre pair, $m+1$ sera impair: donc A^2_{m+1} et D^2_{m+1} représenteront des fonctions entières par rapport à P^2_x du degré $(m+1)^2$ et $(m+1)^2-1$; d'où il suit, en vertu des équations précédentes, que $A_{m+2}\,A_m$ et $D_{m+2}\,D_m$ seront des fonctions entiéres par rapport à P^2_x du degré $(m+1)^2$ et $(m+1)^2+1$, ou $A^2_{m+2}\,A^2_m$ et $D^2_{m+2}\,D^2_m$ du degré $2(m+1)^2$ et $2(m+1)^2+2$. Or, dans ce cas A^2_m et D^2_m étant du degré m^2-1 et m^2, il s'en suit que A^2_{m+2} sera du degré

$$2(m+1)^2-(m^2-1)=(m+2)^2-1$$

et D^2_{m+2} du degré

$$2(m+1)^2+2-m^2=(m+2)^2.$$

Dans l'autre cas, où m designe un nombre impair, $m+1$ sera pair, et par suite A^2_{m+1} et D^2_{m+1} seront du degré $(m+1)^2-1$ et $(m+1)^2$, puis $A_{m+2}A_m$ et $D_{m+2}D_m$ du degré $(m+1)^2+1$ et $(m+1)^2$, ou $A^2_{m+2}\,A^2_m$ et $D^2_{m+2}\,D^2_m$ du degré $2(m+1)^2+2$ et $2(m+1)^2$. Or, dans ce cas A^2_m et D^2_m étant du degré m^2 et m^2-1, il s'en suit que A^2_{m+2} sera du degré $(m+2)^2$ et D^2_{m+2} du degré $(m+2)^2-1$.

On voit que dans l'un et l'autre cas A^2_{m+2} et D^2_{m+2} seront des fonctions entières par rapport à P^2_x, et que leur degré se déduit de celui de A^2_m et D^2_m en changeant m en $m+2$. D'après

Digitized by Google

ce qu'on vient de dire les suppositions faites subsisteront par conséquent pour tout nombre entier et positif n.

On satisfera donc à l'équation

$$P_{nx}=\frac{A_n}{D_n},$$

en désignant par A^2_n et D^2_n des fonctions entières par rapport à P^2_x du degré n^2-1 et n^2, lorsque n est pair, et du degré n^2 et n^2-1, lorsque n est impair.

Plus généralement, l'expression

$$\frac{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{ny}}}{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{nz}}},$$

en supposant y et z indépendantes de x, pourra être représentée par le rapport de deux fonctions entières de P^2_x du degré n^2; de manière que, si pour abréger on fait

$$(12)\qquad \overset{n}{\Pi}_p f_p=\overset{p=n}{\underset{p=0}{\Pi}} f_p=f_0 f_1 f_2 \dots f_{n-1},$$

on aura

$$(13)\qquad \frac{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{ny}}}{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{nz}}}=\overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \frac{1-\frac{P_x^2}{M^2_{p,q}}}{1-\frac{P^2_x}{N^2_{p,q}}};$$

donc il restera à trouver les racines $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$, pour que la relation entre P_{nx} et P_x soit entièrement déterminée.

Rappelons nous pour cela les formules (10) et (12) du §. III., savoir:

$$(14)\qquad \begin{cases} P_{x+\varrho}=\frac{1}{c}\frac{1}{P_x}, & Q_{x+\varrho}=\frac{1}{ci}\frac{R_x}{P_x}, & R_{x+\varrho}=\frac{1}{i}\frac{Q_x}{P_x}, \\ P_{x+\sigma}=\frac{1}{c}\frac{R_x}{Q_x}, & Q_{x+\sigma}=\frac{b}{ci}\frac{1}{Q_x}, & R_{x+\sigma}=bi\frac{P_x}{Q_x}, \\ P_{x+\tau}=\frac{Q_x}{R_x}, & Q_{x+\tau}=-b\frac{P_x}{R_x}, & R_{x+\tau}=i\frac{1}{R_x}; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

Digitized by Google

$$(15)\quad \begin{cases} P_{x+2\rho} = P_x, & Q_{x+2\rho} = -Q_x, & R_{x+2\rho} = -R_x, \\ P_{x+2\sigma} = -P_x, & Q_{x+2\sigma} = Q_x, & R_{x+2\sigma} = -R_x, \\ P_{x+2\tau} = -P_x, & Q_{x+2\tau} = -Q_x, & R_{x+2\tau} = R_x. \end{cases}$$

La fonction P_x^2 restera donc la même, lorsque x se change en $x+2\rho$, ou en $x+2\sigma$, ou en $x+2\tau$, et, par suite, il en sera de même, lorsque x se change en $x+2p\rho+2q\sigma+2r\tau$, p, q, r étant des nombres entiers.

Maintenant le premier membre de l'équation (13) s'évanouira pour $x=y$; d'où il suit que P_y^2 sera une racine du second membre. Mais le premier membre restera le même, lorsque ny se change en

$$ny + 2p\rho + 2q\sigma + 2r\tau,$$

ou y en

$$y + \frac{2p}{n}\rho + \frac{2q}{n}\sigma + \frac{2r}{n}\tau;$$

donc les autres racines du second membre seront comprises dans l'expression

$$P^2_{y+\frac{2p}{n}\rho+\frac{2q}{n}\sigma+\frac{2r}{n}\tau},$$

ou, simplement,

$$P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\rho},$$

puisqu'on a

$$(16)\qquad \sigma = \tau + \rho.$$

Ajoutons que, pour avoir les racines distinctes, il suffira d'attribuer à p et q successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$, puisque tout autre nombre donnera, en vertu des formules (15), des racines égales aux précédentes. On pourra donc poser

$$M^2_{p,q} = P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\rho}.$$

On trouvera pareillement $N_{p,q}$, en permutant y et z, en sorte qu'on ait

$$N^2_{p,q} = P^2_{z+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\rho}.$$

L'équation (13) se réduira par conséquent à

Digitized by Google

$$(17)\qquad \frac{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{ny}}}{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{nz}}} = \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}}{1-\frac{P^2_x}{P^2_{z+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}}.$$

Remarquons encore que, lorsque la fonction $f_{p,q}$ jouit de la proprieté de rester la même si q se change en $q+n$, on aura

$$(18)\qquad \overset{n}{\Pi}_q f_{p,q} = \overset{n}{\Pi}_q f_{p,q+r}$$

pour tout nombre entier r, et par suite aussi si $r=p$. Donc on aura

$$(19)\qquad \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q f_{p,q} = \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q f_{p,p+q};$$

ce qui permet de substituer à la formule (17), en ayant égard aux équations (15) et (16),

$$(20)\qquad \frac{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{ny}}}{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{nz}}} = \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\varrho+\frac{2q}{n}\sigma}}}{1-\frac{P^2_x}{P^2_{z+\frac{2p}{n}\varrho+\frac{2q}{n}\sigma}}} = \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\sigma+\frac{2q}{n}\tau}}}{1-\frac{P^2_x}{P^2_{z+\frac{2p}{n}\sigma+\frac{2q}{n}\tau}}}.$$

En faisant $z=\frac{1}{n}\varrho$, et observant que $\frac{1}{P_\varrho}=0$, on déduit de la formule (17)

$$1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{ny}} = \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}}{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q+1}{n}\varrho}}}.$$

Puis, en faisant successivement

$$y=\varepsilon=0,\quad y=\frac{1}{n}\tau,\quad y=\frac{1}{n}\sigma,$$

en observant que

$$P_0=0,\quad P_\tau=1,\quad P_\sigma=\frac{1}{c},\quad 1-P^2_x=Q^2_x,\quad 1-c^2P^2_x=R^2_x,$$

et posant

Digitized by Google

$$(22)\quad \begin{cases} A^2{}_n = P^2{}_{n\varepsilon}\, \overset{n}{\Pi}_p\, \overset{n}{\Pi}_q \left\{1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varepsilon+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}\right\}, \\ B^2{}_n = \overset{n}{\Pi}_p\, \overset{n}{\Pi}_q \left\{1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}\right\}, \\ C^2{}_n = \overset{n}{\Pi}_p\, \overset{n}{\Pi}_q \left\{1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau+\frac{2q+1}{n}\varrho}}\right\}, \\ D^2{}_n = \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \left\{1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q+1}{n}\varrho}}\right\}, \end{cases}$$

il viendra

$$P^2{}_{nx} = \frac{A^2{}_n}{D^2{}_n}, \quad Q^2{}_{nx} = \frac{B^2{}_n}{D^2{}_n}, \quad R^2{}_{nx} = \frac{C^2{}_n}{D^2{}_n},$$

ou bien

$$(23)\qquad P_{nx} = \frac{A_n}{D_n}, \quad Q_{nx} = \frac{B_n}{D_n}, \quad R_{nx} = \frac{C_n}{D_n},$$

en supposant que A_n, B_n, C_n, D_n se réduisent à $n\varepsilon$, 1, 1, 1 pour $x = \varepsilon = 0$.

§. VI. Transformation du module.

On a trouvé dans le §. précédent que l'expression

$$\frac{1 - \dfrac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{ny}}}{1 - \dfrac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{nz}}},$$

en supposant y et z indépendantes de x, pourra être représentée par le rapport de deux fonctions entières de $P^2{}_x$ du degré n^2. On obtient un autre énoncé de ce théorème, en posant, que cette expression pourra être représentée par le rapport de deux fonctions entières de $\varphi_x{}^2$ du degré n, $\varphi_x{}^2$ étant elle-même le rapport de deux fonctions entières de $P_x{}^2$ du degré n.

En approfondissant ce résultat on sera conduit à considérer la fonction φ_x déterminée par l'équation

$$(1)\qquad \varphi_x = \overset{n}{\Pi}_p P_{x+\frac{2p}{n}\tau}$$

Digitized by Google

ayant posé, comme ci-dessus,

$$(2) \qquad \overset{n}{\Pi}_p f_p = \overset{p=n}{\underset{p=0}{\Pi}} f_p = f_0 f_1 f_2 \ldots f_{n-1} .$$

On aura par suite

$$\varphi_x = P_x P_{x+\frac{2}{n}\tau} P_{x+\frac{4}{n}\tau} \ldots P_{x+\frac{2(n-1)}{n}\tau}$$

et

$$\varphi_{x+\frac{2}{n}\tau} = P_{x+\frac{2}{n}\tau} P_{x+\frac{4}{n}\tau} P_{x+\frac{6}{n}\tau} \ldots P_{x+\frac{2n}{n}\tau} ;$$

mais on a, (15), §. V.

$$(3) \qquad P_{x+2\tau} = -P_x :$$

donc il suivra

$$(4) \qquad \varphi_{x+\frac{2}{n}\tau} = -\varphi_x .$$

Puis, comme de l'équation (2) on tire

$$\overset{n}{\Pi}_p f_p = f_0 \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} f_p$$

et

$$\overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} f_p = \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} f_{n-p} ,$$

on déduit de l'équation (1), non seulement

$$\varphi_x = P_x \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} P_{x+\frac{2p}{n}\tau} ,$$

mais encore

$$\varphi_x = P_x \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} P_{x+\frac{2(n-p)}{n}\tau} ,$$

ou, suivant la formule (3),

$$\varphi_x = P_x \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} \left\{ -P_{x-\frac{2p}{n}\tau} \right\} .$$

Il viendra par suite

$$\varphi^2 x = P^2 x \prod_{p=1}^{p=n} \left\{ -P_{x+\frac{2p}{n}\tau} P_{x-\frac{2p}{n}\tau} \right\},$$

ou, en vertu de la formule (19), §. III.

$$(5) \qquad \varphi^2 x = P^2 x \prod_{p=1}^{p=n} P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau} \frac{1-\frac{P^2 x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\frac{P^2 x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}}.$$

La fonction $\varphi^2 x$ représentera donc une fonction fractionnaire par rapport à $P^2 x$, dont le numerateur sera du degré n et le dénominateur du degré $n-1$. On pourra dire autant de l'expression

$$1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2 y},$$

dont le dénominateur sera le même que celui de $\varphi^2 x$; et, comme cette expression s'évanouit évidemment pour $x=y$, il en sera de même pour $x=y+\frac{2p}{n}\tau$, en vertu de la relation (4); de sorte qu'on aura

$$(6) \qquad 1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2 y} = \prod_{p}^{n} \frac{1-\frac{P^2 x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\frac{P^2 x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

d'où

$$\frac{1-\frac{\varphi x^2}{\varphi y^2}}{1-\frac{\varphi x^2}{\varphi z^2}} = \prod_{p}^{n} \frac{1-\frac{P^2 x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\frac{P^2 x}{P^2{}_{z+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

puis

$$\prod_{q}^{n} \frac{1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2{}_{y+\frac{2q}{n}\varrho}}}{1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2{}_{z+\frac{2q}{n}\varrho}}} = \prod_{q}^{n} \prod_{p}^{n} \frac{1-\frac{P^2 x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2p}{n}\varrho}}}{1-\frac{P^2 x}{P^2{}_{z+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}},$$

Digitized by Google

ou, suivant la formule (20), §. V.

$$(7)\qquad \frac{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{ny}}}{1-\frac{P^2_{nz}}{P^2_{nz}}} = \overset{n}{\Pi}_q \frac{1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2 y+\frac{2q}{n}\varrho}}{1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2 z+\frac{2q}{n}\varrho}}.$$

Voici la formule par laquelle l'expression dans le premier membre sera réduite à une fonction fractionnaire de $\varphi^2 x$ du degré n, $\varphi^2 x$ étant elle-même une fonction fractionnaire de $P^2 x$ du degré n. Il sera parsuite intéressant d'entrer en détail sur la nature de la fonction φx.

En différentiant par rapport à x les deux membres de l'équation (5) on prouvera, que $\left\{\frac{\partial_x \varphi x}{\varphi x}\right\}^2$ représentera une fonction fractionnaire par rapport à $P^2 x$, dont on déterminera les racines à l'aide de l'équation (6), en divisant les deux membres par $y-x$, et en posant $y=x$. Toutefois il sera à preférer de parvenir à l'expression cherchée de $\partial_x \varphi x$ par une méthode directe, surtout, puisqu'elle exige la connaissance de quelques formules remarquables, que nous allons établir.

D'abord on a

$$(P^2_{x+y}-P^2_y)(P^2_{x-y}-P^2_y)=P^2_{x+y}P^2_{x-y}-P^2_y(P^2_{x+y}+P^2_{x-y})+P^4_y;$$

et, comme des formules (1), (3) du §. V. on deduit

$$P^2_{x+y}+P^2_{x-y}=2\,\frac{P^2_x Q^2_y R^2_y + P^2_y Q^2_x R^2_x}{(1-c^2 P^2_x P^2_y)^2},$$

et des formules (18) du §. III.

$$P^2_{x+y}P^2_{x-y}=\frac{(P^2_x-P^2_y)^2}{(1-c^2P^2_xP^2_y)^2},$$

il viendra

$$(P^2_{x+y}-P^2_y)(P^2_{x-y}-P^2_y)$$
$$=\frac{1}{(1-c^2P^2_xP^2_y)^2}\{(P^2_x-P^2_y)^2-2P^2_y(P^2_xQ^2_yR^2_y+P^2_yQ^2_xR^2_x)$$
$$+P^4_y(1-c^2P^2_xP^2_y)^2\};$$

puis, ayant égard à l'equation

$$Q^2_xR^2_x=1-(1+c^2)P^2_x+c^2P^4_x,$$

il s'en suivra

Digitized by Google

$$(1-c^2P^2{}_xP^2{}_y)^2(P^2{}_{x+y}-P^2{}_y)(P^2{}_{x-y}-P^2{}_y)$$

$$= P^4{}_y - 2P^2{}_yP^2{}_x + P^4{}_x$$
$$-2P_y{}^2Q_y{}^2R_y{}^2P_x{}^2$$
$$-2P^4{}_y + 2(1+c^2)P^4{}_yP^2{}_x - 2c^2P^4{}_yP^4{}_x$$
$$+ P^4{}_y - 2c^2P^6{}_yP^2{}_x + c^4P^8{}_yP^4{}_x$$

$$= -2P^2{}_xP^2{}_y\{Q^2{}_yR^2{}_y + 1 - (1+c^2)P^2{}_y + c^2P^4{}_y\}$$
$$+ P^4{}_x\{1 - 2c^2P^4{}_y + c^4P^8{}_y\}$$

$$= -4P^2{}_xP^2{}_yQ^2{}_yR^2{}_y + P^4{}_x(1-c^2P^4{}_y)^2$$

$$= -4P^2{}_xP^2{}_yQ^2{}_yR^2{}_y\{1 - \left(\frac{1-c^2P^4{}_y}{2P_yQ_yR_y}\right) P^2{}_x\};$$

d'où, en vertu des formules (6) et (14), §. V.

$$(8) \qquad \left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\varrho}}\right)(P^2{}_{x+y}-P^2{}_y)(P^2{}_{x-y}-P^2{}_y)$$
$$= -4P^2{}_xP^2{}_yQ^2{}_yR^2{}_y\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{2y}}\right)$$

Ensuite on déduit des formules (1) et (3) du §. V.

$$P^2{}_{x+y}-P^2{}_{x-y} = 4\frac{P_xP_yQ_xQ_yR_xR_y}{(1-c^2P^2{}_xP^2{}_y)^2},$$

d'où

$$P^2{}_{x+2y}-P^2{}_x = 4P_yQ_yR_y\frac{P_{x+y}Q_{x+y}R_{x+y}}{(1-c^2P^2{}_{x+y}P^2{}_y)^2},$$

$$P^2{}_{x-2y}-P^2{}_x = -4P_yQ_yR_y\frac{P_{x-y}Q_{x-y}R_{x-y}}{(1-c^2P^2{}_{x-y}P^2{}_y)^2},$$

et par suite

$$\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{x-2y}}\right)$$

$$= -16P^2{}_yQ^2{}_yR^2{}_y\frac{P_{x+y}P_{x-y}Q_{x+y}Q_{x-y}R_{x+y}R_{x-y}}{P^2{}_{x+2y}P^2{}_{x-2y}(1-c^2P^2{}_{x+y}P^2{}_y)^2(1-c^2P^2{}_{x-y}P^2{}_y)^2}$$

Mais de l'équation

$$P_{x+y}P_{x-y} = \frac{P^2{}_x-P^2{}_y}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_y}$$

on tire

$$P_{x+2y}P_x = \frac{P^2{}_{x+y}-P^2{}_y}{1-c^2P^2{}_{x+y}P^2{}_y},$$

Digitized by Google

$$P_{x-2y}P_x = \frac{P^2_{x-y} - P^2_y}{1 - c^2 P^2_{x-y} P^2_y},$$

puis

$$P_{x+2y}\,P_{x-2y}(1-c^2P^2_{x+y}P^2_y)(1-c^2P^2_{x-y}P^2_y) = \frac{(P^2_{x+y}-P^2_y)(P^2_{x-y}-P^2_y)}{P^2_x},$$

ce qui changera l'équation précédente en

$$\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x-2y}}\right) = -16P^4_x P^2_y Q^2_y R^2_y \frac{P_{x+y}P_{x-y}Q_{x+y}Q_{x-y}R_{x+y}R_{x-y}}{(P^2_{x+y}-P^2_y{}^2)^2(P^2_{x-y}-P^2_y)^2}.$$

Au moyen de la formule (8) on en déduit

$$\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{2y}}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x-2y}}\right) = -\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{y+\varrho}}\right)^4 \frac{P_{x+y}P_{x-y}}{P^2_y}\,\frac{Q_{x+y}Q_{x-y}}{Q^2_y}\,\frac{R_{x+y}R_{x-y}}{R^2_y},$$

ou, suivant les formules (19) du §. III.,

(9)
$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{2y}}\right)^2\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{x+2y}}\right)\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{x-2y}}\right) \\ = \left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_y}\right)\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{y+\varrho}}\right)\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{y+\sigma}}\right)\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{y+\tau}}\right).\end{cases}$$

Cette formule conduit à une semblable pour la fonction φx. En effet, comme on a $P^2_x = P^2_{-x}$, et parsuite, en vertu de l'équation (5), $\varphi^2 x = \varphi^2 {-x}$, on déduit de l'équation (6), non seulement

$$1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2 x+2y} = \prod_{\rho}^{n} \frac{1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{x+2y+\frac{2p_1}{n}}}}{1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

mais encore

Digitized by Google

$$1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{x-2y}}=\overset{n}{\Pi}_p\,\frac{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{x-2y-\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}}.$$

Si donc, pour abréger, on pose

$$(10)\qquad \Phi=\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{2y}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{x-2y}}\right),$$

il viendra

$$\Phi=\overset{n}{\Pi}_p\,\frac{\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{2y+\frac{2p}{n}\tau}}\right)^2\left(1-\dfrac{P_x{}^2}{P^2{}_{x+2y+\frac{2p}{n}\tau}}\right)\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{x-2y-\frac{2p}{n}\tau}}\right)}{\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)^4},$$

ou suivant la formule (9),

$$\Phi=\overset{n}{\Pi}_p\,\frac{\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{p}{n}\tau}}\right)\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P_2{}_{y+\varrho+\frac{p}{n}\tau}}\right)\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\sigma+\frac{p}{n}\tau}}\right)\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\tau+\frac{p}{n}\tau}}\right)}{\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)^4}.$$

Puis, ayant égard à l'équation (11), §. III., savoir

$$\sigma=\varrho+\tau,$$

on aura

$$P_{y+\tau+\frac{p}{n}\tau}=P_{y+\frac{n+p}{n}\tau},\quad P_{y+\sigma+\frac{p}{n}\tau}=P_{y+\varrho+\frac{n+p}{n}\tau};$$

ce qui change la précédente en

$$\Phi=\overset{n}{\Pi}_p\,\frac{\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{p}{n}\tau}}\right)\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{n+p}{n}\tau}}\right)\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\varrho+\frac{p}{n}\tau}}\right)\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\varrho+\frac{n+p}{n}\tau}}\right)}{\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)^4}.$$

Mais on a, en général,

Digitized by Google

$$\overset{n}{\Pi}_\varrho f_p f_{n+p} = f_0 f_1 f_2 \cdots f_n f_{n+1} \cdots f_{2n-1} = \overset{n}{\Pi}_p f_{2p} f_{2p+1} :$$

donc on pourra substituer à la précedente

$$\Phi = \overset{n}{\Pi}_p \frac{\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}r}}\right)\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{r}{n}+\frac{2p}{n}r}}\right)\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\varrho+\frac{2p}{n}r}}\right)\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\varrho+\frac{r}{n}+\frac{2p}{n}r}}\right)}{\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}r}}\right)^4}$$

ou enfin, suivant les équations (6) et (18),

$$(11)\begin{cases}\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{2y}}\right)^2\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{x-2y}}\right) \\ =\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_y}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{y+\frac{r}{n}}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{y+\varrho}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{y+\varrho+\frac{r}{n}}}\right).\end{cases}$$

Cette formule étant établie, il ne sera pas difficile de trouver l'expression cherchée de $\partial_x \varphi_x$. Pour y parvenir il suffira de la mettre sous la forme

$$\left(\frac{\varphi^2{}_{2y}-\varphi^2{}_x}{\varphi_{x+2y}\,\varphi_{x-2y}}\right)^2\left(\frac{\varphi^2{}_{x+2y}-\varphi^2{}_x}{2y}\right)\left(\frac{\varphi^2{}_{x-2y}-\varphi^2{}_x}{-2y}\right)$$

$$=-\left(\frac{\varphi_{2y}}{2y}\right)^2\left(\frac{\varphi_{2y}}{\varphi_y}\right)^2(\varphi^2{}_y-\varphi^2{}_x)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{y+\frac{r}{n}}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{y+\varrho}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{y+\varrho+\frac{r}{n}}}\right),$$

et de poser $y=\varepsilon=0$. En effet, comme on a

$$\frac{\varphi^2{}_{x+2\varepsilon}-\varphi^2{}_x}{2\varepsilon}=\frac{\varphi^2{}_{x-2\varepsilon}-\varphi^2{}_x}{-2\varepsilon}=\partial_x\varphi^2{}_x=2\varphi_x\partial_x\varphi_x,$$

on touvera

$$4\varphi^2{}_x(\partial_x\varphi_x)^2=\left(\frac{\varphi_{2\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\varphi_{2\varepsilon}}{\varphi\varepsilon}\right)^2\varphi^2{}_x\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{\frac{r}{n}}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_\varrho}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{\varrho+\frac{r}{n}}}\right);$$

puis, en posant

$$(12)\qquad H=\frac{\varphi_\varepsilon}{\varepsilon},$$

d'où aussi

Digitized by Google

$$H=\frac{\varphi_{2\varepsilon}}{2\varepsilon},$$

et observant qu'il suit de l'équation (1)

$$\frac{1}{\varphi_\varrho}=0,$$

à cause de

$$\frac{1}{P_\varrho}=0,$$

la précédente se réduira à

$$(\partial_x\varphi_x)^2=H^2\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{\frac{1}{n}}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{\varrho+\frac{1}{n}}}\right).$$

Maintenant soient

$$(13)\qquad v'^2=1-\frac{\varphi_x{}^2}{\varphi^2{}_{\frac{1}{n}}},\quad w'^2=1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{\varrho+\frac{1}{n}}},$$

et fixons la détermination de v', w' en ajoutant, que v' et w' se réduisent à 1 pour $x=0$, ce qui donne $\varphi_x=0$; alors, en observant, qu'on tire de l'quation (12)

$$H=\partial_t\varphi_t,$$

on aura, non seulement

$$(\partial_x\varphi_x{}^2)=H^2v'^2w'^2,$$

mais encore

$$(14)\qquad \partial_x\varphi_x=Hv'w'.$$

Soient de plus

$$(15)\qquad K=\varphi_{\frac{1}{n}},\quad k=\frac{\varphi_{\frac{1}{n}}}{\varphi_{\varrho+\frac{1}{n}}},$$

d'où

$$\varphi_{\varrho+\frac{1}{n}}=\frac{K}{k};$$

les équations (13) se réduiront à

Digitized by Google

$$v'^2 = 1 - \frac{\varphi^2{}_x}{K^2}, \quad w'^2 = 1 - k^2 \frac{\varphi^2{}_x}{K^2};$$

et en faisant

$$u' = \frac{\varphi_x}{K}, \tag{16}$$

on aura

$$v'^2 = 1 - u'^2, \quad w'^2 = 1 - k^2 u'^2, \tag{17}$$

tandis que l'équation (14) se changera en

$$\partial_x u' = \frac{H}{K} v' w'.$$

Si ensuite on désigne par ω une fonction de x determinée par l'équation

$$\omega = \frac{H}{K} x,$$

ou par

$$\omega = \theta x. \tag{18}$$

ayant fait

$$\theta = \frac{H}{K}, \tag{19}$$

on obtiendra

$$\partial_\omega u' = v' w'.$$

En combinant celle-ci aux équations (17) on aura par conséquent

$$\partial_\omega u' = v' w', \ \partial_\omega v' = -w' u', \ \partial_\omega w' = -k^2 u' v',$$

tandis que u', v', w' sont liées à la condition de devenir 0, 1, 1 pour $x = 0$, ou, ce qui revient au même, pour $\omega = 0$. D'après la définition posée pour les fonctions circulaires du second ordre on aura donc

$$u' = P_{\omega,k}, \ v' = Q_{\omega,k}, \ w' = R_{\omega,k},$$

ou, suivant l'équation (18):

$$u' = P_{\theta x,k}, \quad v' = Q_{\theta x,k}, \quad w' = R_{\theta x,k}.$$

En vertu de l'équation (16) on a par suite

$$\varphi_x = K P_{\theta x,k}; \tag{20}$$

Digitized by Google

et on voit que la fonction fractionnaire par rapport à P^2_x, désignée par φ_x et introduite dans le commencement de ce paragraphe, sera elle-même proportionelle à une fonction circulaire du second ordre.

En eliminant φ_x des équations (1), (6), (7), (12) et (15), à l'aide de la précédente, on trouvera

(21) $$P_{\theta x,k} = \frac{1}{K} \overset{n}{\Pi}_p P_{x+\frac{2p}{n}\tau},$$

(22) $$1 - \frac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\theta y,k}} = \overset{n}{\Pi}_p \frac{1 - \frac{P^2_x}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1 - \frac{P^2_x}{P^2_{\rho+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

(23) $$\frac{1 - \frac{P^2_{nx}}{P^2_{ny}}}{1 - \frac{P^2_{ny}}{P^2_{nz}}} = \overset{n}{\Pi}_p \frac{1 - \frac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\theta(y+\frac{2p}{n}\rho),k.}}}{1 - \frac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\theta(z+\frac{2p}{n}\rho),k}}},$$

$$H = \frac{P_\varepsilon}{\varepsilon} \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} P_{\frac{2p}{n}\tau}$$

(24) $$K = \overset{n}{\Pi}_p P_{\frac{2p+1}{n}\tau},$$

$$k = \overset{n}{\Pi}_p \frac{P_{\frac{2p+1}{n}\tau}}{P_{\rho+\frac{2p+1}{n}\tau}}.$$

Puis, comme on a

$$\frac{P_\varepsilon}{\varepsilon} = \partial_\varepsilon P_\varepsilon = Q_0 R_0 = 1,$$

et

$$P_{\rho+\frac{2p+1}{n}\tau} = \frac{1}{cP_{\frac{2p+1}{n}\tau}},$$

il viendra

$$H = \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} P^2_{\frac{2p}{n}\tau},$$

$$k = \overset{n}{\Pi}_p c P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau} = c^n \overset{n}{\Pi}_p P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau} = c^n K^2;$$

Digitized by Google

donc, après avoir déterminé K et H par les équations (24) et (25), on trouvera k et θ, eu égard à l'équation (19), par les suivantes

$$k = c^n K^2, \quad \theta = \frac{H}{K}. \tag{26}$$

Il est bon d'observer que, la valeur de $P_{\frac{2p+1}{n}\tau}$ étant comprise entre 0 et 1, K sera inférieur à 1. On aura par suite $k < c^n$; et on voit que plus n sera grand plus k sera au dessous de c.

Remarquons qu'on tire de la formule (21)

$$P_{\theta\frac{\tau}{n},k} = \frac{1}{K}\prod_p^n P_{\frac{2p+1}{n}\tau},$$

$$P_{\theta(\varrho+\frac{\tau}{n}),k} = \frac{1}{K}\prod_p^n P_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau} = \frac{1}{c^n K}\prod_p^n P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau},$$

ou, selon les équations (24) et (26),

$$P_{\theta\frac{\tau}{n},k} = 1, \quad P_{\theta(\varrho+\frac{\tau}{n}),k} = \frac{1}{k}. \tag{27}$$

Si donc on fait successivement

$$y = \varepsilon = 0, \quad y = \frac{\tau}{n}, \quad y = \varrho + \frac{\tau}{n}$$

dans la formule (22), et qu'on pose, pour abréger,

$$\begin{cases} \mathfrak{A}^2{}_n = \theta^2 P^2{}_x \prod_{p=1}^{p=n}\left(1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}\right), \\ \mathfrak{B}^2{}_n = \prod_p^n \left(1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}}\right), \\ \mathfrak{C}^2{}_n = \prod_p^n \left(1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}}\right) = \prod_p^n \left(1 - c^2 P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau} P^2{}_x\right), \\ \mathfrak{D}^2{}_n = \prod_{p=1}^{p=n}\left(1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right) = \prod_{p=1}^{p=n}\left(1 - c^2 P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau} P^2{}_x\right), \end{cases} \tag{28}$$

on trouvera, en observant que

Digitized by Google

$$P_\varepsilon = \varepsilon,\ P_{\theta\varepsilon} = \theta\varepsilon,\ \frac{1}{P_\varrho} = 0.$$

$$P^2_{\theta x,k} = \frac{\mathfrak{A}^2_n}{\mathfrak{D}^2_n},\ Q^2_{\theta x,k} = \frac{\mathfrak{B}^2_n}{\mathfrak{D}^2_n},\ R^2_{\theta x,k} = \frac{\mathfrak{C}^2_n}{\mathfrak{D}^2_n},$$

ou bien

$$P_{\theta x,k} = \frac{\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{D}_n},\ Q_{\theta x,k} = \frac{\mathfrak{B}_n}{\mathfrak{D}_n},\ R_{\theta x,k} = \frac{\mathfrak{C}_n}{\mathfrak{D}_n}, \tag{29}$$

en supposant que $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$ se reduisent à $\theta\varepsilon$, 1, 1, 1 pour $x = \varepsilon = 0$.

Par ces formules on passe du module c à un module k inferieur à c. Il restera à reduire les seconds membres des équations (28) à des formes quarrées; mais pour cela il faut distinguer les cas où n sera pair et impair. C'est ce que nous ferons dans un autre mémoire.

Remarquons encore, qu'en attribuant à θx des valeurs positives, et en faisant varier θx depuis zéro par degrés insensibles, la valeur de $Q_{\theta x,k}$ restera positive, en vertu des principes établis dans le §. II., et elle ne s'evanouira que lorsque $\theta x = \tau_k$. De l'autre coté, il suit des formules (28) et (29), que la valeur de $Q_{\theta x,k}$ restera positive en faisant varier x depuis 0 jusqu'à $\frac{\tau}{n}$, valeur de x pour laquelle $Q_{\theta x,k}$ s'evanouit de méme. Les deux limites τ_k et $\theta\frac{\tau}{n}$ seront donc les mémes, et on aura

$$\theta\frac{\tau}{n} = \tau_k,$$

ou

$$\theta\tau_c = n\tau_k. \tag{30}$$

Pareillement, en attribuant à θx des valeurs imaginaires, et en faisant varier θx depuis 0 par degrés insensibles, la valeur de $Q_{\theta x,k}$ restera positive et ne deviendra égale à ∞ que lorsque $\theta x = \varrho_k$. De l'autre coté, il suit des formules (28) et (29), qu'en faisant passer x par l'imaginaire depuis 0 jusqu'à ϱ, la valeur de $Q_{\theta x,k}$ restera positive et n'atteindra l'infini que pour la valeur ϱ de x. Les deux limites ϱ_k et $\theta\varrho$ seront donc les mémes, et on aura

$$\theta\varrho = \varrho_k,$$

ou

$$\theta\varrho_c = \varrho_k. \tag{31}$$

Puis, en observant que $\sigma = \tau + \varrho$, on tire des équations (30) et (31)

$$(32) \qquad \theta\sigma_c = \varrho_k + n\tau_k, \qquad \sigma_k = \theta(\varrho_c + \frac{\tau_c}{n}),$$

et encore, par l'élimination de θ,

$$(33) \qquad \frac{\tau_c}{\varrho_c} = n\frac{\tau_k}{\varrho_k}, \quad \frac{\tau_c}{\tau_k} = n\frac{\varrho_c}{\varrho_k}.$$

Enfin, comme on a, suivant l'équation (5), §. II.,

$$\varrho_c = i\tau_b,$$

en déterminant b par les équations

$$(34) \qquad b = \overline{\omega}_c, \quad \overline{\omega}_u{}^2 = 1 - u^2, \quad \overline{\omega}_0 = 1,$$

on aura pareillement

$$\varrho_k = i\tau_h,$$

en déterminant h par l'équation

$$(35) \qquad h = \overline{\omega}_k :$$

donc il sera permis de substituer aux équations (31) et (33)

$$(36) \qquad \theta\tau_b = \tau_h, \quad \frac{\tau_c}{\tau_b} = n\frac{\tau_k}{\tau_h}, \quad \frac{\tau_c}{\tau_k} = n\frac{\tau_b}{\tau_h}.$$

Digitized by Google

XXXIV.

Auflösung der geometrischen Aufgabe: Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis so schneidet, dass die beiden gemeinschaftlichen Sehnen einer gegebenen Geraden gleich werden.

Von

Herrn Dr. J. R. Boyman,

Gymnasiallehrer zu Coblenz.

Es seien (Taf. IX. Fig. 1.) A und B die beiden gegebenen Punkte, $DEFG$ der gegebene Kreis, dessen Mittelpunkt C, und m die gegebene gerade Linie, welcher die gemeinschaftliche Sehne gleich werden soll.

Beschreibt man durch die gegebenen Punkte A und B einen beliebigen Kreis, welcher den gegebenen Kreis (C) in zwei Punkten D und E schneide, verbindet A mit B und D mit E, und verlängert AB und DE bis zu ihrem Durchschnittspunkt P, so ist nach einem bekannten Satze:

$$PA \times PB = PD \times PE \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zieht man nun von P eine beliebige Sekante PN durch den gegebenen Kreis, so ist ebenso

$$PN \times PM = PD \times PE \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$PA \times PB = PN \times PM \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Digitized by Google

Die Punkte M und N, in welchen die Sekante den gegebenen Kreis schneidet, liegen folglich mit den gegebenen Punkten A und B jedesmal auf einer Kreislinie.

Legt man nun eine Sehne $FG=m$ in den gegebenen Kreis, beschreibt ferner mit dem Abstande CH derselben vom Mittelpunkt einen Hülfskreis und zieht endlich an diesen Hülfskreis vom Punkte P aus die Tangenten PK und PK', welche den gegebenen Kreis in den Punkten M und N, resp. in den Punkten M' und N' schneiden, so sind $ABMN$ und $ABM'N'$ zwei Kreise (und zwar die einzigen) von der verlangten Eigenschaft, und die Durchschnittspunkte O und O' der in der Mitte von AB und MN, resp. von AB und $M'N'$, errichteten Senkrechten ihre Mittelpunkte.

Denn nach (3) liegen die Punkte A, B, M, N, so wie die Punkte A, B, M', N', je auf der Peripherie eines Kreises; auch ist die diesen Kreisen mit dem gegebenen Kreise gemeinschaftliche Sehne MN, resp. $M'N'$, wegen gleichen Abstandes vom Mittelpunkte, der Sehne FG, folglich der gegebenen Geraden m gleich.

Ist die Gerade, welcher die gemeinschaftliche Sehne gleich sein soll, dem Durchmesser des gegebenen Kreises selbst gleich, so ist ihr Mittelpunktsabstand $CH=0$, und statt des Hülfskreises und der beiden Tangenten an denselben hat man alsdann die Eine Sekante PS durch den Mittelpunkt C, und also auch nur den Einen Kreis $ABRS$, welcher den gegebenen Kreis (C) in R und S so schneidet, dass diese Durchschnittspunkte in demselben sich diametral gegenüberstehen. — Hiermit ist eine einfache Auflösung einer in dem Aufsatze Nr. VIII. Theil XV. behandelten Aufgabe gegeben, nämlich der von dem Herrn Herausgeber des Archivs gestellten Aufgabe:

„Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu zie-
„hen, der einen anderen gegebenen Kreis in den End-
„punkten desselben Durchmessers dieses gegebenen
„Kreises schneidet."

Wird die gegebene Gerade Null, so fällt obiger Hülfskreis mit dem gegebenen Kreise (C) zusammen, an welchen man nun die Tangenten PT und PT' zu ziehen hat, um als verlangten Kreis einen der Kreise ABT oder ABT' zu erhalten. — Dies ist aber die bekannte Aufgabe:

„Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen ge-
„gebenen Kreis von Aussen berührt und durch zwei
„ausserhalb desselben gegebene Punkte geht."

Digitized by Google

XXXV.

Neue Formeln zur independenten Bestimmung der Sekanten- und Tangentenkoeffizienten.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

zu Dresden.

Für jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x gelten bekanntlich die Gleichungen

$$\sec x = B_0 + \frac{B_2}{1.2}x^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4}x^4 + \ldots,$$

$$\tan x = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2}x + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}x^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2.3.4.5.6}x^5 + \ldots;$$

worin B_0, B_2, B_4, B_6 etc. die sogenannten Sekantenkoeffizienten, B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Setzen wir zu grösserer Gleichförmigkeit der Bezeichnung

$$1) \qquad B_{2n} = T_{2n}, \quad \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1} = T_{2n-1}$$

und nennen entsprechend T_1, T_3, T_5 etc. die Tangentenkoeffizienten, so ist jetzt für $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$

Digitized by Google

$$2) \quad \sec x = T_0 + \frac{T_2}{1.2} x^2 + \frac{T_4}{1.2.3.4} x^4 + \ldots,$$

$$3) \quad \tan x = \frac{T_1}{1} x + \frac{T_3}{1.2.3} x^3 + \frac{T_5}{1.2.3.4.5} x^5 + \ldots.$$

Die independente Bestimmung der Koeffizienten T_0, T_1, T_2, T_3 etc. verursacht bekanntlich einige Schwierigkeiten, die man nur durch Einführung imaginärer Grössen umgehen zu können glaubte, wobei das Problem zuletzt auf die Entwickelung der höheren Differentialquotienten von

$$\frac{z}{e^z - 1}$$

hinauskam (m. s. u. A. den Artikel Bernoullische Zahlen in den Supplementen zum mathematischen Wörterbuche.). Es lässt sich aber die Sache viel einfacher ohne imaginäre Grössen abmachen und man gewinnt dabei Formeln, welche sich vor den von Laplace, Scherk und mir selbst (in meiner Differenzialrechnung) mitgetheilten durch grössere Einfachheit auszeichnen.

I. Nach bekannten Lehren ist der Koeffizient T_2n nichts Anderes als der spezielle Werth, welchen der $(2n)$te Differenzialquotient von $\sec x$ für $x=0$ erhält, also nach Cauchy's Bezeichnung

$$4) \quad T_2n = (D^{2n} \sec x)_{(0)}.$$

Um diesen zu entwickeln bemerken wir, dass für $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$ die Gleichungen

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1.3}{2.4} \sin^4 x + \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin^6 x + \ldots.$$

statt finden, wobei wir die Reihe in zwei Theile zerlegen, nämlich:

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1.3}{2.4} \sin^4 x + \ldots. + \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots (2n)} \sin^{2n} x$$

$$+ \frac{1.3.5 \ldots (2n+1)}{2.4.6 \ldots (2n+2)} \sin^{2n+2} x + \ldots.$$

Denkt man sich im zweiten Theile für $\sin x$ die bekannte Reihe $x - \frac{1}{6} x^3 +$ etc. gesetzt und die Potenzirungen ausgeführt, so

Digitized by Google

würde eine Reihe zum Vorschein kommen, welche mit der $(2n+2)$ten Potenz von x anfinge und überhaupt von der Form wäre

$$K_0 x^{2n+2} + K_2 x^{2n+4} + K_4 x^{2n+6} + \ldots\ldots,$$

wobei es auf die Werthe von K_0, K_2, etc. nicht weiter ankommt. Wenn die nunmehrige Gleichung

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 x + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\sin^{2n} x + K_0 x^{2n+2} + K_2 x^{2n+4} + K_4 x^{2n+6} + \ldots$$

$(2n)$mal differenzirt und nach geschehener Differenziation $x=0$ gesetzt wird, so verschwindet der zweite Theil, und da links T_{2n} zum Vorschein kommt, so ist jetzt

$$5)\quad T_{2n} = \frac{1}{2}(D^{2n}\sin^2 x)_{(0)} + \frac{1.3}{2.4}(D^{2n}\sin^4 x)_{(0)} + \ldots\ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(D^{2n}\sin^{2n} x)_{(0)}.$$

Zur Ausführung der hier angedeuteten Differenziationen dient die bekannte für jedes ganze positive k geltende Formel

$$6)\quad \sin^{2k} x = \frac{1}{2^{2k-1}}\left[\frac{1}{2}(2k)_k - (2k)_{k-1}\cos 2x + (2k)_{k-2}\cos 4x - \ldots\right]$$

in welcher die bekannte Bezeichnungsweise der Binomialkoeffizienten

$$m_i = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-i-1)}{1.2.3\ldots i}$$

angewendet worden ist. Man hat nun bekanntlich

$$D^{2n}\cos\mu x = (-1)^n \mu^{2n}\cos\mu x,$$

folglich

$$(D^{2n}\cos\mu x)_{(0)} = (-1)^n \mu^{2n},$$

mithin durch $(2n)$malige Differenziation der Gleichung 6) für $x=0$

$$(D^{2n}\sin^{2k} x)_{(0)} = \frac{(-1)^n}{2^{2k-1}}[-(2k)_{k-1}2^{2n} + (2k)_{k-2}4^{2n} - (2k)_{k-3}6^{2n} + \ldots.].$$

Wendet man diess auf die Gleichung 5) für $k=1, 2, 3, \ldots n$ an, so ist durch nachherige Multiplication mit $(-1)^{n+1}$

Digitized by Google

$$7)\quad (-1)^{n+1}T_{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2_0.2^{2n}]$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^3}[4_1.2^{2n}-4_0.4^{2n}]$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^5}[6_2.2^{2n}-6_1.4^{2n}+6_0.6^{2n}]$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}[(2n)_{n-1}.2^{2n}-(2n)_{n-2}.4^{2n}+-.\pm(2n)_0(2n)^{2n}].$$

Für $n=0$ darf man diese Formel nicht benutzen, weil ihre Herleitung voraussetzt, dass wenigstens eine Differenziation gemacht worden ist. Aus Nr. 2) folgt aber für $x=0$ unmittelbar $T_0=1$, und nun hat man weiter T_2, T_4, T_6 etc. nach der obigen Formel; z. B. für $n=3$

$$T_6=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2^6]$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^3}[4.2^6-4^6]$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^5}[15.2^6-6.4^6+6^6]$$
$$=16-180+225=61.$$

II. Eine ganz ähnliche Rechnung dient zur Bestimmung von

$$8)\qquad T_{2n-1}=(D^{2n-1}\tan x)_{(0)}.$$

Man hat nämlich zunächst für $\frac{1}{2}\pi>x>-\frac{1}{2}\pi$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$
$$=\sin x+\frac{1}{2}\sin^3 x+\frac{1.3}{2.4}\sin^5 x+\ .....,$$

wobei wiederum die Reihe in zwei Theile zerlegt werden möge, nämlich

$$\tan x=\sin x+\frac{1}{2}\sin^3 x+\frac{1.3}{2.4}\sin^5 x+...+\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}\sin^{2n-1}x$$
$$+\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\sin^{2n+1}x+....$$

Denkt man sich im zweiten Theile für $\sin x$ seinen Werth gesetzt, so erhält man eine Reihe, welche mit der $(2n+1)$ten Potenz von x anfängt, und daher ist auch

Digitized by Google

$$\tan x = \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^5 x + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\sin^{2n-1}x$$
$$+ K_1 x^{2n+1} + K_3 x^{2n+3} + K_5 x^{2n+5} + \ldots,$$

wobei es auf die Werthe der mit K bezeichneten Koeffizienten nicht weiter ankommt. Durch $(2n-1)$malige Differenziation und Nullifizirung von x wird jetzt, da der zweite Theil verschwindet,

$$9)\; T_{2n-1} = (D^{2n-1}\sin x)_{(0)} + \frac{1}{2}(D^{2n-1}\sin^3 x)_{(0)} + \frac{1.3}{2.4}(D^{2n-1}\sin^5 x)_{(0)}$$
$$+ \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}(D^{2n-1}\sin^{2n-1}x)_{(0)}.$$

Andererseits ist nach einer bekannten Formel

$$\sin^{2k-1}x = \frac{1}{2^{2k-2}}[(2k-1)_{k-1}\sin x - (2k-1)_{k-3}\sin 3x + \ldots],$$

woraus man, unter Rücksicht auf die Gleichungen

$$D^{2n-1}\sin\mu x = (-1)^{n+1}\mu^{2n-1}\cos\mu x,$$
$$(D^{2n-1}\sin\mu x)_{(0)} = (-1)^{n+1}\mu^{2n-1},$$

leicht die folgende ableitet:

$$(D^{2n-1}\sin^{2k-1}x)_{(0)}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2k-2}}[(2k-1)_{k-1}.1^{2n-1} - (2k-1)_{k-3}.3^{2n-1} + (2k-1)_{k-5}.5^{2n-1} - \ldots].$$

Demzufolge geht die Formel 9) in die nachstehende über:

$$10)\quad (-1)^{n+1}T_{2n-1} = 1_0.1^{2n-1}$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}[3_1.1^{2n-1} - 3_0.3^{2n-1}]$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^4}[5_2.1^{2n-1} - 5_1.3^{2n-1} + 5_0.5^{2n-1}]$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}[(2n-1)_{n-1}.1^{2n-1} - (2n-1)_{n-3}.3^{2n-1}$$
$$+ \ldots \pm (2n-1)_0.(2n-1)^{2n-1}],$$

welche der unter Nro. 7) verzeichneten völlig analog gebildet ist; man erhält aus ihr für $n=1, 2, 3, 4$ etc.

$$T_1 = 1,\quad T_3 = 2,\quad T_5 = 16,\quad T_7 = 272, \ldots.$$

Hieraus lassen sich auch rückwärts die Bernoullischen Zahlen ableiten, wenn man der zweiten Gleichung in Nro. 1) die Form

Digitized by Google

$$B_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\, T_{2n-1}$$

giebt; so findet sich ohne Mühe:

$$B_1 = \frac{2}{4.3}\cdot 1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{4}{16.15}\cdot 2 = \frac{1}{30},$$

$$B_5 = \frac{6}{64.63}\cdot 16 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = \frac{8}{256.255}\cdot 272 = \frac{1}{30}, \text{ etc.}$$

III. Um endlich eine Formel zu erhalten, welche T_{2n} und T_{2n-1} zugleich angiebt, bemerken wir, dass die Gleichung

$$\sec x + \tan x = \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)$$

$$= T_0 + \frac{T_1}{1}x + \frac{T_2}{1.2}x^2 + \frac{T_3}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

statt findet, und demnach für ein ganzes positives m

$$11) \qquad T_m = \{D^m \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\}_{(0)}$$

sein muss. Man hat nun weiter für $x < \frac{1}{2}\pi$

$$\tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) = \frac{\cos x}{1-\sin x}$$

$$= \cos x + \sin x\cos x + \sin^2 x\cos x + \ldots. + \sin^m x\cos x$$
$$+ \sin^{m+1}x\cos x + \sin^{m+2}x\cos x + \ldots..,$$

oder, wenn man in dem zweiten Theile der Reihe für $\sin x$ und $\cos x$ die gleichgeltenden Potenzenreihen setzt:

$$\tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)$$

$$= \cos x + \sin x\cos x + \sin^2 x\cos x + \ldots + \sin^m x\cos x$$
$$+ H_{m+1}x^{m+1} + H_{m+2}x^{m+2} + \ldots.,$$

wobei es nicht auf die Werthe der mit H bezeichneten Koeffizienten ankommt. Hieraus ergiebt sich durch $m$malige Differenziation und nachher für $x = 0$ wegen Nro. 11)

$$T_m = (D^m \cos x)_{(0)} + (D^m \sin x\cos x)_{(0)} + (D^m \sin^2 x\cos x)_{(0)} + \ldots.$$
$$\ldots.. + (D^m \sin^m x\cos x)_{(0)}.$$

Man hat aber

Digitized by Google

$$D\sin^{k+1}x = (k+1)\sin^k x\cos x,$$

folglich durch $m$malige Differenziation

$$D^{m+1}\sin^{k+1}x = (k+1)D^m(\sin^k x\cos x)$$

oder umgekehrt

$$D^m(\sin^k x\cos x) = \frac{1}{k+1}D^{m+1}\sin^{k+1}x,$$

und mithin durch Anwendung auf das Frühere

$$12)\quad T_m = \frac{1}{1}(D^{m+1}\sin x)_{(0)} + \frac{1}{2}(D^{m+1}\sin^2 x)_{(0)} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{1}{m+1}(D^{m+1}\sin^{m+1}x)_{(0)};$$

und hier lassen sich sämmtliche Differenzialquotienten der Sinuspotenzen auf dieselbe Weise wie früher entwickeln. Geht man auf die Unterscheidung gerader und ungerader m ein, so findet man für $m=2n$:

$$13)\quad (-1)^n T_{2n} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}[3_1.1^{2n+1} - 3_0.3^{2n+1}]$$
$$+ \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}[5_2.1^{2n+1} - 5_1.3^{2n+1} + 5_0.5^{2n+1}]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n}}[(2n+1)_n.1^{2n+1} - (2n+1)_{n-1}.3^{2n+1}$$
$$+ \ldots. \pm (2n+1)_0(2n+1)^{2n+1}];$$

und entsprechend für $m=2n-1$:

$$14)\quad (-1)^{n+1}T_{2n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2_0.2^{2n}]$$
$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}[4_1.2^{2n} - 4_0.4^{2n}]$$
$$+ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^5}[6_2.2^{2n} - 6_1.4^{2n} + 6_0.6^{2n}]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}[(2n)_{n-1}.2^{2n} - (2n)_{n-2}4^{2n} + \ldots$$
$$\ldots. \pm (2n)_0.(2n)^{2n}].$$

Nach der zweiten von diesen Formeln ist z. B. für $n=3$:

Digitized by Google

$$T_6=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[2^6]$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}[4.2^6-4^6]$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^5}[15.2^6-6.4^6+6^6]$$
$$=16-120+120=16.$$

Die letzten beiden Formeln für T_{2n} und T_{2n-1} scheinen die einfachsten zu sein, welche zur independenten Bestimmung überhaupt dienen können. Die wirkliche Berechnung der Sekanten- und Tangentenkoeffizienten wird man übrigens unter Anwendung rekurrirender Formeln jederzeit leichter haben als nach irgend einer independenten Formel; unter den zahlreichen rekursiven Beziehungen, welche man zu diesem Zwecke angeben kann, scheint die folgende

15) $$m_0 T_m - m_2 T_{m-2} + m_4 T_{m-4} - m_6 T_{m-6} + \ldots = \sin\frac{m\pi}{2},$$

welche gleichförmig für gerade und ungerade m gilt, die einfachste und wohl auch nicht bekannt zu sein. Formell ist noch die folgende von Interesse:

16) $$2T_{m+1} = m_0 T_0 T_m + m_1 T_1 T_{m-1} + m_2 T_2 T_{m-2} + \ldots,$$

in welcher einige Aehnlichkeit mit dem Binomialtheoreme liegt. Von beiden Rekursionsformeln ist übrigens der Beweis so leicht, dass ich ihn füglich übergehen kann.

Digitized by Google

XXXVI.

Ueber die sich unendlich vergrössernden und die sich unendlich verkleinernden Curven.

Von dem

Herrn Doctor J. G. H. Swellengrebel

zu Utrecht.

Ist uns der Grad n und die Form einer gewissen algebraischen Curve $f(x,y)=0$ völlig unbekannt, so ist uns auch unbekannt, welche die Form sei der aus der Primitiven durch $p$malige Vergrösserung oder Verkleinerung entstehenden Curve. Nur wissen wir, dass — wenn wir den Coordinaten-Ursprung als im Vergrösserungs-Centrum liegend uns denken, d. h. in demjenigen Punkte, wovon die Vergrösserung ausgeht, und der daher bei der Vergrösserung seinen Ort nicht wechselt — die resultirenden Curven respective durch die Gleichungen

$$f\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p}\right)=0 \text{ und } f(px,\ py)=0$$

angedeutet werden. Anders dagegen verhält sich die Sache im Limitfall $p=\infty$, da alsdann nur ein gewisser Theil der Primitiven auf die Form der Resultirenden Einfluss hat, diese aber vom ganzen übrigen Theil der Primitiven unabhängig ist, so dass man, die Primitive $f(x,y)=0$ möge uns übrigens völlig unbekannt sein, doch schon die Form der resultirenden Curven

$$f(0x,\ 0y)=0 \text{ und } f(\infty x,\ \infty y)=0$$

vorhersagen kann.

Betrachten wir erstens die unendliche Verkleinerung: Es reducirt sich alsdann der ganze vom Coordinatenursprung endlich entfernte Theil der Primitiven beim Uebergang zur analogen Curve auf diesen Ursprungpunkt selbst, sodass nur noch die unendlich entfernten, d. h. die asymptotischen Zweige der Primitiven zu betrachten übrig bleiben. Wäre nun die Primitive $f(x,y)=0$ eine gewisse Gerade $ax+by+1=0$, so würde sich für die Curve $f(\infty x, \infty y)=0$ die Gerade $ax+by=0$, d. h. eine durch den Coordinaten-Ursprung gehende, der Primitiven parallele Gerade ergeben. Es wird daher auch allgemein, bei der unendlichen Verkleinerung einer beliebigen Primitive $f(x,y)=0$, jede ihrer Asymptoten in eine den Coordinaten-Ursprung in nämlicher Richtung durchgehende Gerade sich abändern. Da nun jede algebraische Curve eines gewissen Grades n im Allgemeinen n reelle oder imaginäre asymptotische Zweige hat, welche sich unendlich zu ihren Asymptoten annähern und bei der unendlichen Verkleinerung noch inniger mit diesen verschmelzen und daher mit diesen verwechselt werden dürfen, so ergiebt sich, dass die aus der Primitiven $f_n(x,y)=0$ entstehende Curve $f_n(\infty x, \infty y)=0$ im Allgemeinen eine neue Curve $n$ten Grades ist, welche jedoch die Specialität besitzt, dass sie aus einem durch den Coordinaten-Ursprung gehenden Strahlenbüschel von n, den Asymptoten der Primitiven parallelen, Geraden besteht.

Das nämliche ergiebt sich aus der Betrachtung, dass jede Curve $n$ten Grades (siehe Plücker in seiner Theorie der algebraischen Curven) betrachtet werden kann als

$$f_n(x,y)\equiv[(a_1x+b_1y+1)(a_2x+b_2y+1)\ldots.(a_nx+b_ny+1)]+\underset{n-2}{F}(x,y)=0,$$

wo

$$a_1x+b_1y+1=0,\quad a_2x+b_2y+1=0 \text{ etc.}$$

die n reellen oder imaginären Asymptoten der $f_n(x,y)=0$ bedeuten. Durch $p$malige Verkleinerung erhalten wir die Curve

$$f_n(px,py)\equiv[a_1px+b_1py+1)\ldots..(a_npx+b_npy+1)]+\underset{n-2}{F}(px,py)\equiv$$

$$\ldots.\equiv p^n\times[(a_1x+b_1y+\frac{1}{p})\ldots(a_nx+b_ny+\frac{1}{p})]+p^{n-2}\underset{n-2}{F}(x,y)=0,$$

d. h. die Curve

$$[(a_1x+b_1y+\frac{1}{p})\ldots\ldots(a_nx+b_ny+\frac{1}{p})]+\frac{1}{p^2}\underset{n-2}{F}(x,y)=0,$$

welche sich durch die Annahme $p=\infty$ auf die Curve

$$(a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)\ldots.(a_nx+b_ny)=0,$$

d. h. auf den oben erwähnten Strahlenbüschel reducirt.

Digitized by Google

Wenden wir dieses an auf den speciellen Fall, dass die Primitive ein Kegelschnitt sei: In diesem Fall können wir, da alle Asymptoten einander in einem gemeinschaftlichen Punkte durchschneiden, die unendliche Verkleinerung auch, wenn wir das Verkleinerungs-Centrum in diesen Durchschnittspunkt der Asymptoten verlegen, als ein unendliches Annähern der Curve zu ihren Asymptoten betrachten, d. h. wir können uns die Primitive

$$(x+cy)(x+dy)+e=0$$

mit der Analogen

$$(x+cy)(x+dy)=0$$

durch solch eine Verwandtschaft verbunden denken, welche aus der die Asymptoten zu ihren Situations-Axen habenden Affinität

$$x'+cy'=\frac{1}{p}(x+cy),$$

$$x'+dy'=\frac{1}{q}(x+dy)$$

im Limitfall $p=\infty$, $q=\infty$ hervorgeht. Man pflegt in den Lehrbüchern gemeiniglich nur einfach anzugeben, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

bei einem gewissen Zusammenhang zwischen den Coefficienten *ABCDEF* sich auf ein System zweier Geraden reducirt, ohne dass man näher die Möglichkeit solch einer Formveränderung des Kegelschnitts anzeigte. Eine bessere Einsicht des Vorganges erhält man, dünkt mich, wenn man zugleich angibt, was denn eigentlich der Kegelschnitt in diesem Limitfall erleide, und wenn man ihn entweder als sich unendlich nach seinem Centrum zu verkleinernd oder aber unendlich seinen beiden Asymptoten als Situations-Axen einer affinen Transformation sich annähernd sich denkt,

Betrachten wir jetzt die unendliche Vergrösserung einer beliebigen algebraischen Curve $f_n(x,y)=0$. Bei dieser Veränderung hat nur der unendlich kleine, in der unmittelbaren Nähe des Vergrösserungs-Centrums liegende Theil der Primitiven auf die Natur der analogen Figur Einfluss, da der ganze übrige Theil der Primitiven beim Uebergang zur Analogen sich in's Unendliche verliert und daher, weil nur von algebraischen Curven die Rede war, nicht weiter berücksichtigt werden braucht, da sonst die

Digitized by Google

analoge Figur sich in unendlicher Entfernung vom Coordinaten-Ursprung um diesen winden und daher zu den transcendenten Curven gerechnet werden müsste. Es wird nun bei der Primitiven

$$f_n(x,y) \equiv [Ax^n + Bx^{n-1}y + \ldots + Cy^n] + [Dx^{n-1} + \ldots] + \ldots\ldots$$
$$\ldots + Fx + Gy + H = 0$$

im Allgemeinen $H \gtrless 0$ sein, d. h. es wird im Allgemeinen der Coordinaten-Ursprung und daher auch das Vergrösserungs-Centrum sich nicht auf der Curve, sondern irgendwo ausserhalb ihr befinden, sodass bei der unendlichen Vergrösserung im Allgemeinen die ganze Primitive $f(x,y)=0$ sich unendlich vom Coordinaten-Ursprung entfernt, und daher die Analoge $f(0x, 0y)=0$ im Allgemeinen eine Curve 0ten Grades wird, d. h. zur Gleichung $H=0$ sich reducirt. In speciellen Fällen jedoch kann es sich ereignen, dass in der Gleichung $f_n(x,y)=0$ der Coefficient H den Werth 0 hätte, so dass die Primitive das Vergrösserungs-Centrum durchstrich, und zwar in einer Richtung, deren Winkel mit der Richtung der Coordinaten-Axe $y=0$ durch $\text{arc.tg.}(-\frac{F}{G})$ angedeutet würde. Es wird alsdann der in der unmittelbaren Nähe des Vergrösserungs-Centrums liegende Theil der Primitiven, bei der unendlichen Vergrösserung sich, mit Beibehaltung ihrer Richtung, zu einer Geraden ausdehnen, sodass die analoge $f_n(0x, 0y) = 0$ — wenn wir wiederum ihre unendlich entfernten Windungen ausser Betrachtung lassen — sich zu der Geraden $Fx + Gy = 0$ oder allgemeiner zu der ihr parallelen Geraden $Fx + Gy + K = 0$ reducirt. In noch specielleren Fällen kann es sich ereignen, dass die Primitive im Coordinaten-Ursprung einen Doppelpunkt oder überhaupt einen $q$fachen Punkt hätte. Es wird alsdann die Analoge $f_n(0x, 0y) = 0$ eine Curve $q$ten Grades sein, und zwar eine aus q Geraden bestehende, welche den q, der Primitiven im Coordinaten-Ursprung zu ziehenden Tangenten respective parallel laufen.

Es ist aber wohl zu beachten, dass bisher immer nur von algebraischen Curven die Rede war, sodass unsere Behauptung, dass die unendliche Verkleinerung oder Vergrösserung einer beliebigen Curve $f_n(x,y)=0$ im Allgemeinen immer ein System von n oder q Geraden hervorbringt, nicht geradezu auf transcendente Curven übertragen werden darf, sondern bei diesen, statt eines Systemes von Geraden, bisweilen neue Curven hervortreten. Nehmen wir z. B. die logarithmische Spirale $\varphi = \lg.r$, und verkleinern oder vergrössern wir sie unendlichmal, so ergibt sich in beiden Fällen — nur soll im letzten Fall das Vergrösserungs-Centrum im Centrum der Spirale angenommen werden — eine neue Curve, welche, so wie die Primitive, einerseits sich mit unendlich vielen Windungen in's Unendliche erstreckt, andererseits unendliche Male um das Vergrösserungs-Centrum sich herumdreht und sich ihm immer mehr nähert. Da nämlich, bei unserer Lage des Vergrösserungs-Centrums, die unendliche

Digitized by Google

Verkleinerung oder Vergrösserung einer Primitiven $f(r,\varphi)=0$ respective durch das Gleichungen-Paar $\begin{matrix} r'=0\times r \\ \varphi'=\varphi \end{matrix}$ oder durch das Paar $\begin{matrix} r'=\infty\times r \\ \varphi'=\varphi \end{matrix}$ ausgedrückt wird, so ändert sich die Primitive $\varphi=\lg.r$ in die Curven

$$\varphi'=\varphi=\lg.r=\lg.(\infty\times r')=+\infty+\lg.r',$$

$$\varphi'=\varphi=\lg.r=\lg.(0\times r')=-\infty+\lg.r'.$$

In beiden Fällen ist daher die resultirende Curve eine neue logarithmische Spirale, welche aus der Primitiven als auf diese Weise entstanden gedacht werden kann, dass die ganze Primitive sich unendliche Male um den Coordinaten-Ursprung gedreht hätte, und welche mit der Primitiven nicht nur durch die Verwandtschaft der Aehnlichkeit, sondern auch — wegen der Bedingung $\varphi'=\varphi$ — durch diejenige der Aehnlichkeit mit ähnlicher Lage verbunden ist. Ob sie aber mit der Primitiven coincidire, hängt davon ab, ob jede ihrer Windungen nach Beendigung der unendlich vielen zur Vergrösserung oder Verkleinerung erforderlichen Umdrehungen auf eine der Windungen der Primitiven geräth oder aber sich zwischen zwei Windungen der Primitiven befindet; was, da die Anzahl ∞ dieser Umdrehungen unbestimmt ist, unbestimmt bleiben muss.

Digitized by Google

XXXVII.

Auflösung des Malfatti'schen Problems.

Von

Herrn H. Seheffler,

Bau-Conducteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Da ich die nachstehende Auflösung des Malfattischen Problems zu einer Zeit gefunden habe, wo mir von einer bereits veröffentlichten Lösung desselben noch Nichts bekannt war; so vermuthe ich, dass dieses Verfahren wesentlich von den schon vorhandenen Auflösungen verschieden und demnach die Publikation desselben gerechtfertigt sein wird.

Nach diesem Problem sollen in ein Dreieck ABC (Taf. IX. Fig. 2.) drei Kreise beschrieben werden, von denen jeder zwei Seiten des Dreiecks und die anderen beiden Kreise berührt.

Dass die Mittelpunkte E, F, G der gesuchten Kreise auf den Halbirungslinien AD, BD, CD der Winkel des Dreiecks liegen müssen, leuchtet ein. Zieht man EF und fällt von E und F die Perpendikel EJ, FK auf AB; so muss EJ der Radius des um E beschriebenen, FK der Radius des um F beschriebenen Kreises und EF muss die Summe dieser beiden Radien sein.

Nun seien zur Abkürzung

a, b, c die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten BC, CA, AB des Dreiecks;

2α, 2β, 2γ die Winkel bei A, B, C;

Digitized by Google

p, q, r die Linien AD, BD, CD;

h die Länge der von D auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel DL, DM, DN, welche sämmtlich dem Radius des in das Dreieck beschriebenen Kreises gleich sind;

e, f, g die Länge von den Fusspunkten dieser Perpendikel nach den Spitzen A, B, C des Dreiecks, also die Längen

$$AM=AN,\quad BN=BL,\quad CL=CM;$$

x, y, z die gesuchten Halbmesser der um E, F, G zu beschreibenden Kreise.

Zieht man EH parallel zu AB; so hat man in dem rechtwinkligen Dreiecke EFH

$$EH=\sqrt{EF^2-FH^2}=\sqrt{(EJ+FK)^2-(FK-EJ)^2}=2\sqrt{EJ.FK},$$

d. i. da man

$$EH=JK=AB-AJ-BK=c-\frac{x}{\text{tang}\alpha}-\frac{y}{\text{tang}\beta}$$

hat,

$$(1)\qquad c-x\cot\alpha-y\cot\beta=2\sqrt{xy},$$

und symmetrisch hat man

$$(2)\qquad b-z\cot\gamma-x\cot\alpha=2\sqrt{zx},$$

$$(3)\qquad a-y\cot\beta-z\cot\gamma=2\sqrt{yz}.$$

Dividirt man jede der drei Gleichungen (1), (2), (3) durch z, löst eine jede derselben, indem man $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{1}{z}$ wie drei Unbekannte behandelt, für $\frac{1}{z}$ auf, was sehr leicht ist, da jede Gleichung in Beziehung zu dieser Unbekannten vom ersten Grade ist, und schreibt zur Abkürzung

$$(4)\qquad X=\sqrt{\frac{x}{z}},\quad Y=\sqrt{\frac{y}{z}},\quad Z=\sqrt{\frac{1}{z}};$$

so kommt resp. aus (2), (3), (1)

$$(5)\qquad Z^2=\frac{1}{b}(X^2\cot\alpha+2X+\cot\gamma),$$

Digitized by Google

$$(7) \qquad Z^2=\frac{1}{a}(Y^2\cot\beta+2Y+\cot\gamma),$$

$$(6) \qquad Z^2=\frac{1}{c}(X^2\cot\alpha+2XY+Y^2\cot\beta).$$

Setzt man die Werthe von Z^2 aus Gleichung (5) und (6) einander gleich, multiplicirt die linke Seite vor der Klammer mit $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ und in der Klammer mit $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$, die rechte Seite vor der Klammer mit $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ und in der Klammer mit $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, berücksichtigt dann, dass wegen $a:b=\sin2\alpha:\sin2\beta=\sin\alpha\cos\alpha:\sin\beta\cos\beta$

$$\frac{\sin\beta}{b\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{a\cos\beta}$$

ist, streicht also links und rechts die vor der Klammer stehenden gleichen Grössen, multiplicirt hierauf beiderseits mit $\sin\alpha\sin\beta$, addirt dann links $\sin^2\alpha-\sin^2\alpha$ und rechts $\sin^2\beta-\sin^2\beta$, beachtet, dass links die beiden Glieder

$$\cot\gamma.\cos\alpha\sin\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cos(\alpha+\gamma)=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$$

denselben Werth haben, wie rechts die beiden Glieder

$$\cot\gamma\cos\beta\sin\beta-\sin^2\beta,$$

dass dieselben also auf beiden Seiten gestrichen werden können; so stellen sich beide Seiten der Gleichung als vollständige Quadrate dar, und die Ausziehung der Quadratwurzel ergibt

$$(8) \qquad X\cos\alpha+\sin\alpha=Y\cos\beta+\sin\beta$$

oder

$$X\cos\alpha-Y\cos\beta=\sin\beta-\sin\alpha$$

und wenn man für X und Y ihre Werthe aus (4) wieder einführt und mit $\sqrt{z}$ multiplizirt,

$$(9) \qquad \cos\alpha\sqrt{x}-\cos\beta\sqrt{y}=(\sin\beta-\sin\alpha)\sqrt{z}.$$

Symmetrisch muss man haben

$$(10) \qquad \cos\beta\sqrt{y}-\cos\gamma\sqrt{z}=(\sin\gamma-\sin\beta)\sqrt{x},$$

$$(11) \qquad \cos\gamma\sqrt{z}-\cos\alpha\sqrt{x}=(\sin\alpha-\sin\gamma)\sqrt{y}.$$

Digitized by Google

Durch Addition je zweier dieser drei Gleichungen verschwindet Eine Unbekannte und man erhält für das Verhältniss der anderen beiden folgende Werthe:

$$(12)\qquad \frac{x}{y}=\left(\frac{\sin\gamma-\sin\alpha+\cos\beta}{\sin\gamma-\sin\beta+\cos\alpha}\right)^2,$$

$$(13)\qquad \frac{x}{z}=\left(\frac{\sin\beta-\sin\alpha+\cos\gamma}{\sin\beta-\sin\gamma+\cos\alpha}\right)^2,$$

$$(14)\qquad \frac{y}{z}=\left(\frac{\sin\alpha-\sin\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha-\sin\gamma+\cos\beta}\right)^2.$$

Diese Ausdrücke lassen sich unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\alpha+\beta+\gamma=90^0$$

leicht in folgende Formen bringen, von denen bald diese, bald jene einen bequemeren Gebrauch verstattet:

$$(15)\qquad \frac{x}{y}=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2=\left(\frac{1+\tang\frac{\beta}{2}}{1+\tang\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\left(\frac{1+\sin\beta}{1+\cos\beta}\right),$$

$$\frac{x}{z}=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}}\right)^2=\left(\frac{1+\tang\frac{\gamma}{2}}{1+\tang\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\left(\frac{1+\sin\gamma}{1+\cos\gamma}\right),$$

$$(17)\qquad \frac{y}{z}=\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right)^2=\left(\frac{1+\tang\frac{\gamma}{2}}{1+\tang\frac{\beta}{2}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1+\cos\beta}{1+\sin\beta}\right)\left(\frac{1+\sin\gamma}{1+\cos\gamma}\right).$$

Hiernach stehen die gesuchten drei Radien in folgender Proportion:

Digitized by Google

$$(18)\qquad x:y:z=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2:\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}\right)^2:\left(\frac{\cos\frac{\gamma}{\alpha}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)^2$$

$$=\left[\frac{\cos\frac{\alpha}{\gamma}}{\cos(45^0-\frac{\alpha}{2})}\right]^2:\left[\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos(45^0-\frac{\beta}{2})}\right]^2:\left[\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos(45^0-\frac{\gamma}{2})}\right]^2$$

oder

$$(19)\quad x:y:z=\frac{1}{\left(1+\tang\frac{\alpha}{2}\right)^2}:\frac{1}{\left(1+\tang\frac{\beta}{2}\right)^2}:\frac{1}{\left(1+\tang\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

oder

$$(20)\qquad x:y:z=\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}:\frac{1+\cos\beta}{1+\sin\beta}:\frac{1+\cos\gamma}{1+\sin\gamma}.$$

Konstruiren lassen sich drei Linien, welche den gesuchten Radien proportional sind, am leichtesten nach der Formel (20); berechnen dagegen lassen sie sich am leichtesten nach der Formel (18).

Um die Formel (20) zu einer geometrischen Konstruktion geschickt zu machen, schreiben wir dieselbe, indem p, q, r die obigen Bedeutungen haben,

$$(21)\qquad x:y:z=\frac{p+p\cos\alpha}{p+p\sin\alpha}:\frac{q+q\cos\beta}{q+q\sin\beta}:\frac{r+r\cos\gamma}{r+r\sin\gamma}$$

$$=\frac{p+e}{p+h}:\frac{q+f}{q+h}\cdot\frac{r+g}{r+h},$$

oder, wenn l irgend eine beliebige Länge bezeichnet,

$$(22)\qquad x:y:z=\left(\frac{p+e}{p+h}\right)l:\left(\frac{q+f}{q+h}\right)l\left(\frac{r+g}{r+h}\right)l.$$

Solche drei Linien, wie

$$\left(\frac{p+e}{p+h}\right)l,\quad\left(\frac{q+f}{q+h}\right)l\left(\frac{r+g}{r+h}\right)l,$$

welche den gesuchten Radien x, y, z proportional sind, lassen sich ungemein leicht darstellen. Man braucht nur auf dem Einen Schenkel eines beliebigen Winkels (Taf. IX. Fig. 3.)

Digitized by Google

$$OP,\ OQ,\ OR \text{ resp.} = p+h,\ q+h,\ r+h,$$

auf dem anderen Schenkel

$$OE,\ OF,\ OG \text{ resp.} = p+e,\ q+f,\ r+g$$

zu machen, PE, QF, RG zu ziehen und durch einen beliebigen Punkt L des ersten Schenkels (wofür $OL=1$ wird) die Linien LX, LY, LZ resp. parallel PE, QF, RG zu ziehen. Alsdann besitzen die Linien OX, OY, OZ die verlangte Eigenschaft, indem man hat

$$x:y:z = OX:OY:OZ.$$

Beschreibt man nun mit den Radien OX, OY, OZ drei sich gegenseitig berührende Kreise, was sehr leicht ist, legt um dieselben nach Taf. IX. Fig 4. die gemeinschaftlichen Tangenten; so bilden die letzteren ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gegebenen ABC ähnlich ist. Zieht man dann, wenn E', F', G' die Mittelpunkte der verzeichneten Kreise sind, durch A und F' die Linie AF und durch A und G' die Linie AG; so führen dieselben zu den Mittelpunkten F und G zweier gesuchten Kreise. Den Mittelpunkt E des dritten Kreises liefert eine durch G mit $G'E'$ parallel gezogene Linie GE.

Ausdrücke für die absolute Länge eines jeden der gesuchten Radien erhält man, indem man die Werthe von $X=\frac{x}{z}$ und $Y=\frac{y}{z}$ aus Gleichung (16) und (17) in Gleichung (7) substituirt. Da hierin $Z=\sqrt{\frac{1}{z}}$ ist; so ergibt sich nach einigen Transformationen mittelst bekannter trigonometrischen Formeln:

$$(23) \qquad z = 2c\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\gamma\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

und symmetrisch

$$(24) \qquad y = 2b\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\beta\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}},$$

Digitized by Google

$$(25)\quad x = 2a\sqrt{2}.\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

Diese letzteren Ausdrücke eignen sich besonders zur arithmetischen Berechnung der gesuchten Grössen.

XXXVIII.

Ueber die Entstehung der Flächen des zweiten Grades.

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Man pflegt gewöhnlich die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen drei Veränderlichen:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0$$

der Betrachtung der Flächen zweiten Grades zu Grunde zu legen und dann von da aus die Arten dieser Flächen abzuleiten und sie zu betrachten. Es ist jedoch zweckmässiger, zunächst die verschiedenen Arten derselben gesondert zu untersuchen und erst nachher die obige allgemeine Gleichung weiter zu verfolgen. Am Einfachsten wird die Anschauung dieser Flächen hervorgerufen werden, wenn man sie durch Bewegung von Kurven zweiter Ordnung entstehen lässt. Es ist mir nicht bekannt, ob diese Entstehungsweise der Flächen zweiten Grades allgemein bekannt ist; ich will dieselbe desshalb hier aufführen. Kugel-, Kegel- und Zylinderfläche übergehe ich aus dem angeführten Grunde.

Digitized by Google

Das Ellipsoid.

Man denke sich in der Ebene xz (ich nehme drei auf einander senkrechte Koordinatenebenen an) eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Koordinaten, deren eine Axe, $2a$, mit der Axe der x, deren andere, $2c$, mit der Axe der z zusammenfällt; ferner in der Ebene der yz eine ähnliche Ellipse, deren Mittelpunkt abermals mit dem Anfangspunkt, deren Axe $2b$ mit der Axe der y, deren andere Axe $2c$ mit der Axe der z zusammenfällt. Parallel der Ebene der xy lasse man nun eine veränderliche Ellipse sich so bewegen, dass die Endpunkte ihrer beiden Hauptaxen sich immer in den beiden vorigen Ellipsen befinden. Man verlangt die Gleichung der entstehenden Fläche.

Denken wir uns die bewegliche Ellipse, deren Hauptaxen immer in den Ebenen der xz und yz, parallel den Axen der x und y, sich befinden, in der Entfernung h von der Ebene der xy, so werden ihre Halbaxen sein:

a) parallel der Axe der x, da die Gleichung der Ellipse in der Ebene der xz ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

gleich $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$,

b) parallel der Axe der y, da die Gleichung der Ellipse in der Ebene der yz ist

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

gleich $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$.

Die Gleichungen der beweglichen Ellipse in der angeführten Lage sind folglich

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1, \quad z=h;$$

eliminirt man h, so erhält man als Gleichung der gesuchten Fläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Die Fläche der Ellipse in dieser Lage ist

$$\pi ab\sqrt{\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{h}{c^2}\right)}=\pi ab\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right).$$

Daraus folgt, dass der Inhalt eines Schnitts, dessen Grundfläche diese Ellipse, dessen Höhe ∂h, gleich:

$$\pi ab\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)\partial h,$$

also das Stück des Körpers, das zwischen der Ebene der xy und einem mit ihr parallelen Schnitt, dessen Entfernung von der Ebene der xy z ist, ist gleich:

$$\pi ab\int_0^z\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)\partial h=\pi ab\,(z-\frac{z^3}{3c^2}).$$

Setzt man $z=c$, so erhält man den Inhalt des halben Ellipsoids

$$=\pi ab\left(c-\frac{c}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}\,abc,$$

also der des ganzen Ellipsoids

$$=\frac{4\pi}{3}\,abc.$$

Uebrigens ist die Fläche eine in jeder Weise begrenzte.

Das Hyperboloid mit einem Fache.

Man denke sich in der Ebene der xz eine (doppeltheilige) Hyperbel, deren reelle Axe $2a$ mit der Axe der x, deren imaginäre $2c$ mit der Axe der z und deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt zusammenfällt; eben so denke man sich in der Ebene der yz eine Hyperbel, deren reelle Axe $2b$ mit der Axe der y, deren imaginäre $2c$ mit der Axe der z zusammenfällt, wenn der Mittelpunkt zugleich im Anfangspunkt der Koordinaten ist. Man sieht nun leicht, dass vier Hyperbelarme über, vier unter der Ebene der xy sich befinden. Nun lasse man eine Ellipse, parallel der Ebene der xy sich so bewegen, dass die Endpunkte ihrer Hauptaxen immer auf den Hyperbelarmen sich befinden. Man fragt nach der Gleichung der entstehenden Fläche.

Die Gleichung der ersten Hyperbel ist:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

die der zweiten:

Digitized by Google

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Denken wir uns nun die bewegliche Ellipse in der Entfernung h von der Ebene der xy, so sind ihre Axen:

a) parallel der Axe der x:

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

b) parallel der Axe der y:

$$b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Demnach sind die Gleichungen der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,\quad z=h,$$

voraus als Gleichung der erzeugten Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Dieselbe erstreckt sich nach zwei Seiten hin ins Unendliche, besteht aber aus einem zusammenhängenden Stücke.

Der Inhalt des Raumes, innerhalb der vier Hyperbelarme, und zwischen der Ebene der xy und einem in der Entfernung z mit ihr parallelen Schnitte ist:

$$\pi ab\int_0^z\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)\partial h=\pi ab\left(z+\frac{z^3}{3c^2}\right).$$

Jede der Hyperbeln hat Asymptoten, deren Gleichungen:

für die erste $\quad x=\pm\frac{a}{c}z,\quad y=0;$

für die zweite $\quad y=\frac{b}{c}z,\quad x=0.$

Lässt man nun eine veränderliche Ellipse, genau wie so eben, sich auf den Asymptotenarmen bewegen, so findet man als Gleichung des entstehenden Asymptotenkegels:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Digitized by Google

Der Inhalt des Stücks zwischen der Spitze und einem mit der Ebene der xy, in der Entfernung z parallelen Schnitte ist:

$$\pi ab \int_0^z \frac{h^2}{c^2} \partial h = \pi ab \frac{z^3}{3},$$

so dass das zwischen Kegel und Hyperboloid liegende Körperstück:

$$\pi abz$$

ist.

Das Hyperboloid mit zwei Fächern.

Denken wir uns in der Ebene der xz eine Hyperbel, deren reelle Axe $2c$ mit der Axe der z, deren imaginäre Axe $2a$ mit der Axe der x und deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt zusammenfällt; ferner eine zweite Hyperbel in der Ebene der yz, deren reelle Axe $2c$ wieder mit der Axe der z, deren imaginäre $2b$ mit der Axe der y und deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt zusammenfalle. Man lasse nun eine Ellipse (sowohl unter als über der Ebene der xy) sich parallel der Ebene der xy so bewegen, dass die Endpunkte der Hauptaxen beständig auf den vier Hyperbelarmen seien. Man verlangt die Gleichung der erzeugten Fläche.

Die Gleichung der Hyperbel in der Ebene der xz ist

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

der in der Ebene der yz:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sei nun die bewegliche Ellipse in der Entfernung h von der Ebene der xy, so sind ihre Hauptaxen:

a) parallel der Axe der x:

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1},$$

b) parallel der Axe der y:

$$b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Also sind die Gleichungen der beweglichen Ellipse:

Digitized by Google

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1, \quad z=h,$$

woraus nun als Gleichung der erzeugten Fläche folgt:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Diese Fläche besteht aus zwei ganz getrennten, sonst aber gleichen Stücken, deren Entfernung, Scheitel von Scheitel, gleich $2c$ ist. Das Körperstück vom Scheitel bis zu dem mit der Ebene der xy in der Entfernung z parallelen Schnitte ist:

$$\pi ab\int_c^z\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)\partial h=\pi ab\left(\frac{z^3}{3c^2}-z+\frac{2c}{3}\right), \quad z>c.$$

Die Gleichung des Asymptotenkegels ist, wie oben:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Das Stück desselben, vom Anfangspunkt bis zu dem obigen Schnitte ist:

$$\pi ab\int_0^z\frac{h^2}{c^2}\partial h=\frac{\pi abz^3}{3c^2},$$

so dass das zwischen Kegel und Hyperboloid befindliche Stück:

$$\pi ab\left(z-\frac{2c}{3}\right)$$

ist.

Das elliptische Paraboloid

Denken wir uns in der Ebene der xz eine Parabel, deren Hauptaxe mit der Axe der z, deren Scheitel mit dem Anfangspunkt zusammenfällt, und deren Parameter $\frac{2a^2}{c}$ ist; ferner eine zweite Parabel, deren Scheitel gleichfalls im Anfangspunkt liegt, die in der Ebene der yz sich so befindet, dass ihre Hauptaxe mit der Axe der z zusammenfällt und ihr Parameter $\frac{2b^2}{c}$ ist. Je nachdem, ob c positiv oder negativ ist, werden vier Parabelarme über oder unter der Ebene der xy sich befinden. Man lasse nun eine Ellipse, wie im Früheren, sich parallel der Ebene der xy bewegen, so dass die Enden ihrer Hauptaxen auf den vier Pa-

Digitized by Google

rabelarmen sich befinden Welches ist die Gleichung der entstehenden Fläche?

Die Gleichung der ersten Parabel ist $x^2 = \frac{2a^2}{c} z$, der zweiten $y^2 = \frac{2b^2}{c} z$. Daraus folgt, dass, wenn die bewegliche Ellipse in der Entfernung h von der Ebene der xy ist, die Axen derselben $a\sqrt{\frac{2h}{c}}$ und $b\sqrt{\frac{2h}{c}}$ sein werden, so dass ihre Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2 \frac{2h}{c}} + \frac{y^2}{b^2 \frac{2h}{c}} = 1, \quad z = h$$

sind, woraus nun als Gleichung der erzeugten Fläche folgt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

Diese Fläche liegt ganz auf einer Seite der Ebene der xy; der Anfangspunkt der Koordinaten ist ihr Scheitel. Zwischen dem Scheitel und einem mit der Ebene der xy in der Entfernung z parallel gelegten Schnitte ist das Körperstück

$$\pi ab \int_0^z \frac{2h}{c} \partial h = \frac{\pi ab z^2}{c}.$$

Diese Flächenräume wachsen also mit dem Quadrat der Ordinate z. Der Inhalt eines Kegels, der denselben Scheitel und denselben Schnitt zur Grundfläche hätte, wäre:

$$\pi ab \frac{2z}{c} \cdot \frac{z}{3} = \frac{2\pi}{3c} abz^2,$$

so dass das Hyperboloid um die Hälfte mehr ist.

Das hyperbolische Paraboloid.

Denken wir uns in der Ebene der xz eine Parabel vom Parameter $\frac{2a^2}{c}$, deren Hauptaxe auf der Axe der z liegt, und deren Scheitel in den Anfangspunkt fällt; sodann eine zweite Parabel vom Parameter $-\frac{2b^2}{c}$, deren Hauptaxe gleichfalls auf der Axe der z, die Parabel selbst in der Ebene der yz sich befindet, während der Scheitel wieder mit dem vorigen zusammenfällt. Es ist klar, dass jetzt zwei Parabelarme nach oben, zwei nach unten

Digitized by Google

gehen. Man lasse nun zwei Hyperbeln von der Ebene der xy aus, parallel mit dieser Ebene, sich so bewegen, dass die Scheitel ihrer reellen Hauptaxen sich auf den Parabelarmen befinden, während die Hyperbeln konjugirt sind, d. h. die reelle Axe der einen gleich der imaginären der andern, wenn die Hyperbeln gleich weit abstehen von der Ebene der xy. Welches ist die Gleichung der entstehenden Fläche?

Es ist klar, dass eine Hyperbel sich nach oben, die andere nach unten bewegt. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden.

1) Sei c positiv. Alsdann ist die Gleichung der obern Parabel $x^2 = \frac{2a^2}{c} z$, der untern $y^2 = -\frac{2b^2}{c} z$. In der Entfernung h ist die reelle Axe der obern Hyperbel $a\sqrt{\frac{2h}{c}}$; in der Entfernung $-h$ ist die reelle Axe der untern $b\sqrt{\frac{2h}{c}}$. Demnach sind die Gleichungen der obern Hyperbel:

$$\frac{x^2}{2a^2\frac{h}{c}} - \frac{y^2}{2b^2\frac{h}{c}} = 1, \quad z = h;$$

der unteren:

$$\frac{y^2}{2b^2\frac{h}{c}} - \frac{x^2}{2a^2\frac{h}{c}} = 1, \quad z = -h.$$

In beiden Fällen folgt als Gleichung der erzeugten Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

2) Sei c negativ. Alsdann ist die Gleichung der obern Parabel $y^2 = -\frac{2b^2}{c} z$, der untern $x^2 = \frac{2a^2}{c} z$. Die reelle Axe der obern Hyperbel in der Entfernung h ist $b\sqrt{-\frac{2h}{c}}$, der andern in der Entfernung $-h$: $a\sqrt{-\frac{2h}{c}}$; also die Gleichungen der obern Hyperbel:

$$\frac{y^2}{-2\frac{b^2h}{c}} - \frac{x^2}{-2\frac{a^2h}{c}} = 1, \quad z = h;$$

der untern:

Digitized by Google

$$\frac{x^2}{-2\frac{a^2h}{c}} - \frac{y^2}{-2\frac{b^2h}{c}} = 1, \quad z = -h:$$

woraus wieder als Gleichung der Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

In jedem Falle sieht man, besteht die Fläche aus vier Theilen, die sich ins Unendliche erstrecken. Diese vier Theile, stehen sich gewissermassen im Kreuz entgegen. Da für den Fall $h=0$ die obere Hyperbel sowohl als die untere sich in die Linien

$$x = \pm\frac{a}{b}y, \quad z = 0$$

verwandeln, so vereinigen sich die vier Stücke in diesen zwei Linien, die nichts Anderes sind, als die Asymptoten der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Weitere Untersuchungen dieser Fläche liegen für den Augenblick ausser unserer Betrachtung.

Digitized by Google

XXXIX.

Ueber Lamberts Satz von der Quadratur parabolischer Sectoren.

Von

dem Herausgeber.

Das schöne Theorem von Lambert oder Euler über die Quadratur parabolischer Sectoren ist in der Astronomie bekannter wie in der Geometrie; aber sehr mit Unrecht, da seine geometrische Eleganz gewiss eben so gross ist wie sein Nutzen in der Astronomie bei der Berechnung der als Parabeln betrachteten Cometenbahnen. Es ist daher sehr zu wünschen, dass dasselbe bald völliges Bürgerrecht in der Lehre von den Kegelschnitten erhalte, was bis jetzt leider noch nicht der Fall ist.

Man findet diesen schönen Satz, in Verbindung mit verschiedenen astronomischen Lehren und in unmittelbarer Beziehung auf diese, in der eleganten kleinen Schrift von Lambert: Insigniores orbitae cometarum proprietates. Aug. Vindelic. 1761. §. 83. und auch in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik. Thl. III. S. 257. In der Theoria motus corporum coelestium. p. 119. hat jedoch Gauss nachgewiesen, dass die erste Erfindung dieses schönen Satzes eigentlich Euler gebührt. Schon vor einer langen Reihe von Jahren habe ich für denselben einen Beweis in Crelle's Journal der reinen und angewandten Mathematik. Thl. XVI. S. 21. gegeben, welcher bloss ganz elementare Betrachtungen der analytischen Geometrie in Anspruch nimmt, und habe verschiedene andere Sätze, namentlich auch einen, wie ich glaube, merkwürdigen Ausdruck für den Flächeninhalt eines parabolischen Segments, hinzugefügt. Indem ich aus zufälliger Veranlassung diesen Gegenstand jetzt wieder aufnehme, will ich im Folgenden einen Beweis des in Rede stehenden merkwürdigen Theorems geben,

Digitized by Google

der zwar auf einer einfachen Betrachtung mit Hülfe der Integralrechnung beruhet, sonst aber sich bloss elementarer analytisch-trigonometrischer Rechnungen und einiger keiner Schwierigkeit unterliegenden arithmetischen Transformationen bedient. Uebrigens würde es auch leicht sein, die Anwendung der Integralrechnung mittelst der bekannten Quadratur der Parabel ganz zu umgehen, und dann würde der Aufnahme des folgenden Beweises in die Elemente der Kegelschnitte nach meiner Meinung nichts entgegen stehen. Die Substituirung einer ganz elementaren Betrachtung für die im Folgenden angewandten wenigen Integralformeln, — die übrigens ganz allgemein bekannt sind, — kann ich aber hier füglich den Lesern vollständig überlassen.

Die allgemeine Polargleichung der Parabel ist bekanntlich

$$r=\frac{p}{2(1+\cos\varphi)}=\frac{p}{4\cos\frac{1}{2}\varphi^2},$$

wo der Winkel φ von dem, von dem Brennpunkte der Parabel nach iherm Scheitel gezogenen Radius vector an immer nach derselben Seite hin, etwa nach der Seite hin, auf welcher die positiven Ordinaten genommen werden, von 0 bis 360° gezählt wird; also ist

$$r^2=\frac{p^2}{16\cos\frac{1}{2}\varphi^4},$$

und folglich

$$\frac{1}{2}r^2\partial\varphi=\frac{p^2\partial\varphi}{32\cos\frac{1}{2}\varphi^4}=\frac{p^2}{16}\cdot\frac{\partial\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}$$

Bezeichnen wir aber, indem wir

$$\varphi<180^0$$

annehmen, den Flächeninhalt des zwischen dem von dem Brennpunkte der Parabel nach ihrem Scheitel gezogenen Radius vector $\frac{1}{4}p$ und dem Radius vector r enthaltenen Sectors der Parabel durch S, so ist nach einem bekannten Satze der Integralrechnung

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2\partial\varphi;$$

also nach dem Obigen

Digitized by Google

$$S=\frac{p^2}{16}\int_0^{\varphi}\frac{\partial\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}.$$

Nun findet man aber leicht nach einer bekannten Integralformel

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varphi^3}+\frac{2}{\cos\frac{1}{2}\varphi}\right)\sin\frac{1}{2}\varphi$$

oder

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}=\frac{1}{3}\tang\frac{1}{2}\varphi\left(2+\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\tang\frac{1}{2}\varphi\cdot\frac{1+2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$S=\frac{p^2}{48}\tang\frac{1}{2}\varphi\cdot\frac{1+2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}.$$

Nun ist aber

$$\cos\frac{1}{2}\varphi^2=\frac{p}{4r},$$

also

$$\sin\frac{1}{2}\varphi^2=1-\frac{p}{4r}=\frac{4r-p}{4r},$$

und folglich, weil

$$\frac{1}{2}\varphi<90^0$$

ist, also $\sin\frac{1}{2}\varphi$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi$ positiv sind:

$$\sin\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{4r-p}}{2\sqrt{r}},\quad\cos\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{r}};$$

folglich

$$\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{4r-p}}{\sqrt{p}}.$$

Ferner findet man leicht:

$$\frac{1+2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{2(2r+p)}{p}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$S = \frac{1}{24}\sqrt{p}.(2r+p)\sqrt{4r-p}.$$

Bezeichnen wir nun überhaupt den zwischen den beiden Vectoren r und r' enthaltenen Sector der Parabel durch $\mathfrak{S}$, und nehmen in dem Falle, wo r und r' auf einer und derselben Seite der Axe der Parabel liegen, an, dass r' grösser als r sei, so ist

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{24}\sqrt{p}.\{(2r'+p)\sqrt{4r'-p} \mp (2r+p)\sqrt{4r-p}\},$$

indem man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Vectoren r und r' auf einer und derselben Seite, oder auf verschiedenen Seiten der Axe der Parabel liegen.

Die von den Vectoren r und r' mit der Axe der Parabel eingeschlossenen und auf bekannte Weise genommenen Winkel bezeichnen wir durch φ und φ', so dass also

$$r = \frac{p}{4\cos\frac{1}{2}\varphi^2}, \qquad r' = \frac{p}{4\cos\frac{1}{2}\varphi'^2}$$

ist, und den von den beiden Vectoren r und r' mit einander eingeschlossenen, nach der Seite der Parabel hin liegenden Winkel wollen wir im Folgenden durch θ bezeichnen.

Betrachten wir nun zuerst den Fall, wenn die Vectoren r, r' auf einer und derselben Seite der Axe der Parabel liegen, und nehmen grösserer Bestimmtheit wegen an, dass diese Vectoren beide auf der positiven Seite der Axe der Parabel liegen und $r' > r$ sei, so sind offenbar $\cos\frac{1}{2}\varphi$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi'$ beide positiv, also nach dem Obigen

$$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{p}}{2\cos\frac{1}{2}\varphi}, \quad \sqrt{r'} = \frac{\sqrt{p}}{2\cos\frac{1}{2}\varphi'}$$

Digitized by Google

oder

$$\sqrt{p} = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{r}, \quad \sqrt{p} = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi' \cdot \sqrt{r'};$$

folglich

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{r} = \cos\tfrac{1}{2}\varphi' \cdot \sqrt{r'}.$$

Nun ist aber in diesem Falle offenbar

$$\varphi' - \varphi = \theta,$$

also

$$\varphi' = \varphi + \theta, \quad \varphi = \varphi' - \theta;$$

folglich

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{r} = \cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\theta) \cdot \sqrt{r'},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi' \cdot \sqrt{r'} = \cos\tfrac{1}{2}(\varphi'-\theta) \cdot \sqrt{r};$$

oder

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r'}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\theta)}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \cos\tfrac{1}{2}\theta - \sin\tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{r}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\theta)}{\cos\frac{1}{2}\varphi'} = \cos\tfrac{1}{2}\theta + \sin\tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi';$$

also

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = -\frac{\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r'}}{\sin\frac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r'}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi' = \frac{\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r}}{\sin\frac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r}}.$$

Weil nun

$$\cos\frac{1}{2}\varphi^2=\frac{1}{1+\tang\frac{1}{2}\varphi^2},\quad \cos\frac{1}{2}\varphi'^2=\frac{1}{1+\tang\frac{1}{2}\varphi'^2}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\cos\frac{1}{2}\varphi^2=\frac{r'\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

$$\cos\frac{1}{2}\varphi'^2=\frac{r\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}};$$

also nach dem Obigen

$$p=\frac{4rr'\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}.$$

Hieraus folgt mittelst leichter Rechnung:

$$4r-p=\frac{4r(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

$$4r'-p=\frac{4r'(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r})^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}$$

und

$$2r+p=2r\frac{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta..\sqrt{rr'}+2r'\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

$$2r'+p=2r'\frac{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2r\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}.$$

Digitized by Google

Weil unter der gemachten Voraussetzung tang $\frac{1}{2}\varphi$ und tang $\frac{1}{2}\varphi'$ beide positiv sind, so sind nach dem Obigen

$$\sqrt{r} - \cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r'}, \quad \sqrt{r'} - \cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r}$$

respective

negativ, positiv;

also nach dem Vorhergehenden

$$\sqrt{4r-p} = -\frac{2(\sqrt{r}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})\sqrt{r}}{\sqrt{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}},$$

$$\sqrt{4r'-p} = \frac{2(\sqrt{r'}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r})\sqrt{r'}}{\sqrt{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}}.$$

Nach gehöriger Substitution in die aus dem Obigen bekannte Formel

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{24}\sqrt{p}.\{(2r'+p)\sqrt{4r'-p}-(2r+p)\sqrt{4r-p}\}$$

ergiebt sich

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}} =$$

$$\frac{r'(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2r\sin\tfrac{1}{2}\theta^2)(\sqrt{r'}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r})\sqrt{r'}}{(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}}$$

$$+\frac{r(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2r'\sin\tfrac{1}{2}\theta^2)(\sqrt{r}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})\sqrt{r}}{(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}}.$$

Der Zähler der Summe der beiden Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist

Digitized by Google

$$(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\{r'(\sqrt{r'}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r})\sqrt{r'} + r(\sqrt{r}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})\sqrt{r}\}$$

$$+2rr'\sin\tfrac{1}{2}\theta^2\{(\sqrt{r'}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r})\sqrt{r'}+(\sqrt{r}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})\sqrt{r}\}$$

$$=(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\{r^2+r'^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}\}$$

$$+2rr'\sin\tfrac{1}{2}\theta^2(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})$$

$$=(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\{r^2+r'^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2rr'\sin\tfrac{1}{2}\theta^2\}$$

$$=(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\{(r+r')^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}-2rr'\cos\tfrac{1}{2}\theta^2\}.$$

Setzt man jetzt

$$(r+r')^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}-2rr'\cos\tfrac{1}{2}\theta^2=0,$$

und löst diese quadratische Gleichung in Bezug auf $r+r'$ als unbekannte Grösse auf, so erhält man

$$r+r'=\begin{cases}2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}\\-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'};\end{cases}$$

also ist

$$(r+r')^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}-2rr'\cos\tfrac{1}{2}\theta^2$$

$$=(r+r'+\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}),$$

und folglich obiger Zähler

$$(r+r'+\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})^2.$$

Daher ist nach dem Obigen

Digitized by Google

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}} = (r+r' + \cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

oder

$$\mathfrak{S} = \tfrac{1}{6}\sqrt{p}.(r+r'+\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}.$$

Weil diese Formel in Bezug auf r und r' völlig symmetrisch ist, so ist es nun nicht mehr nöthig, anzunehmen, dass r' der grössere Radius vector sei, indem man vielmehr in dieselbe jede zwei beliebige auf einer und derselben Seite der Axe der Parabel liegende Vectoren einführen kann. Auch ist es natürlich nicht weiter nöthig anzunehmen, dass r, r' auf der positiven Seite der Axe der Parabel liegen.

Wir wollen nun auch den Fall betrachten, wenn die Vectoren r, r' auf verschiedenen Seiten der Axe der Parabel liegen, und wollen für's Erste grösserer Bestimmtheit wegen annehmen, dass r auf der negativen, r' auf der positiven Seite der Axe der Parabel liege.

Weil in diesem Falle unter der so eben gemachten Voraussetzung offenbar $\cos\frac{1}{2}\varphi$ negativ und $\cos\frac{1}{2}\varphi'$ positiv ist, so ist

$$\sqrt{r} = -\frac{\sqrt{p}}{2\cos\frac{1}{2}\varphi}, \qquad \sqrt{r'} = \frac{\sqrt{p}}{2\cos\frac{1}{2}\varphi'}$$

oder

$$\sqrt{p} = -2\cos\tfrac{1}{2}\varphi.\sqrt{r}, \quad \sqrt{p} = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi'.\sqrt{r'};$$

folglich

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi.\sqrt{r} = -\cos\tfrac{1}{2}\varphi'.\sqrt{r'}.$$

Nun ist aber in diesem Falle offenbar

$$\varphi' + (360^0 - \varphi) = \varphi' - \varphi + 360^0 = \theta,$$

also

$$\varphi' = \varphi + \theta - 360^0, \quad \varphi = \varphi' - \theta + 360^0;$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi' = \tfrac{1}{2}(\varphi+\theta) - 180^0, \quad \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}(\varphi'-\theta) + 180^0;$$

Digitized by Google

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi' = -\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\theta), \quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi = -\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'-\theta);$$

folglich nach dem Obigen

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{r} = \cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\theta) \cdot \sqrt{r'},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi' \cdot \sqrt{r'} = \cos\tfrac{1}{2}(\varphi'-\theta) \cdot \sqrt{r};$$

woraus ganz eben so wie vorher

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = -\frac{\sqrt{r} - \cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r'}}{\sin\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r'}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi' = \frac{\sqrt{r'} - \cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r}}{\sin\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r}};$$

un

$$p = \frac{4rr'\sin\tfrac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{rr'}},$$

so wie

$$4r-p = \frac{4r(\sqrt{r}-\cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r'})^2}{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{rr'}},$$

$$4r'-p = \frac{4r'(\sqrt{r'}-\cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{r})^2}{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{rr'}};$$

und

$$2r+p = 2r\,\frac{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{rr'} + 2r'\sin\tfrac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{rr'}},$$

$$2r'+p=2r'\,\frac{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'}+2r\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'}}$$

folgt.

Weil unter der gemachten Voraussetzung $\tang\frac{1}{2}\varphi$ negativ und $\tang\frac{1}{2}\varphi'$ positiv ist, so ist nach dem Obigen

$$\sqrt{r}-\cos\tfrac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{r'},\quad \sqrt{r'}-\cos\tfrac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{r}$$

respective

positiv, positiv;

also nach dem Vorhergehenden

$$\sqrt{4r-p}=\frac{2(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{r'})\sqrt{r}}{\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'}}},$$

$$\sqrt{4r'-p}=\frac{2(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{r})\sqrt{r'}}{\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'}}}.$$

Nach gehöriger Substitution in die aus dem Obigen bekannte Formel

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{24}\sqrt{p}\,.\,\{(2r'+p)\sqrt{4r'-p}+(2r+p)\sqrt{4r-p}\}$$

ergiebt sich

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}}=$$

$$\frac{r'(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'}+2r\sin\frac{1}{2}\theta^2)(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{r})\sqrt{r'}}{(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'}}}$$

$$+\frac{r(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'}+2r'\sin\frac{1}{2}\theta^2)(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{r'})\sqrt{r}}{(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{rr'}}},$$

Digitized by Google

welches wieder ganz dieselbe Formel wie oben ist. Also ist auch in diesem Falle ganz wie oben

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{6}\sqrt{p}.(r+r'+\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

und da diese Formel in Bezug auf r und r' völlig symmetrisch ist, so ist es nicht nöthig, dass r auf der negativen, r' auf der positiven Seite der Axe der Parabel liege, sondern es kann auch umgekehrt sein.

Als Resultat der ganzen vorigen Betrachtung ergiebt sich, dass, wenn r, r' zwei beliebige Vectoren der Parabel sind, und θ den von diesen beiden Vectoren eingeschlossenen, nach der Seite der Parabel hin liegenden Winkel, der von 0 bis 360° wachsen kann, bezeichnet, in völliger Allgemeinheit der Flächeninhalt des parabolischen Sectors $\mathfrak{S}$ durch die Formel

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{6}\sqrt{p}.(r+r'+\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}$$

dargestellt wird.

Bezeichnet nun s die Sehne der Parabel, welche die Endpunkte der beiden Vectoren r, r' mit einander verbindet, so ist jenachdem

$$0<\theta<180^\circ$$

oder

$$180^\circ<\theta<360^\circ$$

ist, nach den Lehren der ebenen Trigonometrie respective

$$s^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta$$

oder

$$s^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(360^\circ-\theta);$$

also allgemein

$$s^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta,$$

und folglich

$$\cos\theta=\frac{r^2+r'^2-s^2}{2rr'}.$$

also

Digitized by Google

$$2\cos\frac{1}{2}\theta^2 = 1 + \frac{r^2+r'^2-s^2}{2rr'} = \frac{(r+r')^2-s^2}{2rr'},$$

folglich

$$\cos\frac{1}{2}\theta^2 = \frac{(r+r')^2-s^2}{4rr'},$$

und hieraus, wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem

$$0 < \theta < 180^0$$

oder

$$180^0 < \theta < 360^0$$

ist:

$$\cos\frac{1}{2}\theta = \pm\frac{\sqrt{(r+r')^2-s^2}}{2\sqrt{rr'}},$$

oder

$$\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(r+r')^2-s^2},$$

$$2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'} = \pm\sqrt{(r+r')^2-s^2}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{12}\sqrt{p}.|2(r+r') \pm \sqrt{(r+r')^2-s^2}|\sqrt{r+r' \mp \sqrt{(r+r')^2-s^2}},$$

wenn man immer die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der von den Vectoren r, r' nach der Seite der Parabel hin eingeschlossene Winkel ein concaver oder ein convexer Winkel ist, was auch im Folgenden stets festgehalten werden soll.

Nun setze man

$$\sqrt{r+r' \mp \sqrt{(r+r')^2-s^2}} = \sqrt{x} \mp \sqrt{y},$$

so ist, wenn man auf beiden Seiten quadrirt:

$$r+r' \mp \sqrt{(r+r')^2-s^2} = x+y \mp 2\sqrt{x}.\sqrt{y},$$

und folglich durch Vergleichung der rationalen und irrationalen Theile auf beiden Seiten:

Digitized by Google

$$x+y=r+r', \quad 4xy=(r+r')^2-s^2;$$

also

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=s^2,$$

woraus, indem jetzt keine Beziehung der Zeichen zu den obigen Statt finden soll,

$$x-y=\pm s$$

folgt, so dass man folglich die beiden Gleichungen

$$x+y=r+r', \quad x-y=\pm s$$

hat, aus denen sich

$$x=\frac{r+r'\pm s}{2}, \qquad y=\frac{r+r'\mp s}{2}$$

ergiebt. Da nun im Obigen

$$\sqrt{r+r'\mp\sqrt{(r+r')^2-s^2}}$$

positiv genommen ist, so muss man

$$\sqrt{r+r'\mp\sqrt{(r+r')^2-s^2}}=\sqrt{\frac{r+r'+s}{2}}\mp\sqrt{\frac{r+r'-s}{2}}$$

setzen, weil von

$$\sqrt{\frac{r+r'-s}{2}}\mp\sqrt{\frac{r+r'+s}{2}}$$

das obere Zeichen einen negativen Werth liefert, der hier, eben weil

$$\sqrt{r+r'\mp\sqrt{(r+r')^2-s^2}}$$

positiv genommen worden ist, nicht statthaft ist.

Dies vorausgesetzt kann man nun leicht $\mathfrak{S}$ auf folgende Art ausdrücken:

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{6}\sqrt{p}\cdot\left\{\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)+\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)\pm\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$\times\left\{\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mp\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\};$$

also ist, wenn man multiplicirt:

Digitized by Google

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}}$$

$$= \left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{r+r'-s}{2}\right)\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{r+r'+s}{2}\right)\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mp \left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{r+r'-s}{2}\right)\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mp \left(\frac{r+r'+s}{2}\right)\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d. i.

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}} = \left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \mp \left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$\mathfrak{S} = \frac{\sqrt{p}}{6} \cdot \left\{\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \mp \left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

oder auch

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}} \cdot \{(r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}}\}.$$

Dies ist der merkwürdige Ausdruck für den Flächeninhalt eines parabolischen Sectors, welcher gewöhnlich nach Lambert benannt wird, aber eigentlich, wie wir oben bereits bemerkt haben, schon früher von Euler gefunden worden ist. Ausser dem Parameter der Parabel ist also bloss die Kenntniss der beiden einen parabolischen Sector begränzenden Vectoren und der dem denselben gleichfalls begrenzenden Bogen der Parabel angehörenden Sehne nöthig, um dessen Flächeninhalt mittelst der Lambert'schen Formel berechnen zu können.

Digitized by Google

XL.

Bestimmung der Länge der auf einen Kegel gewickelten Schraubenlinie.

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Eine Gerade bewege sich um eine andere, indem sie mit ihr beständig denselben Winkel α macht und sie beständig in demselben Punkte trifft. Auf ihr bewegt sich ein Punkt gegen letztere hin: welches ist die von ihm beschriebene Kurve, wenn beide Bewegungen gleichförmig sind?

Die fragliche Kurve ist eben die in der Aufschrift genannte. Sei also γ die Winkelgeschwindigkeit der bewegten Geraden, β die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, und nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem so an, dass die feste Gerade darin die Axe der z ist; die Ebene der xy sei so gewählt, dass der bewegliche Punkt anfänglich in ihr liegt; ferner sei die Axe der x so genommen, dass die bewegliche Gerade anfänglich in der Ebene der xz, also der bewegliche Punkt in der (positiven) Axe der x, und die (positive) Axe der y sei so gewählt, dass die Bewegung der Geraden von der positiven Axe der x gegen die positive Axe der y geht.

Am Ende der Zeit t liegt die bewegliche Gerade so, dass ihre Projektion mit der Axe der x den Winkel γt macht, während der bewegliche Punkt in ihr um die Länge βt gegen den festen Punkt gegangen ist. Sei (Taf. IX. Fig. 5.) O der Anfangspunkt der Koordinaten, OB die Projektion der beweglichen Geraden (am Ende der Zeit t) auf die Ebene der xy, so macht die bewegliche Gerade selbst

Digitized by Google

mit der Ebene der xy den Winkel $\frac{\pi}{2}-\alpha$, ferner ist $xOB=\gamma t$. Ist also die Entfernung des Durchschnittspunktes der beweglichen Geraden mit der Axe der z von O gleich a, so ist die Länge jener Geraden gleich $\frac{a}{\cos\alpha}$, die von OB: $a\operatorname{tg}\alpha$. Ist D die Projektion des beweglichen Punktes auf die Ebene der xy in derselben Zeit, so ist $BD=\beta t.\sin\alpha$, also $CD=a\operatorname{tg}\alpha-\beta\sin\alpha.t$. Sind also x, y, z die Koordinaten des beweglichen Punktes am Ende der Zeit t, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} x &= (a\operatorname{tg}\alpha-\beta t\sin\alpha)\cos(\gamma t),\\ y &= (a\operatorname{tg}\alpha-\beta t\sin\alpha)\sin(\gamma t),\\ z &= \beta t.\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Durch Elimination von t erhält man die (zwei) Gleichungen der beschriebenen Kurve (Schraubenlinie.) Aus der letztern Gleichung ergiebt sich:

$$t=\frac{z}{\beta\cos\alpha},$$

so dass die Gleichungen der Schraubenlinie sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= (a-z)\operatorname{tg}\alpha.\cos\left(\frac{\gamma z}{\beta\cos\alpha}\right),\\ y &= (a-z)\operatorname{tg}\alpha.\sin\left(\frac{\gamma z}{\beta\cos\alpha}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Eben so erhält man hieraus:

$$\left(\frac{x}{a-z}\right)^2+\left(\frac{y}{a-z}\right)^2=\operatorname{tg}^2\alpha, \quad (3)$$

als Gleichung der von der bewegten Geraden beschriebenen Kegelfläche.

Soll die Schraubenlinie auf einem Zylinder vom Halbmesser r sein, so ist $a=\infty$, $a\operatorname{tg}\alpha=r$, $\alpha=0$, also

$$\left.\begin{aligned} &x=r\cos(\gamma t),\ y=r\sin(\gamma t),\ z=\beta t;\\ &x=r\cos\left(\frac{\gamma z}{\beta}\right),\quad y=r\sin\left(\frac{\gamma z}{\beta}\right),\\ &x^2+y^2=r^2. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Der Weg, den der bewegliche Punkt zurücklegt, während die bewegliche Gerade eine Umdrehung vollendet, heisst die **Höhe des Schraubengangs.**

Digitized by Google

Nun erfolgt eine vollständige Umdrehung in der Zeit $\frac{2\pi}{\gamma}$, demnach ist die Höhe des Schraubengangs $\frac{2\beta\pi}{\gamma}$. Heisst man dieselbe h, so ist

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{h}{2\pi},\quad \frac{\gamma}{\beta}=\frac{2\pi}{h};$$

also sind die Gleichungen der Schraubenlinie (2):

$$\left.\begin{aligned} x&=(a-z)\mathrm{tg}\alpha\,.\cos\left(\frac{2\pi z}{h\cos\alpha}\right),\\ y&=(a-z)\,\mathrm{tg}\alpha\,.\sin\left(\frac{2\pi z}{h\cos\alpha}\right);\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

die der (4):

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right),\\ y&=r\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{2\pi}{h}=k$, so ergiebt sich aus (5):

$$1+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2=\frac{1+k^2\mathrm{tg}^2\alpha(a-z)^2}{\cos^2\alpha},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\frac{\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2\alpha(a-z)^2}}{\cos\alpha};$$

somit die Länge des Bogens der Kurve, wenn er von $z=0$ an gerechnet wird:

$$\frac{1}{\cos\alpha}\int_0^z\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2\alpha(a-z)^2}\,\partial z\,.$$

Setzt man $a-z=y$, $z=a-y$, so ist dieselbe:

$$-\int_a^y\sqrt{1+k^2\,\mathrm{tg}^2\alpha y^2}\,\partial y\,.$$

Integrirt man, so ergiebt sich als fragliche Länge:

Digitized by Google

$$\frac{a}{2}\sqrt{1+k^2a^2\mathrm{tg}^2\alpha} - \frac{a-z}{2}\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2\alpha.(a-z)^2}$$

$$+ \frac{1}{2k\mathrm{tg}\alpha}\log\left(\frac{ak\mathrm{tg}\alpha+\sqrt{1+a^2k^2\mathrm{tg}^2\alpha}}{(a-z)k\mathrm{tg}\alpha+\sqrt{1+(a-z)^2k^2\mathrm{tg}^2\alpha}}\right). \qquad (7)$$

Will man die Länge der Schraubenlinie bis zum vollendeten $n$ten Umlaufe (n auch eine gebrochene Zahl), so hat man $z=\frac{2n\pi}{k}\cos\alpha$ zu setzen. Die vorkommenden Logarithmen sind natürliche.

Für den Fall des Zylinders ist $a\mathrm{tg}\alpha=r$, $\alpha=0$, $a=\infty$, also die Länge:

$$\int_0^z \sqrt{1+k^2r^2}\partial z = \sqrt{1+k^2r^2}\,.\,z, \qquad (8)$$

wie bekannt.

Für $z=a$ hört die Kurve in der Spitze des Kegels auf; also ist ihre ganze Länge:

$$\frac{a}{2}\sqrt{1+a^2k^2\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{1}{2k\mathrm{tg}\alpha}\log\left(ak\mathrm{tg}\alpha+\sqrt{1+a^2k^2\mathrm{tg}^2\alpha}\right). \qquad (9)$$

Man findet leicht, dass die Tangente an die Kurve (2) im Punkte (x, y, z) mit der durch denselben Punkt gehenden Lage der beweglichen Geraden einen Winkel δ macht, bestimmt durch die Gleichung

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2\alpha(a-z)^2}}, \qquad (10)$$

und im Falle der Kurve (4):

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2r^2}}, \qquad (11)$$

dessgleichen, dass die Normale an die Kegelfläche (3) in diesem Punkte senkrecht auf der Tangente der Kurve in demselben Punkte steht.

Wenn man die Kegelfläche in eine Ebene abwickelt, so legt sich die Schraubenlinie ebenfalls in die Ebene. Ihre Gleichung findet sich folgendermassen.

Die Linie AB (Taf. IX. Fig. 6.) drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma\sin\alpha$ um A, während B gegen A mit der Geschwindigkeit β hin-

Digitized by Google

schreitet. Die entstandene Kurve ist die Abwickelung der Schraubenlinie, wenn man die einzelnen Theile dieser Kurve, statt fortlaufend an einander zu liegen, von einander trennt. Denkt man sich nämlich B als Anfangspunkt und beschreibt mit AB einen Kreis, so wird die so eben gesuchte Kurve ein oder mehrere Umläufe machen, bis sie in A ankommt. Man wähle nun zwei Linien AB, AD so, dass der Bogen $BD=2a\pi\mathrm{tg}\alpha$ (dem Umfang der Grundfläche des Kegels), lege nun nach einander an AD u. s. f. um A Winkel gleich BAD, und lege die zwischen ihnen befindlichen Stücke der Kurve in derselben Lage in den Winkel BAD, so werden diese Stücke die Abwickelungen der Schraubenlinie sein, während die Fläche ABD die Abwickelung der Kegelfläche ist. Da der Punkt B den Weg $2a\pi\mathrm{tg}\alpha$ macht in derselben Zeit, in der oben eine Umdrehung der Linie AB statt hatte, so lässt sich leicht die Winkelgeschwindigkeit von AB bestimmen. Sei nämlich τ diese Zeit, so ist

$$a\gamma\mathrm{tg}\alpha\,.\,\tau=2a\pi\mathrm{tg}\alpha,\quad \tau=\frac{2\pi}{\gamma}.$$

Ist nun γ' die Winkelgeschwindigkeit von AB in dieser letzten Bewegung, so ist, da $AB=\frac{a}{\cos\alpha}$:

$$\frac{a}{\cos\alpha}\gamma'\,.\,\tau=2a\pi\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\tau=\frac{2\pi\sin\alpha}{\gamma'},$$

demnach

$$\frac{2\pi\sin\alpha}{\gamma'}=\frac{2\pi}{\gamma},\quad \gamma'=\gamma\sin\alpha, \qquad (12)$$

wie oben angegeben wurde.

Nehmen wir A als Anfangspunkt von Polarkoordinaten, und sei AC die Lage der erzeugenden Linie am Ende der Zeit t, so ist die Lage von B (B') bestimmt durch

$$\text{Winkel } BAC=\gamma\sin\alpha\,.\,t,$$

$$AB'=\frac{a}{\cos\alpha}-\beta t;$$

also, wenn $BAC=\varrho$, $AB'=r$:

$$\varrho=\gamma\sin\alpha\,.\,t,\quad r=\frac{a}{\cos\alpha}-\beta t;$$

Digitized by Google

$$r = \frac{a}{\cos\alpha} - \frac{\varrho}{k\sin\alpha}, \qquad (13)$$

eine archimedische Spirale.

Ihre Länge findet sich:

$$\frac{1}{k\sin\alpha}\int_0^{\varrho}\sqrt{(ak\,\mathrm{tg}\alpha - \varrho)^2 + 1}\,\partial\varrho\,. \qquad (14)$$

Um die einem Umgang entsprechende Länge zu finden, muss man von $\varrho = 0$ bis $\varrho = 2\pi\sin\alpha$ integriren.

Man setze $\varrho = k\,\mathrm{tg}\alpha . x$, so erhält man aus (14):

$$\frac{1}{\cos\alpha}\int_0^{x}\sqrt{1 + k^2\mathrm{tg}^2\alpha\,(a-x)^2}\,\partial x\,, \qquad (15)$$

und um die Länge eines Umgangs zu finden, muss $x = \frac{2\pi\cos\alpha}{k}$ gesetzt werden. Da diess genau mit Obigem zusammenstimmt, so folgt daraus, das die Kurve sich unverkürzt abwickelt, was zu erwarten war.

Digitized by Google

XLI.

Ueber die Bestimmung des Mittelpunktes einer Fläche zweiten Grades.

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Stellt

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Jz=K$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades dar, so werden, wenn diese Fläche einen Mittelpunkt hat, die Koordinaten desselben x_0, y_0, z_0 durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x_0=-\frac{(BC-D^2)G+(DE-CF)H+(DF-BE)J}{ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF},$$

$$y_0=-\frac{(DE-CF)G+(AC-E^2)H+(EF-AD)J}{ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF},$$

$$z_0=-\frac{(DF-BE)G+(EF-AD)H+(AB-F^2)J}{ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF}$$

Ist nun der Nenner dieser Ausdrücke nicht Null, so hat die Fläche einen Mittelpunkt. Sie hat aber deren unendlich viele, wenn zwar der Nenner Null, zugleich aber alle drei Zähler auch Null sind. Nun ist aber, sobald der Nenner Null und einer der Zähler Null, jeder der zwei anderen Zähler Null.

Heissen nämlich die drei Zähler Z_1, Z_2, Z_3, der Nenner N, so findet man leicht, dass

Digitized by Google

$$AZ_1+FZ_2+EZ_3=-GN,$$

$$FZ_1+BZ_2+DZ_3=-HN,$$

$$EZ_1+DZ_2+CZ_3=-JN.$$

Ist nun z. B. nebst $N=0$ auch $Z_3=0$, so folgt hieraus:

$$AZ_1+FZ_2=0,$$

$$FZ_1+BZ_2=0,$$

$$EZ_1+DZ_2=0;$$

woraus nothwendig $Z_1=Z_2=0$, was den Satz beweist.

In diesem Falle liegen die Mittelpunkte zuweilen in geraden Linien (bei zylindrischen Flächen).

Als Beispiel wollen wir die Fläche

$$b^2x^2+a^2y^2+(4b^2+9a^2)z^2-6a^2yz-4b^2xz=a^2b^2$$

betrachten. Hier ist:

$$A=b^2,\ B=a^2,\ C=4b^2+9a^2,\ D=-3a^2,\ E=-2b^2,$$
$$F=G=H=J=0,\quad K=a^2b^2.$$

Also $Z_1=Z_2=Z_3=N=0$. Denken wir uns aber zuerst $G=H=J$, so ergiebt sich:

$$\frac{x_0}{z_0}=\frac{(BC-D^2)+(DE-CF)+(DF-BE)}{DF-BE+EF-AD+AB-F^2}=2,$$

$$\frac{y_0}{z_0}=\frac{DE-CF+AC-E^2+EF-AD}{DF-BE+EF-AD+AB-F^2}=3;$$

d. h. alle Mittelpunkte liegen auf der Geraden, deren Gleichungen

$$x=2z,\quad y=3z$$

sind. Die Fläche selbst ist ein elliptischer Zylinder.

Digitized by Google

XLII.

Eigenschaften der geraden Kegel und Kegelstumpfe mit sphärisch gekrümmten Grundflächen.

Von dem

Herrn Schulrath J. H. T. Müller

zu Wiesbaden.

Wenn man aus zwei Gegenpunkten einer Kegelfläche mit den sphärischen Radien ϱ', ϱ'' zwei Kugelkreise G', G'' beschreibt, so sind durch die Umfänge dieser Kreise zwei gerade konische Flächen bestimmt, welche die durch jene Punkte gehende Gerade zur gemeinschaftlichen Axe haben, so dass der Mittelpunkt der einen konischen Fläche ausserhalb, und der der andern innerhalb der Kugel liegt.

Hier soll von derjenigen konischen Fläche ausgegangen werden, welche ihren Mittelpunkt ausserhalb der Kugel hat, und zugleich $\varrho' > \varrho''$ angenommen sein. Die Eigenschaften der andern Fläche ergeben sich später sogleich aus denen der ersten, wenn ϱ'' negativ genommen wird.

Aus jener Verbindung des konischen Raumes mit der Kugel entstehen:

1. zwei Kegel $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ mit den sphärisch gekrümmten Grundflächen G', G'', deren Axen sich um den Kugeldurchmesser unterscheiden,

2. und ein Kegelstumpf $\mathfrak{C}$ mit den beiden sphärischen Grundflächen G' und G'', welcher den Kugeldurchmesser zur Axe hat und dem Unterschiede jener beiden Kegel gleich ist.

Digitized by Google

3. Der Halbmesser, die Oberfläche, der Inhalt der Kugel soll immer mit

$$r, \quad K, \quad \mathfrak{K}$$

bezeichnet werden.

4. Legt man durch die Peripherien der Kugelkreise G', G'' Ebenen, so sind die Höhen der zugehörigen Kugelabschnitte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ gleich

$$r(1-\cos\varrho'), \quad r(1-\cos\varrho'');$$

folglich ist

$$G' = 4\pi r^2 . \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 = \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 . K;$$

$$G'' = 4\pi r^2 . \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 = \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 . K.$$

Hieraus erhält man die Kugelkegel, welche G' und G'' zu Grundflächen und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze haben, gleich

$$\frac{4}{3}\pi r^3 . \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 = \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 . \mathfrak{K};$$

und

$$\frac{4}{3}\pi r^3 . \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 = \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 . \mathfrak{K}.$$

Werden diese um die zugehörigen Kegel mit ebenen Grundflächen vermindert, so erhält man:

5. Die Kugelabschnitte

$$\mathfrak{A}' = \frac{1}{3}\pi r^3 (4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 - \sin\varrho'^2\cos\varrho');$$

$$\mathfrak{A}'' = \frac{1}{3}\pi r^3 (4\sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 - \sin\varrho''^2\cos\varrho'').$$

Da $4\sin\frac{1}{2}\varrho^2 = 1-\cos\varrho$, so ist

$$4\sin\frac{1}{2}\sin\varrho^2 - \sin\varrho^2\cos\varrho = 2 - 3\cos\varrho + \cos\varrho^3$$
$$= (2+\cos\varrho)(1-\cos\varrho)^2,$$

folglich auch

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{3}\pi r^3 . (2+\cos\varrho)(1-\cos\varrho)^2$$

oder

Digitized by Google

$$\mathfrak{A} = \sin\tfrac{1}{2}\varrho^4(2+\cos\varrho)\,.\,\mathfrak{K}.$$

6. Der Kegelstumpf mit den ebenen Grundflächen G_1, G_{11}, deren Peripherien mit denen von G' und G'' zusammenfallen, ist, wie man sich alsbald überzeugt,

$$= \frac{1}{3}\pi r^3(\cos\varrho' + \cos\varrho'')(\sin\varrho'^2 + \sin\varrho'\sin\varrho'' + \sin\varrho''^2).$$

Wird dieser um die beiden Kugelabschnitte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ vermehrt, so entsteht unser Kugelkegelstumpf $\mathfrak{C}$ und man erhält nach Division mit $\frac{1}{3}\pi r^3$:

$$\frac{3}{\pi r^3}\cdot\mathfrak{C} = (\cos\varrho'+\cos\varrho'')(\sin\varrho'^2+\sin\varrho'\sin\varrho''+\sin\varrho''^2)$$
$$+ 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 - \sin\varrho'^2\cos\varrho' + 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 - \sin\varrho''^2\cos\varrho'',$$

und, nachdem man das Product entwickelt und das Ganze vereinfacht hat,

$$\frac{3}{\pi r^3}.\mathfrak{C} = \sin(\varrho'+\varrho'')(\sin\varrho'+\sin\varrho'') + 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 + 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\varrho+\varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'').2\sin\tfrac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')$$
$$+ 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 + 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2.$$

Da

$$\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 + \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 = \frac{1-\cos\varrho'}{2} + \frac{1-\cos\varrho''}{2}$$
$$= 1 - \cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho''),$$

so ist, wenn die Gleichung durch 4 dividirt worden, weil $\frac{4}{3}\pi r^3 = \mathfrak{K}$ ist,

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{K}} = \sin\tfrac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')^2\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho')\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')$$
$$+ 1 - \cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')$$
$$= 1 - \cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')^2\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'').$$

Es ist demnach

$$\mathfrak{C} = \{1 - \cos\tfrac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')^2\cos\tfrac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')\}\,.\,\mathfrak{K},$$

Digitized by Google

d. i. Der Inhalt eines Kugelkegelstumpfs wird gefunden, wenn man die dritte Potenz des Cosinus der halben Summe der Radien beider Grundflächen mit dem Cosinus des halben Unterschieds derselben multiplicirt und diesem von 1 subtrahirten Producte die zugehörige Kugel zur Einheit giebt.

Denkt man sich diesen Stumpf aus der Kugel herausgeschnitten, so bleibt ein von einer Kugel- und einer Kegel-Zone begrenztes Zweiflach übrig, dessen Inhalt

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')^3\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'').\mathfrak{K}$$

durch eine sehr einfache Formel gegeben ist.

7. Um den zu denselben Grundflächen gehörigen Kegelstumpf zu finden, dessen Seitenkanten einander unverlängert schneiden, setze man ϱ'' negativ, wodurch man

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')^3.\mathfrak{K}$$

erhält.

Demnach ist für diesen Fall das Product aus dem Cosinus der halben Summe der Radien in die dritte Potenz des Cosinus ihres halben Unterschieds der Coefficient der Kugel.

8. Wird in (6) $\varrho'=\varrho''=\varrho$ gesetzt, so erhält man einen Kugelcylinder, dessen Axe durch den Kegelmittelpunkt geht, und es wird

$$\mathfrak{C}=(1-\cos\varrho^3).\mathfrak{K}.$$

Der Kugelcylinder ist daher gleich der Kugel multiplicirt mit der Ergänzung der dritten Potenz des Cosinus vom Grundflächenradius zu 1.

Wird aus der Kugel ein Kugelcylinder herausgeschnitten, dessen Grundflächenradius $=60^0$ ist, so ist die so ausgehöhlte Kugel acht mal so klein als die Kugel selbst.

9. Macht man dagegen in (7) $\varrho'=\varrho''=\varrho$, so entsteht ein Kugelkegelstumpf, dessen Seiten einander im Mittelpunkte der Kugel halbiren und es ist dann

$$\mathfrak{C}=(1-\cos\varrho)\mathfrak{K}=2\sin\tfrac{1}{2}\varrho^2.\mathfrak{K}.$$

Die auf solche Weise ausgehöhlte Kugel ist demnach der mit dem Cosinus des Grundflächenhalbmessers multiplicirten Kugel gleich. Vergl. (4.)

Für $\varrho=60^0$ sind also beide Körper einander gleich.

Digitized by Google

10. Setzt man $\varrho''=0$, so entsteht ein Kugelkegel, dessen Spitze im Gegenpunkte des Mittelpunkts von G' liegt. Hiernach wird

$$\mathfrak{C}=(1-\cos\tfrac{1}{2}\varrho^4).\mathfrak{K}=\tfrac{1}{4}(1-\cos\varrho)(3+\cos\varrho).\mathfrak{K}.$$

Für $\varrho=90^0$ wird $\mathfrak{C}=\frac{3}{4}\mathfrak{K}$, für $\varrho=60^0$ wird $\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=\frac{3}{4}\pi r^3$.

11. Wenn in (6) die Seitenkante des Kegelstumpfs mit $2s$ bezeichnet wird, so ergiebt sich leicht, dass

$$4s^2=2r^2(1+\cos(\varrho'+\varrho'')),$$

oder

$$s=r\cos\tfrac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')$$

ist.

Die Verbindung dieser Gleichung mit

$$\mathfrak{C}=\{1-\cos^3\tfrac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\tfrac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')\}\cdot\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

giebt

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=4\cos\tfrac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\tfrac{1}{2}(\varrho'-\varrho'').\tfrac{1}{3}r.\pi s^2.$$

Es ist daher der ausgehöhlte Körper einem Kegel gleich, welcher die Seitenkante des Stumpfes zum Grundflächendurchmesser und den Kugelradius zur Höhe hat, wenn man diesen Kegel mit dem vierfachen Producte der Cosinus der halben Summe und der halben Differenz der Grundflächenhalbmesser multiplicirt.

Da

$$2\cos\tfrac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\tfrac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')=\cos\varrho'+\cos\varrho''$$

und

$$r\cos\varrho'+r\cos\varrho''$$

gleich der mit a zu bezeichnenden Höhe des Kegelstumpfs mit ebenen Grundflächen ist, so hat man auch

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=2.\tfrac{1}{3}a.\pi s^2.$$

Digitized by Google

Darnach ist die konisch ausgehöhlte Kugel doppelt so gross als ein gewöhnlicher Kegel, welcher die Seitenkante des Stumpfes zum Durchmesser der Grundfläche und den Abstand beider Kreisebenen zur Höhe hat.

12. Geht der Stumpf in einen Kugelcylinder über, so wird in (11) ... $a = 2s$ und man erhält

$$\mathfrak{K} - \mathfrak{C} = \frac{4}{3}\pi s^3.$$

Die cylindrisch ausgehöhlte Kugel ist also einer Kugel gleich, welche die Seitenkante des Cylinders zum Durchmesser hat.

13. Es bleiben jetzt noch die beiden Ergänzungskegel des Kugelkegelstumpfs zu betrachten, welche entstehen, wenn der Mantel des letztern bis zum Durchschnittspunkte erweitert wird, und von denen der erste $\mathfrak{C}'$ den convexen Kugelkreis G', der andere $\mathfrak{C}''$ den concaven G'' zur Grundfläche hat.

Die zugehörigen Kegel mit ebenen Grundflächen G_1, G_{11} seien $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_{11}$ und ihre Höhen a_1, a_{11}, folglich $a_1 - a_{11} = a$. Vergl. (11.).

Dann ist

$$a = (\cos\varrho' + \cos\varrho'')r$$

und die Halbmesser von G_1, G_{11} $= r\sin\varrho'$, $r\sin\varrho''$ und man erhält

$$a_1 = \frac{\cos\varrho' + \cos\varrho''}{\sin\varrho' - \sin\varrho''} \cdot r\sin\varrho' = \sin\varrho' \cot\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'') \cdot r,$$

$$a_{11} = \frac{\cos\varrho' + \cos\varrho''}{\sin\varrho' - \sin\varrho''} \cdot r\sin\varrho'' = \sin\varrho'' \cot\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'') \cdot r.$$

Daher sind die ebengrundflächigen Ergänzungskegel

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{1}{3}\pi r^3 \sin\varrho'^3 \cot\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho''),$$

$$\mathfrak{C}_{11} = \frac{1}{3}\pi r^3 \sin\varrho''^3 \cot\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'').$$

Wird $\mathfrak{C}_1$ um den Kugelabschnitt $\mathfrak{A}'$ vermehrt und $\mathfrak{C}_{11}$ und $\mathfrak{A}''$ vermindert, so erhält man die gesuchten Kugelkegel $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ und es ist, wenn man (5) benutzt, und beiderseits durch $\frac{1}{3}\pi r^3$ dividirt:

$$\frac{3}{\pi r^3} \cdot \mathfrak{C}' = \frac{\cos\varrho' + \cos\varrho''}{\sin\varrho' - \sin\varrho''} \cdot \sin\varrho'^3 + 4\sin\tfrac{1}{4}\varrho'^2 - \sin\varrho'^2\cos\varrho'.$$

Digitized by Google

Wird rechts das dritte Glied auf den Nenner des ersten gebracht, so erhält man

$$\frac{3}{\pi r^3}\,\mathfrak{C} = \frac{\sin(\varrho'+\varrho'')}{\sin\varrho'-\sin\varrho''}.\sin\varrho'^2+4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2,$$

und durch eine leichte Umformung des Coefficienten von $\sin\varrho'^2$:

$$\frac{3}{\pi r^3}.\mathfrak{C}' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}.\sin\varrho'^2+4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2.$$

Daher, wenn man noch $\sin\varrho'^2$ verwandelt:

$$\mathfrak{C}' = \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\cos\frac{1}{2}\varrho'^2+1\right\}.\mathfrak{K},$$

$$\mathfrak{C}'' = \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\cos\frac{1}{2}\varrho''^2-1\right\}.\mathfrak{K}.$$

Wenn man den Sinus der halben Summe der Grundflächenhalbmesser durch den Sinus ihres halben Unterschieds dividirt, so erhält man, für die Kugel als Einheit, den Inhalt jedes der beiden Ergänzungskegel, wenn man jenen Quotienten mit dem Quadrate des Cosinus der Hälfte des zugehörigen Radius multiplicirt und dieses um 1 vermehrte oder verminderte Product mit dem Quadrate des Sinus der Hälfte desselben Radius multiplicirt.

14. Wird in (13) . . ϱ'' negativ genommen, so erhält man das andere zu denselben Grundflächen gehörige Paar von Kugelkegeln, wodurch sich hier bloss der Quotient beider Sinus umkehrt.

15. Da nach (4) $\sin\frac{1}{2}\varrho^2.\mathfrak{K}$ den Inhalt eines Kugelkegels giebt, welcher ϱ zum Grundflächenhalbmesser und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat: so werden, wenn man in (13) die erste Endgleichung um $\sin\frac{1}{2}\varrho'^2.\mathfrak{K}$ vermindert, die zweite aber um $\sin\frac{1}{2}\varrho''^2.\mathfrak{K}$ vermehrt, zwei Doppelkegel ϑ', ϑ'' entstehen, deren gemeinschaftliche Spitzen der Kegelmittelpunkt und die Spitze der Ergänzungskegel sind und welche beziehungsweise die Peripherie von G', G'' zur Randkante haben.

Der Inhalt derselben ist

$$\vartheta' = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\sin\varrho'^2.\mathfrak{K},$$

$$\vartheta'' = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\sin\varrho''^2.\mathfrak{K}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta''} = \frac{\sin\varrho'^2}{\sin\varrho''^2}.$$

Es verhalten sich daher diese Doppelkegel wie die Quadrate der Sinus der sphärischen Halbmesser, mit denen ihre Kanten beschrieben worden.

Das andere Paar von Doppelkegeln wird eben so behandelt.

16. Ergänzen die sphärischen Halbmesser ϱ', ϱ'' der Grundflächen der Kugelkegel $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ einander zu 180^0, so wird die äussere konische Fläche eine Berührungsfläche an die Kugel, und man erhält alsdann, nachdem die Endgleichungen in (13) durch $\mathfrak{K}$ dividirt worden,

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{K}} = \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 \left\{ \frac{1}{-\cos\varrho'} \cdot \cos\frac{1}{2}\varrho'^2 + 1 \right\}$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 . \frac{\cos\frac{1}{2}\varrho'^2 - \cos\varrho'}{-\cos\varrho'},$$

und wenn man im Zähler $\cos\varrho'$ durch $\cos\frac{1}{2}\varrho'^2 - \sin\frac{1}{2}\varrho'^2$ ersetzt,

$$\mathfrak{C} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\varrho''^4}{\cos\varrho'} \cdot \mathfrak{K},$$

$$\mathfrak{C}'' = -\frac{\cos\frac{1}{2}\varrho''^4}{\cos\varrho'} \cdot \mathfrak{K}.$$

In diesem Falle muss $\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}'' = \mathfrak{K}$ sein.

17. Für die innern Kegel geht, wenn $\varrho' + \varrho'' = 180^0$ wird, die konische Fläche in eine Ebene über und die Kugelkegel werden zu Kugelabschnitten, deren Summe der Kugel gleich ist.

18. Werden die Axen der Kugelkegel $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ mit a', a'' bezeichnet, so erhält man aus (12) und (4) für die äussern Kegel:

$$\frac{a'}{r} = \frac{\cos\varrho' + \cos\varrho''}{\sin\varrho' - \sin\varrho''}, \quad \sin\varrho' + 1 - \cos\varrho'$$

$$= \frac{\sin(\varrho' + \varrho'') + \sin\varrho' - \sin\varrho''}{\sin\varrho' - \sin\varrho''}.$$

$$a' = 2 . \frac{\sin\frac{1}{2}\varrho' \cos\frac{1}{2}\varrho''}{\sin\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'')} r,$$

$$a'' = 2 . \frac{\cos\frac{1}{2}\varrho' \sin\frac{1}{2}\varrho''}{\sin\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'')} r.$$

Digitized by Google

19. Ist p die Spitze des äussern und q die des innern Kugelkegelpaares, sowie o der Mittelpunkt der Kugel, so ist $op=b$ die gemeinschaftliche Axe der Doppelkegel ϑ', ϑ'', und man hat $b=a'-r=a''+r$. Daher ist aus (18) nach einer leichten Umformung

$$b=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\cdot r,$$

und für $oq=c$

$$c=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}\cdot r,$$

woraus die geometrische Bedeutung der in (13) und (15) vorkommenden Sinusquotienten hervorgeht.

Auch folgt augenblicklich aus diesen beiden Gleichungen,

dass das Rechteck aus den Axen op, oq der beiden Doppelkegelpaare gleich dem Quadrate des Kugelhalbmessers ist.

20. Endlich sind noch die Seitenkanten $2s'$, $2s''$ der äussern Ergänzungskegel zu bestimmen. Sie ergeben sich leicht, wenn man sich erinnert, dass in (11)

$$s=r\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')$$

war. Man erhält nämlich für die

äussern	innern
Ergänzungskegel	
$s'=\frac{\sin\varrho'}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}r$	$s'=\frac{\sin\varrho'}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}r,$
$s''=\frac{\sin\varrho}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}r$	$s''=\frac{\sin\varrho'}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}r;$

aus deren Verbindung sich wiederum die in (19) vorkommenden Sinusquotienten ergeben.

Diese einfachen Beziehungen zwischen einem konischen Raume und der Kugel, deren Zahl sich leicht vermehren liesse, bedürfen zu ihrer Herleitung bloss der Bekanntschaft mit den Elementen der Stereometrie und der Goniometrie und eignen sich dadurch zu in sich zusammenhängenden Uebungen, ähnlich den in den „Geometrischen Ausläufern“ von mir zusammengestellten. Mit dieser Bemerkung möge die Mittheilung dieser Kleinigkeit gerechtfertigt sein.

Digitized by Google

XLIII.

Ueber die Bestimmung der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung.

(Nach Abel Transon, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Février et Mars 1850.)

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule za Carlsruhe.

---

§. 1.

Seien $F(x)$, $\varphi(x)$ ganze Funktionen von x; a, b, c,..... die (n) Wurzeln der Gleichung

$$F(x)=0, \qquad (1)$$

so ist bekanntlich

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\ldots\ldots \qquad (2)$$

Multiplicirt man nun beiderseitig mit $\varphi(x)$, so erhält man

$$\frac{F'(x).\varphi(x)}{F(x)}=\frac{\varphi(x)}{x-a}+\frac{\varphi(x)}{x-b}+\ldots.=f(x)+\frac{\varphi(a)}{x-a}+\frac{\varphi(b)}{x-b}+\ldots\ldots,$$

wenn man (falls diess thunlich ist), $\varphi(x)$ durch $x-a$, $x-b$ u. s. w. dividirt, bei welcher Division die Reste bekanntlich $\varphi(a)$, $\varphi(b)$,..... sind, so dass $f(x)$ eine ganze Funktion von x ist, um einen Grad niedriger als $\varphi(x)$. Bringt man die zweite Seite auf einerlei Nenner, so ist

Digitized by Google

$$\frac{F'(x).\varphi(x)}{F(x)} = f(x) + \frac{x^{n-1}\Sigma\varphi(a) + ...}{F(x)}, \qquad (3)$$

wenn Σ bedeutet, man solle die Operation auf alle Wurzeln a, b, ... ausdehnen, also z. B.

$$\Sigma\varphi(a) = \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + ...; \qquad (4)$$

ist. Daraus folgt offenbar, dass man die symmetrische Funktion (4) erhält, wenn man $\frac{F'(x)\varphi(x)}{F(x)}$ nach fallenden Potenzen von x entwickelt und den Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ nimmt.

Da man hat

$$F(x)=0, \qquad (1)$$

so kann man hierdurch x^n ausdrücken vermittelst der niederern Potenzen von x, so also dass etwa

$$x^n = -p_1x^{n-1} - p_2x^{n-2} - ....; \qquad (5)$$

ebenso kann man x^{n+1}, x^{n+2}, ... ausdrücken durch Potenzen von x, niederer als die $n$te. Z. B. aus (5) folgt

$$x^{n+1} = -p_1x^n - p_2x^{n-1} - ...;$$

setzt man hier für x^n seinen Werth (5), so erhält man den verlangten Ausdruck von x^{n+1}.

In dieser Weise kann man überhaupt vorläufig die Grösse $F'(x)\varphi(x)$ durch niederere Potenzen von x ausdrücken, als die $n$te, und man wird etwa erhalten:

$$F'(x)\varphi(x) = h_1x^{n-1} + h_2x^{n-2} + ... \qquad (6)$$

Hat man diess gethan, so ist in (3) offenbar $f(x)=0$ und man hat:

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + ... = h_1. \qquad (7)$$

Vermittelst der gelehrten Methoden wird man also immer die symmetrische Funktion

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + ... \qquad (4)$$

der Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ ausdrücken können.

§. 2.

Gesetzt nun, es handele sich um die symmetrische Funktion zweier Buchstaben

Digitized by Google

$$\Sigma\varphi(a, b),$$

die man durch

$$\Sigma\varphi(x, y) \qquad (8)$$

darstellen kann, wobei bemerkt werden muss, dass Σ bedeutet, x, y sollten alle Werthe annehmen (§. 1.), oder alle Verbindungen dieser Werthe zu zwei.

Man dividire nun zunächst $F(x)$ durch $x-a$, und sei $F_1(x)$ der Quotient, so dass $b, c, \ldots l$ die $(n-1)$ Wurzeln der Gleichung $F_1(x)=0$ sind. Aus §. 1. folgt nun, dass der Koeffizient von $\frac{1}{z}$ in der Entwickelung von

$$\frac{F'_1(z).\varphi(a, z)}{F_1(z)}$$

die Summe

$$\varphi(a, b)+\varphi(a, c)+\ldots\ldots+\varphi(a, l)$$

ist. Stellt man nun diesen Koeffizienten durch $\psi(a)$ dar, so ist

$$\Sigma\varphi(x, y)=\psi(a)+\psi(b)+\psi(c)+\ldots\ldots+\psi(l),$$

und man wird die verlangte symmetrische Funktion durch Entwickelung des Ausdrucks $\frac{F'(z).\psi(z)}{F(z)}$ finden.

§. 3.

Man habe die symmetrische Funktion dreier Buchstaben

$$\Sigma\varphi(y, z, v),$$

so wird man zuerst das Polynom

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)}=F_2(x)$$

bilden. Sucht man nun den Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von

$$\frac{F_2'(x)\varphi(a, b, x)}{F_2(x)},$$

so ist derselbe gleich

$$\varphi(a, b, c)+\varphi(a, b, d)+\ldots\varphi(a, b, l)=\psi(a, b),$$

Digitized by Google

so dass man die symmetrische Funktion $\Sigma\psi(y, z)$ zu berechnen hat, was nach §. 2. geschieht.

Dass man so fortfahren kann, ist klar.

Dass es hinreichend ist, ganze Funktionen zu betrachten, ist leicht einzusehen, da eine jede nicht ganze rationale Funktion der Quotient zweier ganzen ist, und zugleich auch jede rationale Funktion einer oder mehrerer Wurzeln einer Gleichung ersetzt werden kann durch eine ganze Funktion dieser Wurzeln. (Serret, Cours d'Algèbre superieure 2me leçon pag. 19. suiv.).

§. 4.

Man sieht leicht aus dem Vorstehenden, dass jede symmetrische ganze Funktion der Wurzeln einer Gleichung eine ganze Funktion der Koeffizienten, ohne irgend einen numerischen Divisor ist; so wie dass man sie durch algebraische Divisionen erhält, bei denen der Koeffizient des ersten Gliedes in den Divisoren immer der Einheit gleich ist. Besonders geht die erste Behauptung klar aus der zweiten Methode des §. 1. hervor.

§. 5.

Sei

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_m = 0 \qquad (9)$$

die gegebene Gleichung $(F(x)=0)$, also $p_1, p_2, \ldots\ldots$ deren Koeffizienten mit den Zeigern 1, 2,..m. Denken wir uns nun irgend ein Produkt solcher Koeffizienten, so heissen wir den Zeiger desselben die Summe der einzelnen Zeiger, indem man Sorge trägt, den Zeiger eines Buchstabens so viel mal zu zählen, als dieser Buchstabe vorkommt. So ist z. B. der Zeiger des Produkts $p_1^3 p_2^4 p_5$

$$= 3.1 + 4.2 + 5 = 16.$$

Besteht eine Funktion aus mehrern solcher Produkte, so heisst der höchste Zeiger der einzelnen Glieder der Zeiger der Funktion. So ist also von

$$p_1^2 p_3 + p_2^4 p_3^5 + p_6 p_2 + p_1 p_2 p_3$$

der Zeiger 23.

Man habe nun eine symmetrische Funktion einer oder mehrerer Wurzeln der Gleichung (9), so heisst der höchste Grad derselben die höchste Summe der Exponenten der einzelnen Glieder. Ist diese Funktion nun durch die Koeffizienten von (9) ausgedrückt, so hat sie einen gewissen Zeiger und man kann nun nachweisen, dass der Zeiger einer symmetrischen Funktion ihrem Grade gleich ist.

Digitized by Google

In Bezug auf die symmetrischen Funktionen eines Buchstabens genügt es, den Beweis zu liefern für die Funktion ΣAx^n, wo A eine Zahl ist. Um diese Funktion zu erhalten, muss man dividiren (§. 1.):

$$\frac{Amx^{m-1+n} + A(m-1)p_1x^{m-2+n} + \ldots\ldots}{x^m + p_1x^{m-1} + \ldots\ldots}.$$

Sei der Quotient

$$q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots\ldots + q_rx^{n-r-1} + \ldots\ldots,$$

so ist

$$q_r = -p_1q_{r-1} - p_2q_{r-2} - \ldots\ldots - p_rq_0 + (m-r)Ap_r.$$

Da aber $q_0 = Am$, also den Zeiger 0 hat, so hat allgemein q_r den Zeiger r. So demnach hat der Koeffizient von $\frac{1}{x}$, d. i. q_n, den Zeiger n, was den Satz beweist.

Wäre A selbst eine ganze, rationale Funktion der Buchstaben p, so hätte q_0 denselben Zeiger n' wie A, also q_n $(A\Sigma x^n)$ den Zeiger $n'+n$.

In Bezug auf die Funktionen zweier Buchstaben genügt es, die Funktion $\Sigma y^nz^{n'}$ zu betrachten.

Heisst man die zweite Art, in §. 1. aufgeführt, die durch Reduktion, so dass wir also unter Reduktion der Funktion $F^\nu(x)\varphi(x)$ verstehen die Operation, vermöge der alle Potenzen von x die höher als die $(n-1)$te sind, durch niederere ausgedrückt werden, vermittelst der Gleichung $F(x)=0$, so erhält man $\Sigma y^nz^{n'}$, (§. 2.), wenn man zuerst die Reduktion der Funktion $a^nx^{n'}F_1'^{\prime}(x)$ vermittelst der Gleichung $F_1(x)=0$ vornimmt. Da aber

$$F_1(x) = x^{m-1} + a \left| \begin{array}{l} x^{m-2} + a^2 \\ + p_1 \end{array} \right| \begin{array}{l} x^{m-3} + \ldots\ldots, \\ + p_1a \\ + p_2 \end{array}$$

so ist klar, dass man hierdurch eine Funktion $\psi(a)$ erhalten wird, so dass in jedem ihrer Glieder der Grad von a mit dem Zeiger des Buchstabens p die Summe $n+n'$ beträgt, so dass die Reduktion, die darauf folgt, nämlich der Grösse $\psi(x)F^\nu(x)$, vermittelst $F(x)=0$, eine Funktion vom Zeiger $n+n'$ giebt.

So kann man leicht fortfahren.

Wenn man eine allgemeine Gleichung vom $m$ten Grade mit zwei Unbekannten x und y hat, so geben die Zeiger der Koeffizienten von x zugleich den Grad derselben in y an. Der vorangegangene Lehrsatz lehrt somit den Grad in y einer jeden symmetrischen Funktion der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_m$ kennen.

Digitized by Google

Eben so dient dieser Satz auch zu Abkürzungen der in den ersten Paragraphen angegebenen Rechnungen.

§. 6.

Sei n der Grad der symmetrischen Funktion, m der von $F(x)$. Wenn $n<m$, so kann man in $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ u. s. f., eben so in $F'(x)$, $F'_1(x)$, $F'_2(x)$ u. s. w. alle Koeffizienten weglassen, deren Zeiger höher als n ist, was unmittelbar aus dem vorigen Lehrsatze folgt.

Ganz eben so wie in §. 1. kann man leicht folgende Sätze beweisen:

Die Summe der Werthe, welche die ganze Funktion $a\varphi(b)$ erhält, wenn man darin a und b durch alle Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ ersetzt, zu je zwei auf alle möglichen Arten verbunden, ist gleich dem mit verkehrtem Zeichen genommenen zweiten Gliede des Restes in der Division $\frac{F'(x)\varphi(x)}{F(x)}$. Dessgleichen ist $\Sigma ab\varphi(c)$ gleich dem mit verkehrtem Zeichen genommenen dritten Gliede; $\Sigma abc\varphi(d)$ gleich dem eben so genommenen vierten Gliede u. s. w. was aus (3) unmittelbar hervorgeht.

§. 7.

Man verlange die Bestimmung von $\Sigma(ab^2)$.

Nach §. 6. ist hier bloss eine Division nothwendig. Sei $F(x)=0$ die Gleichung:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_m = 0,$$

so wird man nur auf die vier ersten Glieder achten müssen. (§. 6. erster Satz.). Es genügt also, den Koeffizienten von $\frac{1}{x^2}$ in der Entwicklung von

$$\frac{F'(x).x^2}{F(x)}$$

$$= \frac{[mx^{m-1} + (m-1)p_1 x^{m-2} + (m-2)p_2 x^{m-3} + (m-3)p_3 x^{m-4}]\,x^2}{x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3}}$$

$$= \frac{mx^4 + (m-1)p_1 x^3 + (m-2)p_2 x^2 + (m-3)p_3 x}{x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3}$$

zu bestimmen

Digitized by Google

$$mx^4+(m-1)p_1x^3+(m-2)p_2\left|\begin{matrix}x^2+(m-3)p_3x\\ +p_1{}^2\end{matrix}\right| \begin{matrix}\underline{x^3+p_1x^2+p_2x+p_3}\\ mx-p_1\end{matrix}$$
$$+p_1p_2$$

Demnach ist das zweite Glied des Restes $-3p_3+p_1p_2$, also

$$\Sigma ab^2=3p_3-p_1p_2.$$

XLIV.

Ueber die Schwingungsdauer des einfachen und des zusammengesetzten Pendels.

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Schwingt ein einfaches Pendel (Taf. IX. Fig. 7.) von der Länge $l=CA$, ist CB eine Vertikale, CA die anfängliche Lage, von der aus das Pendel ohne Anfangsgeschwindigkeit geht, CM die Lage am Ende der Zeit t, $MCB=\varphi$, $ACB=\alpha$, so findet man t nach der Formel:

$$t=-\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\alpha}^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\alpha}}, \qquad (1)$$

(man sehe z. B. Poisson Mechanik §. 182.).

Setzt man hier $\cos\varphi=1-x$, $\cos\alpha=1-\beta$, also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}},$$

so ergiebt sich:

Digitized by Google

$$t=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\beta}^{x}\frac{\partial x}{\sqrt{x(\beta-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)}}. \qquad (2)$$

Um hieraus die Zeit T zu finden, welche der Körper braucht, um nach B zu kommen, hat man bloss $\varphi=0$ zu setzen. Demnach

$$T=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\beta}^{0}\frac{\partial x}{\sqrt{x(\beta-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\beta}\frac{\partial x}{\sqrt{x(\beta-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)}}.$$

Man setze in dieser Formel $x=\beta y$, so giebt sie:

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{1}\frac{\partial y}{\sqrt{y(1-y)(1-\frac{\beta}{2}y)}},$$

und trifft somit zusammen mit der im Archiv. Theil XIII. S. 5. §. 15. I. aufgestellten Formel, wenn dort

$$m^2=\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \text{also} \quad m=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

ist. Da

$$T\sqrt{\frac{g}{l}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{\partial y}{\sqrt{y(1-y)(1-\frac{\beta}{2}y)}},$$

so folgt aus jener Formel, dass

$$\left(\operatorname{sn}T\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2=1, \quad \operatorname{sn}\left(T\sqrt{\frac{g}{l}}\right)=+1;$$

also

$$T\sqrt{\frac{g}{l}}=M, \quad T=M\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (4)$$

wenn M der zu $m=\sin\frac{\alpha}{2}$ gehörige Modularquadrant ist (Archiv. Theil XI. S. 400. §. 3. (5)). Für $\alpha=0$ oder $m=0$ ist $M=\frac{\pi}{2}$,

Digitized by Google

was die bekannte Formel für die Schwingungen des einfachen Pendels ist.

Ein zusammengesetztes Pendel schwingt bekanntlich genau wie ein einfaches von der Länge $\frac{K}{SR}$, wenn K das Trägheitsmoment des Körpers, S dessen Masse und R die Entfernung des Schwerpunkts von der Aufhängaxe ist. Die Schwingungsdauer T ist also

$$T=M\sqrt{\frac{K}{SRg}}. \qquad (5)$$

Hier ist α der anfängliche Winkel, den die Linie R mit der Vertikalen machte. Es dürfte vielleicht nicht ohne Interesse sein, diesen letztern Satz auf elementare Weise abzuleiten.

Es stelle PQ (Taf. IX. Fig. 8.) ein zusammengesetztes Pendel vor, das sich um eine horizontale Axe AB dreht. G sei sein Schwerpunkt, P sein Gewicht. Die Senkrechte GC auf AB heisse R. Man wird sich nun das Gesammtgewicht des Körpers in G vereinigt denken können, so dass in G die vertikale Kraft P angreift. Diese zerlege man in zwei, eine nach GC, die andere senkrecht auf GC gerichtet. Die erstere trägt zur Umdrehung des Pendels Nichts bei; die letztere ist $P\sin\varphi$, wenn φ der Winkel ist, den R mit der Vertikalen macht. Die Umdrehung um die Axe AB geschieht folglich durch ein wirksames Kräftepaar, dessen Moment

$$PR\sin\varphi \qquad (6)$$

ist.

Sei nun a irgend ein Element (Atom, Punkt) des Körpers, dessen Gewicht p ist; sei ferner, in der wirklich stattfindenden Lage, γ die Winkelgeschwindigkeit des Pendels um AB', ψ' ihre Beschleunigung, so sind $r\gamma$, $r\psi$ die Geschwindigkeit und ihre Beschleunigung für den Punkt p, wenn dessen (senkrechte) Entfernung von der Axe AB gleich r ist. Hat aber p die Beschleunigung $r\psi$, so wirkt auf dieses Element, in der Richtung der Bewegung, also senkrecht auf r, die Kraft $\frac{pr\psi}{g}$ *), d. h. ein drehendes Paar, dessen Moment

$$\frac{pr\psi}{g}.r=\frac{pr^2\psi}{g}$$

---

*) Diese Formel ist immer leicht abzuleiten. Denn wirkt auf das Gewicht P die beständige Kraft Q, so ist die Beschleunigung $x=\frac{Qg}{P}$, nach der Formel $P:g=Q:x$. Hier ist $P=p$, $x=r\psi$, also

$$r\psi=\frac{Qg}{p},\ Q=\frac{pr\psi}{g}.$$

Digitized by Google

ist. Da alle Punkte, über oder unter der Axe, in gleicher Richtung drehen, so kann man alle diese Paare, die in parallelen, auf AB senkrechten Ebenen wirken, in ein einziges zusammensetzen, dessen Moment

$$S\left(\frac{pr^2\psi}{g}\right)=\frac{\psi}{g}S(pr^2), \qquad (7)$$

wenn $S(pr^2)$ bedeutet, dass die Grössen pr^2, auf alle Punkte des Körpers bezogen, addirt werden sollen, und welches Paar in einer auf AB senkrechten Ebene wirkt. Dieses letzte Paar muss vorhanden sein, wenn die Beschleunigung ψ statt haben soll. Wirklich vorhanden ist das Paar (6), das in einer auf AB senkrechten Ebene wirkt. Daraus folgt, dass ψ so beschaffen sein muss, dass

$$\frac{\psi}{g}S(pr^2)=PR\sin\varphi,$$

$$\psi=g\frac{PR\sin\varphi}{S(pr^2)}. \qquad (8)$$

Denken wir uns nun, der Körper PQ stelle ein einfaches Pendel von der Länge l und dem Gewichte Q dar, so ist offenbar in (8):

$$R=l, \quad P=Q, \quad S(pr^2)=QR^2$$

zu setzen, und die entsprechende Beschleunigung ψ' findet sich:

$$\psi'=g\frac{QR\sin\varphi}{QR^2}=g\frac{\sin\varphi}{l}. \qquad (9)$$

Sollen nun das einfache und das zusammengesetzte Pendel in dieser (φ entsprechenden) Lage gleiche Bewegung haben, so muss $\psi=\psi'$, d. h.

$$g\frac{PR\sin\varphi}{S(pr^2)}=\frac{g\sin\varphi}{l}, \quad l=\frac{S(pr^2)}{PR} \qquad (10)$$

sein. Da hier φ nicht mehr vorkommt, so gilt es unabhängig von φ, d. h. das einfache Pendel von der Länge $\frac{S(pr^2)}{PR}$ hat genau dieselbe Bewegung, wie das zusammengesetzte. Bekanntlich heisst $\frac{P}{g}$ die Masse des Körpers; ist sie $=S$, so ist $P=Sg$, und wenn K das Trägheitsmoment, so ist $S(pr^2)=gK$, also

$$l=\frac{K}{SR}.$$

Heisst K' das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende, mit AB parallele Axe, so ist, wie leicht abzuleiten:

Digitized by Google

$$K = K' + R^2 S,$$

also

$$l = \frac{K'}{SR} + R.$$

Nach dem Vorgang von Coriolis (Berechnung des Effekts der Maschinen) wäre es zweckmässiger, die Summe $S(pr^2)$ geradezu als Trägheitsmoment K zu bezeichnen, so dass dann

$$l = \frac{K}{PR}, \qquad (11)$$

und

$$K = K' + R^2 P, \quad l = \frac{K'}{PR} + R. \qquad (12)$$

Weitere Entwickelungen hiervon zu geben, liegt jetzt nicht in meiner Absicht; ohnehin ist es nicht schwer, die Theorie des Reversionspendels aus der letzten Gleichung abzuleiten, was ganz elementar geschehen kann, wie ich diess auch immer beim Unterricht thue. Die Formel (5) ist somit, unter der letzten Annahme:

$$T = M\sqrt{\frac{K' + R^2 P}{PRg}} = \sqrt{\frac{K'}{PRg} + \frac{R}{g}}, \qquad (5)$$

worin also T die Zeit bedeutet, die verfliesst, während die Linie $GC(R)$ von ihrer äussersten Lage, wo sie den Winkel α mit der Vertikalen machte, zur vertikalen Lage geht. Was den Werth von M betrifft, so ist für:

$\alpha = 0$,	$M = \frac{\pi}{2}$,	$\alpha = 22^0$,	$M = 1{,}58539$.
$\alpha = 2^0$,	$M = 1{,}57091$.	$\alpha = 24^0$,	$M = 1{,}58819$.
$\alpha = 4^0$,	$M = 1{,}57127$.	$\alpha = 26^0$,	$M = 1{,}59125$.
$\alpha = 6^0$,	$M = 1{,}57187$.	$\alpha = 28^0$,	$M = 1{,}59456$.
$\alpha = 8^0$,	$M = 1{,}57271$.	$\alpha = 30^0$,	$M = 1{,}59814$.
$\alpha = 10^0$,	$M = 1{,}57379$.	$\alpha = 32^0$,	$M = 1{,}60197$.
$\alpha = 12^0$,	$M = 1{,}57511$.	$\alpha = 34^0$,	$M = 1{,}60608$.
$\alpha = 14^0$,	$M = 1{,}57667$.	$\alpha = 36^0$,	$M = 1{,}61045$.
$\alpha = 16^0$,	$M = 1{,}57848$.	$\alpha = 38^0$,	$M = 1{,}61509$.
$\alpha = 18^0$,	$M = 1{,}58054$.	$\alpha = 40^0$,	$M = 1{,}62002$.
$\alpha = 20^0$,	$M = 1{,}58284$	u. s. w.	

Digitized by Google

XLV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgaben von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

1.

Sei O (Taf. IX. Fig. 9.) die Spitze einer Parabel, OC deren Axe und ihre Gleichung:

$$y^2 = px.$$

Man mache $OC = OD = \frac{p}{4}$, ziehe an irgend einen Punkt C der Parabel die Linien DE, CE, so ist

$$DE^2 + \frac{p^2}{4} = CE.(p + CE).$$

Wäre allgemeiner $OC = OD = e$, so hätte man:

$$DE^2 - \left(\frac{DE^2 - CE^2 + 4e^2}{4e}\right)^2 = \frac{p}{4e}\,(DE^2 - CE^2).$$

2.

Sei in Taf. IX. Fig. 10. $OA = OB = e$, man mache $OD = \varepsilon e$ (worin ε willkührlich, ganz oder gebrochen), ziehe um D mit dem (beliebigen) Halbmesser r einen Kreis; an einen Punkt F in dessen Umfang ziehe man die Linien AF und BF, so ist:

$$AF^2 + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} BF^2 = 2\left(\frac{r^2 + e^2(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon}\right),$$

oder wenn man lieber will:

$$(1+\varepsilon)AF^2 + (1-\varepsilon)\,BF^2 = 2[r^2 + e^2(1-\varepsilon^2)].$$

Digitized by Google

Für $\varepsilon=0$ ist D in O, und dann

$$AF^2+BF^2=2(r^2+e^2),$$

welcher Satz besonders leicht ausgesprochen werden kann.

Für $\varepsilon=1$ ist D in A, und dann:

$$AF^2=r^2,$$

wie natürlich.

XLVI.

Miscellen.

Bezeichnen a, b, c die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks und e dessen sphärischen Excess, so ist immer

$$1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+32\cos\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}b^2\cos\tfrac{1}{2}c^2\sin\tfrac{1}{2}e^2$$
$$=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)+\cos(b+c-a).$$

Diesen Satz hat Herr Armand Hue, Professeur d'Hydrographie à Bayonne, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Tome X. 1851. p. 25. auf folgende Art bewiesen.

Bekanntlich ist, wenn A, B, C wie gewöhnlich die Winkel des sphärischen Dreiecks bezeichnen,

$$e=A+B+C-180^0,$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}e=-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C).$$

Entwickelt man

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

mittelst der bekannten Formeln

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}(a-b),$$

Digitized by Google

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}(a+b);$$

so kommt

$$\sin\tfrac{1}{2}e=\frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left\{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right\},$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}e\cos\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin C,$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}e^2\cos\tfrac{1}{2}c^2=\sin\tfrac{1}{2}a^2\sin\tfrac{1}{2}b^2\sin C^2.$$

Drückt man nun $\sin C^2$ in den Seiten des Dreiecks aus, so erhält man

$$\sin C^2=1-\cos C^2=1-\frac{(\cos c-\cos a\cos b)^2}{\sin a^2\sin b^2}$$

$$=\frac{(1-\cos a^2)(1-\cos b^2)-\cos c^2-\cos a^2\cos b^2+2\cos a\cos b\cos c}{\sin a^2\sin b^2}$$

$$=\frac{1+2\cos a\cos b\cos c-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2}{\sin a^2\sin b^2}$$

$$=\frac{4\cos a\cos b\cos c-\cos 2a-\cos 2b-\cos 2c-1}{32\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}b^2}.$$

Führt man diesen Ausdruck von $\sin C^2$ in die Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}e^2\cos\tfrac{1}{2}c^2=\sin\tfrac{1}{2}a^2\sin\tfrac{1}{2}b^2\sin C^2$$

ein, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+32\cos\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}b^2\cos\tfrac{1}{2}c^2\sin\tfrac{1}{2}e^2$$

$$=4\cos a\cos b\cos c=2\cos(a+b)\cos c+2\cos(a-b)\cos c$$

$$=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)+\cos(b+c-a),$$

welches der zu beweisende Satz war.

Digitized by Google

LXI.
Literarischer Bericht.

Geometrie.

Der Jahresbericht für die Mitglieder der Hamburgischen mathematischen Gesellschaft für 1850 enthält ausser den Notizen über die Schicksale der Gesellschaft einen recht interessanten Aufsatz von Herrn Conferenzrath Schumacher in Altona: „Ueber die geometrische Trisection des Winkels", näherungsweise durch fortgesetztes Halbiren. Selbst für den Gebrauch als Uebung bei dem geometrischen, und, weil unendliche Reihen dabei in Anwendung kommen, auch bei dem arithmetischen Unterrichte auf Schulen, möchten wir diesen Aufsatz Lehrern der Mathematik zur Berücksichtigung anempfehlen. Die beigegebene sehr saubere Zeichnung ist von der bekannten höchst kunstgeübten Hand Herrn August Repsold's verfertigt.

Astronomie.

Aus C. L. von Littrow's Kalender für alle Stände. 1851., der bekanntlich immer viel Lehrreiches enthält, und zur weiteren Verbreitung nützlicher Kenntnisse sich sehr geeignet erweiset, ist ein kleines sehr hübsches Kärtchen über die Erscheinungen der am 28sten Juli 1851. eintretenden grossen Sonnenfinsterniss, welche in Europa, Asien und Amerika sichtbar sein wird, nebst einer zweckmässigen Erläuterung seines Gebrauchs, besonders abgedruckt erschienen. Wir machen alle Liebhaber der Astronomie auf dieses Kärtchen aufmerksam, da jeder Beobachter der in Rede stehenden merkwürdigen Erscheinung, der nicht gerade genaue Rechnungen selbst anzustellen Willens ist, von diesem Kärtchen nebst seiner Erläuterung gewiss vortheilhaften Gebrauch machen wird. Die Linie der centralen Verfinsterung geht, um nur ein Paar grössere Städte zu erwähnen, nach diesem Kärtchen über Ostrolenka, zwischen Elbing in Westpreussen und Braunsberg in Ostpreussen hindurch, auch nicht weit von Danzig und Gothenburg in Schweden vorbei. Königsberg liegt noch in der Zone der totalen Verfinsterung, nicht weit von deren nördlicher Gränze, so wie auch Warschau noch innerhalb der Zone der totalen Verfinsterung nicht weit von deren südlicher Gränze liegt. Gerade auf der nördlichen Gränze der totalen Verfinsterung liegt

Digitized by Google

z. B. Goldapp in Ostpreussen. Dagegen gerade auf der südlichen Gränze der totalen Verfinsterung liegen z. B. Tarnopol, Lublin, Plock, Helsingborg. Zwar schon ausserhalb der Zone der totalen Verfinsterung, aber doch nicht weit von deren südlicher Gränze, liegen Thorn in Westpreussen, Bromberg im Grossherzogthum Posen, Coeslin in Hinterpommern, Ystadt und Malmoe in Schweden, Kopenhagen; etwas weiter von dieser Gränze Odessa und Lemberg. Für Greifswald wird noch ein sichelförmiges Stück der Sonne, dessen grösste Breite etwa $^1/_{36}$ des Durchmessers der Sonne beträgt, erleuchtet bleiben, oder die Verfinsterung wird hier etwa $11^2/_3 = 11{,}7$ Zoll betragen. Der Anfang der Finsterniss wird hier in Greifswald etwa um $3^h.\ 4^m$ mittlerer Zeit eintreten; für Wien ist die Dauer der Finsterniss 2 Stunden 3 Minuten, und nimmt man nun den Längenunterschied zwischen Greifswald und Wien nach der Connaissance des temps. 1850. $2^1/_2$ Grad an, so ist, da Greifswald westlich von Wien liegt, für ersteren Ort die Dauer der Finsterniss 2 Stunden 3 Minuten plus $2^1/_2 . {}^3/_5$ Minuten $= 2$ Stunden 3 Minuten $+ 1^1/_2$ Min. $= 2$ St. $4^1/_2$ Min., so dass also das Ende der Finsterniss in Greifswald etwa um $5^h.\ 8^m,5$ mittlerer Zeit stattfinden wird. Man sieht aus diesem Beispiele, wie leicht man mittelst dieses Kärtchens die Hauptumstände der Finsterniss für seinen Wohnort im Voraus bestimmen kann, wenigstens mit einer Genauigkeit, die zur gehörigen Vorbereitung auf die Beobachtungen hinreichend ist. Herr von Littrow verdient daher für die Veröffentlichung dieses hübschen Kärtchens, auf das wir nochmals alle Liebhaber der Astronomie aufmerksam machen, den wärmsten Dank, und wird durch dasselbe der am 28. Juli nächsten Jahres zu erwartenden merkwürdigen Erscheinung gewiss viele Beobachter, die wenigstens mit einer guten Taschenuhr versehen sein müssen, gewinnen.

Physik.

Lehrgang der mechanischen Naturlehre für höhere Unterrichtsanstalten von Dr. G. Karsten, Professor der Physik an der Universität und an der Marineschule zu Kiel. Erste Abtheilung. Allgemeine Physik. Mit 6 Kupfertafeln. Kiel. 1851. 8.

Wenn auch dieses Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten überhaupt bestimmt ist, so ist sein nächster Zweck doch der, auf der neugegründeten Seekadettenschule in Kiel dem physikalischen Unterrichte als Grundlage zu dienen. Deshalb hat der Herr Vf. mit vollem Rechte in Bezug auf Statik, Mechanik und Maschinenlehre den Kreis dieses Werkes bedeutend weiter gezogen, als dies sonst in physikalischen Lehrbüchern zu geschehen pflegt. Denn es enthält dieses Buch nicht bloss die Lehre von den sogenannten einfachen Maschinen oder mechanischen Potenzen ziemlich vollständig, sondern es sind auch alle übrigen Maschinen, welche auf Schiffen und bei'm Schiffbau Anwendung finden möchten, mit einer für den vorliegenden Zweck ausreichenden Vollständigkeit betrachtet worden, ohne mehr mathematische Kenntnisse, als die gewöhnlichsten Elementarlehren der reinen Mathe-

Digitized by Google

matik vorauszusetzen. Wenn wir aber auch in der Mechanik fester Körper das Buch für hinreichend vollständig halten, so scheint uns in der Hydrostatik und Hydrodynamik zu wenig gegeben zu sein. Denn was in §. 130. über die Lehre vom Metacentrum, welche ja für den Schiffbau rücksichtlich der Bestimmung der Stabilität oder Steife der Schiffe so unendlich wichtig ist, gesagt worden ist, halten wir in Bezug auf den Hauptzweck des Buchs doch in der That für zu wenig und zu ungenügend; und eben dasselbe gilt von §. 147., wo der Herr Vf. von dem Widerstande flüssiger Körper gegen in ihnen bewegte feste Körper handelt, von der ja auch eine Menge der wichtigsten nautischen Hauptlehren, z. B. die Lehre von der Abdrifft, die Lehre von der vortheilhaftesten Stellung der Seegel, die Lehre vom Seegelpunkte u. s. w. u. s. w. lediglich abhängen. Geben wir auch gern zu, dass sich rücksichtlich des Widerstandes der Herr Vf. in einiger Verlegenheit befunden haben mag, da diese Lehre allerdings noch auf sehr unsicheren Grundlagen beruhet, so durfte er doch diejenigen Sätze nicht unerwähnt lassen, die von den renommirtesten Lehrern der Schiffsbaukunst, z. B. von Chapman, Duhamel de Monceau, u. s. w. allgemein recipirt, und in der That keine anderen sind, als die, von denen schon Johann Bernoulli in der sehr schönen Schrift: „Essai d'une nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux. (Opera omnia. Tom. II. pag. 10.) ausging, und die auch später Leonhard Euler sowohl in der Scientia navalis, als auch in der Théorie de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux zur Grundlage seiner Untersuchungen machte. Auch hätte wohl hierbei des in der Geschichte des Schiffbau's merkwürdigen Streits zwischen Renau und Huygens (zugleich mit Beziehung auf den ältesten gründlicheren Schriftsteller über Schiffbau, den Pater Paul Hoste, Prof. de Matb. à Toulon, dessen Théorie de la construction des vaisseaux 1697 in Fol. erschien), in welchem Johann Bernoulli zum Schiedsrichter angerufen wurde, mit einigen Worten gedacht werden können. Die für die Lehre von der Steife der Schiffe so wichtige Lehre vom Metacentrum beruht dagegen auf ganz sicheren theoretischen Grundlagen, und bedurfte ihrer grossen Bedeutung wegen auch selbst in einem physikalischen Lehrbuche, das für Schifffahrtsschulen bestimmt ist, jedenfalls einer etwas weiteren Ausführung, als ihr hier gegeben worden ist. Selbst rücksichtlich der Bestimmung des Deplacements enthält die Hydrostatik zu wenig, und über die Schiffs-Aichung (Jaugeage) vermissen wir auch Genügendes. Aber abgesehen hiervon, ist bei der jetzigen Sachlage immer schon viel gewonnen, wenn ein Buch, wie das vorliegende, dem physikalischen Unterrichte auf einer deutschen Schifffahrtsschule zum Grunde gelegt wird, weshalb wir dasselbe herzlich willkommen heissen, und dem Herrn Verf. für seine Herausgabe zu Dank verpflichtet sind. Vielleicht wird, was wir nicht wissen, auf der Marineschule in Kiel noch besonderer Unterricht in der Mechanik fester und flüssiger Körper ertheilt, wodurch die oben gerügte nur ganz oberflächliche Berührung mehrerer für den Schiffbau höchst wichtiger Lehren in diesem der Physik im Allgemeinen gewidmeten Lehrbuche vollständig gerechtfertigt erscheinen würde.

Digitized by Google

Nautik.

Anleitung zum Schiffbau von G. L. Uggla, königlichem Constructeur. Aus dem Schwedischen übersetzt und vermehrt mit einem Anhange, mehreren Tabellen und vier Tafeln Zeichnungen von Julius Prömmel, Schiffs-Architecten (zu Hamburg). Hamburg. 1850. 8°. 2 Thlr.

Der Inhalt dieses Buchs ist, sagt der Herr Vf., in der Hauptsache ein Auszug aus dem Tractat über den Schiffbau, mit Erläuterungen zur Architectura navalis mercatoria von F. H. von Chapman. Stockholm. 1775.*) Da das Werk von Chapman sehr deutlich, ohne grossen Aufwand mathematischer Kenntnisse verfasst, und aus langjähriger vielseitiger Praxis hervorgegangen ist (Chapman gilt in Schweden immer noch für den grössten Constructeur, und Schweden hat sich bekanntlich immer durch den Bau seiner Schiffe ausgezeichnet), so haben sich sowohl der Herr Verfasser durch die Herausgabe, als auch der Herr Uebersetzer durch die Uebertragung dieses Werkes auf deutschen Boden, um Jeden, der sich für den praktischen Schiffbau interessirt, jedenfalls ein Verdienst erworben. Der Inhalt ist folgender: Erklärung der verschiedenen Risse zu einem Schiffe (Seiten Riss. Planten-Riss. Spanten-Riss u. s. w.). — Grundsätze des Schiffbaues. — Ueber die Lage des Gravitäts-Centrums des Schiffes, dessen Lufgierigkeit und Steife nebst Berechnung des Deplacements, des Gravitäts-Centrums und des Metacentrums. — Ueber das Segel-Areal, den Wirkungspunkt des Segelsystems und die Verhältnisse des Rundholzes. — Ueber die Stauung und Belastung. — Ueber das Areal des Ruders und dessen Breite. — Technische Benennungen der verschiedenen Hauptstücke, woraus ein Schiff zusammengesetzt ist, und ihre Verbindung unter einander (in zweckmässiger Kürze sehr belehrend, auch für Laien). — Ueber das Rundholz. — Der von dem Herrn Uebersetzer beigegebene Anhang ist vorzüglich durch die vielen vollständig ausgeführten numerischen Beispiele sehr instructiv. Möge dieses Werk zur allgemeinen Verbreitung richtiger theoretischer und praktischer Grundsätze über den Schiffbau unter den deutschen Schiffbaumeistern kräftigst beitragen!

(Vergl. auch vorher Physik.)

---

*) Wir bemerken, dass von der französischen Uebersetzung dieses Werks: Traité de la construction des vaisseaux etc. par F. H. de Chapman. Traduit du Suédois par M. Vial du Clairbois im Jahre 1839 eine mit einem neuen Titel versehene neue Ausgabe veranstaltet worden ist. Diese französische Uebersetzung scheint uns vorzüglich empfehlenswerth. Eine deutsche Uebersetzung ist, so viel wir wissen, nicht erschienen.

Digitized by Google

LXII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik.

Die Vorstellungen der alten Griechen und Römer über die Erde als Himmelskörper. Von Dr. Ludw. Oettinger, Grossh. Bad. Hofrathe und Prof. der Mathematik zu Freiburg i. B. Freiburg. 1850. 4.

Diese 116 Seiten starke Abhandlung enthält eine sehr interessante Zusammenstellung der Vorstellungen der Alten über die Erde als Himmelskörper, die wir den Lesern des Archivs zur Beachtung recht sehr empfehlen. Die Geschichte von der Gestalt der Erde ist bis in die neueste Zeit fortgeführt. Dem Alterthum gebührt das Verdienst, die Lehre von der Kugelgestalt festgestellt zu haben. Als eine Eigenthümlichkeit ist zu bemerken, dass von den späteren Schriftstellern (Cleomedes und Ptolemäus an den Orten, wo sie die Kugelgestalt behandeln) nicht mehr die runde Gestalt des Erdschattens bei Mondfinsternissen, welche Aristoteles aufführte, erwähnt wird. — Ort und Bewegung der Erde sind im Alterthum zwei zusammengehörige Begriffe. Nur wenige, weiter sehende Männer wussten sie zu sondern. Aus den gegebenen Mittheilungen geht aber ganz unzweideutig hervor, dass im Alterthum die Grundzüge des copernicanischen Systems ausgesprochen waren. — Auch die schiefe Stellung der Erdaxe gegen die Sphäre hatte man im Alterthum erkannt, aber nicht gegen die Erdbahn, also nicht in der Weise wie sie gegenwärtig erkannt ist. — Die Gradmessungen des Alterthums sind zwar nur als Versuche für die Grössenbestimmung der Erde zu betrachten, haben aber eine geschichtliche Bedeutung, denn die im Alterthum aufgefundenen Methoden bilden noch jetzt die

Digitized by Google

Grundlagen für die Grössenbestimmung der Erde durch Gradmessungen. — Durch die in dieser Abhandlung gegebenen Nachweisungen dürfte nun die Behauptung gerechtfertigt sein, dass diejenigen Unrecht thun, welche die Verdienste der Alten in Begründung der Astronomie als Wissenschaft zu entwerthen sich bemühen. — Ptolomäus schloss die Reihe der bedeutenderen Astronomen des Alterthums. Er scheint mehr mit beobachtendem, als mit schöpferischem Talente begabt gewesen zu sein, und es soll sofort seinem Verdienste nicht zu nahe getreten werden. Der Gedanke aber liegt sehr nahe, dass er Copernicus Stelle hätte einnehmen können, wenn er mit schöpferischem Geiste alle die Mittel erfasst hätte, welche ihm, wie wir aus seinen Werken sehen, seine Vorgänger als Vermächtniss hinterliessen, und wenn er sich von den Sinneneindrücken hätte losreissen können, von denen sich dieselben schon losgerissen hatten. Denn gerade er war es, welcher (Alm. Lib. I.) die Wahrheit der Sinneneindrücke den richtigern Ansichten anderer gegenüber zu begründen suchte.—

Dies sind etwa die von dem Herrn Vf. selbst in der Vorrede namhaft gemachten Hauptpunkte, welche in dieser interessanten und lehrreichen Schrift weiter ausgeführt werden.

Geometrie.

Geometrische Analysis. Eine systematische Anleitung zur Auflösung von Aufgaben aus der ebenen Geometrie auf rein geometrischem Wege, für die höhern Klassen der Gymnasien und Realschulen von Dr. Christian Heinrich Nagel, Rector der Realanstalt zu Ulm. Ulm. 1850. 8.

Wir begrüssen diese Anleitung zur geometrischen Analysis mit grosser Freude, in welcher der Herr Vf. den Anfängern auf dem von den griechischen Geometern uns vorgezeichneten trefflichen Wege, — der denn doch nun einmal der einzig richtige und wahre Weg bei dem geometrischen Unterrichte bleibt, — eine sehr gute methodische Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben giebt. Alle pädagogischen Kunststücke, die man jetzt hin und wieder namentlich bei dem geometrischen Elementar-Unterrichte machen sieht, taugen, — insofern sie nicht bloss eine ganz oberflächliche geometrische Bildung bezwecken, die allerdings auch für manche Individuen ihren Nutzen haben kann, — nach unserer innigsten Ueberzeugung gar nichts, und man wird durch dieselben nie einen Knaben zum Geometer machen, ja sie werden auch nicht einmal zu irgend einem praktischen Beruf, der hauptsächlich in einer mathematischen Grundlage wurzelt, tüchtig

Digitized by Google

heran bilden. Nur wenn man bei dem geometrischen Unterrichte zur strengen Methode der Alten zurückkehrt, wobei sich jedoch, was schon öfter von uns bemerkt worden ist, immer noch ein gewisser Mittelweg inne halten lässt*), wird man wahrhaft glückliche Erfolge erreichen. Am allermeisten gilt dies aber von der Auflösung geometrischer Aufgaben, wo jede nicht nach der strengen Methode der Alten versuchte Auflösung zu blossem Herumtappen und Herumsuchen führt, ohne alle eigentliche Methode; und wird dann zufällig eine Auflösung gefunden, so ist dies meistens nur die Frucht eines glücklichen Zufalls, der für das geometrische Talent dessen, der diesen glücklichen Fund zufallig that, eigentlich gar nichts beweiset. Wir freuen uns daher nochmals sehr über das Erscheinen der vorliegenden Anleitung, die einem wahren Bedürfnisse abhilft, und heissen dieselbe im Interesse des wahrhaft Frucht tragenden geometrischen Elementarunterrichts herzlich willkommen. Mit dem vollsten Rechte hat der Herr Vf. sich ganz an die strenge Methode der Alten gehalten, und überall Analysis, Synthesis, Determination und Beweis von einander streng unterschieden, und darüber überall sehr fassliche Erläuterungen gegeben; sein Buch ist keineswegs ein gelehrtes, aber dagegen ein recht praktisches Buch zu nennen, was vorgerückteren Schülern und Lehrern, die in diesen Dingen noch zu lernen haben und lernen wollen, ein treffliches Hülfsmittel darbieten kann und wird, und die Anzahl der zur Erläuterung gebrauchten Beispiele, bei denen der Herr Verf. mit Recht weit weniger auf Neues als auf Zweckmässiges ausgegangen ist, ist für den Zweck, welchen der Herr Vf. zu erreichen beabsichtigte, gross genug. Schon ein blosser Blick in dieses Buch thut einem in der strengen Schule der Alten erzogenen Lehrer der Geometrie wahrhaft wohl, gegenüber dem meistens sehr seichten und nichts sagenden Geschwätz, was man jetzt namentlich in pädagogischen Zeitschriften häufig über den mathematischen Unterricht antrifft. Wir haben in diesem Buche in dem Herrn Vf. freudigst den „Würtemberger“ erkannt: denn wer die Geschichte der Mathematik und des mathematischen Unterrichts kennt, weiss sehr wohl und erinnert sich mit dem wärmsten Danke, dass Würtemberg lange Zeit die eigentliche Pflanzstätte der strengen Geometrie in Deutschland war. Was er über Pfleiderer auf S. V. der Vorrede sagt, unterschreiben wir vollkommen; er hätte aber neben demselben auch noch viele andere seiner Landsleute mit eben demselben Rechte nennen können, und wir werden ihn nicht erst an Johann Friedrich und Wilhelm Pfaff, an Hauber (den Commentator des Euklides und Herausgeber archimedischer Schriften), an Schwab (den Herausgeber der Data des Euklides nach Robert Simson), an Camerer (den trefflichen Herausgeber der Schriften des Apollonius), an Bohnenberger (dessen Astronomie ein wahres Muster geometrischer Strenge im Geiste der Alten ist) und noch

*) M. s. z. B. im Literar. Ber. Nr. LIV. S. 761. die Anzeige von Schlömilch's ausgezeichneter Geometrie des Maasses, die, wenn auch nicht nach der Methode des Euklides, aber doch in demselben strengen Geiste, welcher hauptsächlich die Geometrie der Alten charakterisirt, abgefasst ist.

viele andere Würtemberger zu erinnern brauchen; ja auch der treffliche L'Huilier, der so vieles Ausgezeichnete auch auf dem Gebiete der reinen Geometrie geleistet hat, und sich lange bei Pfleiderer in Tübingen aufhielt (er sagt in der Vorrede zu seiner Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae. 1795. p. II.: „Amicus meus, Dn. Pfleiderer, Phys. et Math. Prof. in Universitate Tubingensi, refugium mihi secum obtulit: ubi studiis ad levandos doloris intentus, quae ad novam Dissertationis meae editionem, dudum necessariam visam, sparsim praeparaveram, in ordinem redegi, et cum amico communicavi, ipsiusque observationes consului; quo factum esse spero, ut, quod publico nunc offero, scriptum utile sit nec ejus attentione indignum") kann mit hierher gerechnet werden. Aber solche Namen kennen freilich unsere Pädagogen jetzt nicht mehr; wie könnte das aber auch anders sein, da sie den Euklides nicht mehr lesen, dessen eifriges Studium ihnen jedoch gewiss sehr anzurathen wäre!

Einzelnes aus dem Buche des Herrn Rector Nagel anzuführen, verbietet uns leider der Raum; um aber zu zeigen, wie sehr, bei aller praktischen Brauchbarkeit desselben, ohne allen gelehrten Flitterstaat, der hier sehr leicht anzubringen gewesen wäre, und leichten Verständlichkeit seines Inhalts, darin der Geist der Alten weht, können wir uns nicht versagen, zum Schluss in der Kürze noch seinen Inhalt anzugeben:

Erstes Buch. Ueber die Natur und über die Theile einer Aufgabe. Die Natur der Aufgabe. Von den Hauptbestandtheilen einer Aufgabe. Von der Aufgabe im engern Sinne. Von der Construction. Von dem Beweise. Von der Determination. — *Zweites Buch.* Ueber die geometrische Analysis. Wesen der geometrischen Analysis. Auflösung einiger geometrischen Aufgaben durch Anwendung der geometrischen Analysis. Der Zusammenhang der geometrischen Analysis mit der Construction und dem Beweise. — *Drittes Buch.* Die verschiedenen Hauptwege, um zur Auflösung geometrischer Aufgaben zu gelangen. Allgemeine Bemerkungen über diese Wege. Die Auflösung der Aufgaben durch Analogie. Die Auflösung der Aufgaben durch Reduction. Die Auflösung der Aufgaben durch Lehrsätze. Die Auflösung der Aufgaben durch Data (möchte man doch die „Dedomena" oder „Data" des Euklides, dieses köstliche Ueberbleibsel aus dem griechischen Alterthume, wieder eifrigst studiren!). Die Auflösung der Aufgaben durch geometrische Oerter. — *Viertes Buch.* Lehre von den geometrischen Oertern. *Anhang.* Sammlung von Aufgaben.

Astronomie.

Storia celeste del R. Osservatoria di Palermo dal 1792 al 1813. Parte seconda 1803—1813. Tomo nono 1811—1813. Vienna. 1849. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten her-

Digitized by Google

ausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte und o. ö. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w. und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 32. Theil. Neuer Folge 12r Band. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1811 bis 1813. Wien. 1849. 4. (M. vergl. Literar. Ber. Nr. LVIII. S. 790.).

Mit diesem Bande ist die höchst verdienstliche Herausgabe der Piazzi'schen Beobachtungen nun vollendet, wozu wir den Herren Herausgebern von Herzen Glück wünschen. Die eifrige Benutzung dieses ausgezeichneten und schwierigen Werkes wird der Astronomie gewiss noch weit mehr schöne Früchte tragen, als dies bereits geschehen ist, wie z. B. in der Abhandlung von C. A. F. Peters: Ueber die eigene Bewegung des Sirius, in der neuesten Nummer der astronomischen Nachrichten. (Nr. 745.)

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. LVI. S. 773.)

Jahrgang 1850. Erste Abth. (März.). S. 233. Pohl: Auszug aus seiner Abhandlung „Ueber die Siedepunkte mehrerer alkoholhaltiger Flüssigkeiten und die darauf gegründeten Verfahren den Alkoholgehalt derselben zu chemisch-technischen Zwecken zu bestimmen". — Ausserdem befinden sich in diesem Hefte eine grössere Anzahl höchst interessanter Verhandlungen über eine Reise um die Erde, welche von der k. k. Marine unternommen werden soll, und die Betheiligung der k. k. Akademie der Wissenschaften bei dieser Reise. Der k. k. Viceadmiral v. Dahlrup hat diese Reise zur Uebung der Mannschaft der k. k. Marine und zur Förderung commercieller Zwecke bei dem k. k. Kriegsministerium beantragt, und der Antrag hat im Ministerrathe allen den Anklang gefunden, den er verdient. Die Reise soll mit einem k. k. Kriegsschiffe in das atlantische und das stille Meer unternommen werden, und das Schiff soll, statt vom stillen Meere auf dem Wege über das Cap Horn wieder zurückzukehren, seine Fahrt nach Westen fortsetzen und China, Siam, Singapure, Ceylon, Bombay, das Cap und die Westküste Afrikas berühren. Der Minister für Handel, Gewerbe und öffentliche Bauten, Herr v. Bruck, fordert die Akademie auf, diese Reise um die Erde zur Förderung ihrer Zwecke zu benutzen, und dass die Akademie diese Aufforderung eifrigst ergreifen würde, liess sich bei dem allgemein bekannten grossen Eifer und Erfolg, womit die k. k. Akademie sich der Förderung der Wissenschaften nach allen Richtungen hin widmet, nicht anders erwarten. und wird durch die in diesem Hefte mitgetheilten interessanten Verhandlungen, welche in der Akademie über diesen Gegenstand Statt gefunden haben, genugsam bestätigt.

Jahrgang 1850. Erste Abth. April. Mathematische und physikalische Abhandlungen, im eigentlichen Sinne, enthält dieses Heft zwar nicht; dagegen aber viele interessante Aufsätze aus anderen Gebieten der Naturwissenschaften, z. B. der Geologie

Digitized by Google

und Krystallographie. Wir erwähnen davon nur die folgenden: S. 369. v. Morlot: Ueber die Niveaus des älteren Diluviums und der Miocen-Formation. — S. 398. Wedl und Müller: Beiträge zur Anatomie des zweibuckligen Kameles (Camelus bactrianus). — S. 425. Boué: Ueber die Paläo-, Hydro- und Orographie der Erdoberfläche oder den wahrscheinlichen Platz des Wassers und des Landes, so wie über die wahrscheinliche Tiefe der Meere und die absolute Höhe der Länder und ihrer Gebirge während der verschiedenen geologischen Perioden.

Jahrgang 1850. Erste Abth. (Mai.) S. 504. Anleitung zur Ausführung von Beobachtungen über die an eine jährliche Periode gebundenen Erscheinungen im Pflanzenreiche. Nach den Ideen von Quetelet, Spring, theilweise nach den Ansichten und Erfahrungen von Fritsch. (Diese ausführliche Abhandlung empfehlen wir allen denen, die sich mit solchen Beobachtungen wie die in Rede stehenden beschäftigen wollen.). — S. 542. In mehrfacher Beziehung interessant ist auch eine Abhandlung von Simony in diesem Hefte: Ueber die Seen des Salzkammergutes.

Jahrgang 1850. Zweite Abth. (Juni). S. 19. Wilhelm Wertheim: Hauptresultate seiner neuesten Untersuchungen über die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung der flüssigen Körper. — S. 31. v. Ettingshausen: Zur Nachweisung der Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Betrifft eine neue Einkleidung des dritten Gauss'schen Beweises des bekannten algebraischen Hauptsatzes, den wir der Beachtung unserer Leser empfehlen. — S. 34. Derselbe: Beitrag zur Integration irrationaler Differential-Formeln. Betrifft eine der Berücksichtigung sehr werthe Vereinfachung der in den Lehrbüchern gewöhnlichen Behandlung der Integrale von der Form

$$\int x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} \partial x .$$

— S. 37. Kreil: Vortrag über das Inductions-Inclinatorium an der Prager Sternwarte und ein selbstregistrirendes Metallthermometer. — S 46. Pierre: Ueber eine Methode die Spannkraft der Dämpfe in der Luft direct zu messen. — S. 82. v. Ettingshausen: Bericht über Spitzer's Abhandlungen über die höheren Zahlengleichungen.

Jahrgang 1850. Zweite Abth. (Juli.) S. 119. A. v. Ettingshausen: Ueber einige Eigenschaften der Flächen, welche zur Construction der imaginären Wurzeln der Gleichungen dienen. — S. 150. Koller: Bericht über Böhm's Abhandlung: „Beobachtungen von Sonnenflecken und Bestimmung der Rotations-Elemente der Sonne. Wir führen die Hauptresultate dieser Abhandlung kurz an:

Neigung des Sonnenäquators gegen die Ekliptik . . .	6° 56′ 6
Länge des aufsteigenden Knotens des Sonnenäquators	76° 46′ 9
Tropische Umdrehungszeit der Sonne	25,821 Tage.

Digitized by Google

Die von Lalande und Delambre gemachten Bestimmungen geben im Mittel respective:

$7^{0}\ 19'$; $78^{0}\ 50'$; 25,021 Tage.

Kein einziger der beobachteten Sonnenflecken berechtigte zur Annahme einer eigenen Bewegung der Sonnenflecken. Ausserdem lieferten die Beobachtungen unzweifelhaft die Bestätigung:

a) dass die Sonnenflecken in beiden Hemisphären der Sonne gleich zahlreich erscheinen, und

b) dass sie in der Nähe des Sonnenäquators und in einer heliocentrischen Breite über 35^{0} hinaus nur selten, dagegen in der zwischenliegenden Zone am häufigsten vorkommen. —

S. 154. Doppler: Einige Mittheilungen und Bemerkungen, seine Theorie des farbigen Lichts der Doppelsterne betreffend. Herr Doppler legt in dieser Abhandlung der k. k. Akademie die neueren von verschiedenen Physikern und Astronomen angestellten Forschungen vor, welche zur Bestätigung der Richtigkeit seiner Theorie gedient haben, und macht dabei hauptsächlich auf zwei Memoiren des Herrn Sestini, Astronomen am Collegio Romano zu Rom aufmerksam, welche folgende Titel haben:

1) Memoria sopra i colori delle stelle del catalogo di Baily, osservati dal P. Benedetto Sestini. Roma 1845.

2) Memoria seconda intorno di colori delle stelle del catalogo di Baily, osservati dal P. Benedetto Sestini. Roma. 1847.

Wir halten allerdings die Resultate, zu denen Herr Sestini durch seine Beobachtungen gelangt ist, für so bemerkenswerth, dass wir dieselben nach den von Herrn Doppler gemachten Anführungen unseren Lesern hier mittheilen wollen:

1. Die Farbe des Lichtes der Fixsterne, welche keine Doppel- oder mehrfache Sterne sind, ist ganz gegen die bisherige Meinung der Astronomen, die gemeinhin nur den letzteren farbiges Licht zuerkannten, nicht bei allen die weisse und eben so wenig die gelbe, sondern es finden sich unter diesen Sterne in gar nicht unbeträchtlicher Menge von oranger, rother, grüner, blauer und violetter Farbe mit allen möglichen Nuancirungen vor. Die Sterne von gelblichem Lichte mit theilweise schwacher farbiger Nuancirung machen beiläufig die Hälfte von allen aus; solche von weissem Lichte betragen ungefähr $\frac{1}{5}$ und jene von oranger Farbe etwas über $\frac{1}{5}$ — so also, dass für die übrigen Farben nur etwa ein schwaches $\frac{1}{10}$ von allen übrig bleibt.

2. Ganz gegen alles Vermuthen finden sich ferner diese farbigen Sterne durchaus nicht über das ganze sichtbare Himmelsgewölbe gleichförmig und noch viel weniger bezüglich der einzelnen Farben in gleichem Verhältnisse vertheilt vor, sondern es

Digitized by Google

hat in dieser Beziehung ein auffallender höchst beachtenswerther Unterschied statt. Eine genaue von Herrn Sestini selber angestellte Vergleichung zeigt nämlich:

a) dass die weissen Sterne am häufigsten in der nördlichen Himmelshälfte und zwar beiläufig zwischen 60 — 90° nördlicher Breite sich vorfinden, die südlichen Gegenden dagegen daran sehr arm sind;

b) dass die bei weitem meisten Sterne mit farbigem Lichte innerhalb einer Zone liegen, welche beiläufig von 30° nördlicher bis zu 30° südlicher Breite reicht.

Hier muss berichtigend hinzugefügt werden, dass man sich durch eine Einsicht in den beigefügten Catalog leicht davon überzeugt, dass dieser Gürtel nichts weniger als mit dem Himmels-Aequator parallel läuft.

c) dass ferner auf der nördlichen Hälfte dieser Zone verhältnissmässig die meisten blauen und violetten, in der südlichen hingegen die meisten orangen und rothen Sterne sich vorfinden.

d) dass es weiter von allen Partien des gestirnten Himmels keine gibt, an welcher im Vergleiche zu den daselbst befindlichen anderen Sternen so viele blaue und violette Sterne vorkommen, als jene, wo sich das Sternbild des Herkules befindet. Nun aber ist es bekannt, dass nach Herschels und Argelanders Untersuchungen unser Planetensystem mit der Sonne als seinem Centralkörper aus der südlichen gegen die nördliche Hemisphäre und zwar ungefähr in der Richtung vom Flusse Eridanus gegen das Sternbild des Herkules hin sich bewegt; es erscheint demnach nur als eine nothwendige Consequenz meiner*) aufgestellten Theorie, dass die südliche Himmelshälfte verhältnissmässig mehr orange und rothe, die nördliche dagegen mehr blaue und violette Sterne zählen müsse, so wie insbesondere in der Gegend wo sich beiläufig Herkules befindet, von allen die meisten blauen und violetten vorkommen müssen. Aus gleichem Grunde muss auch die südliche Himmelshälfte bedeutend ärmer an Sternen geringerer Grösse sich zeigen als die nördliche. Ich habe in meinen früheren Abhandlungen des letzteren Umstandes ausdrücklich, des vorhergehenden wenigstens andeutungsweise erwähnt, und die Beobachtung hat meine, wie es mir schon damals schien, gegründete Vermuthung nicht zu Schanden werden lassen.

3. Das farbige Licht der einfachen oder der als solche geltenden Fixsterne ist gleich jenem der Doppel- und mehrfachen Sterne höchst wahrscheinlich einer Aenderung unterworfen, die jedoch von viel längerer Dauer ist als jene bei den meisten Doppelsternen. Für diese Ansicht sprechen, wenn auch nur wenige, doch gut constatirte Beobachtungen.

---

*) (d. h. Herrn Doppler's)

Digitized by Google

Nebst der bereits bekannten auffallenden Farbveränderung des Sirius führt Herr Sestini neuerlichst noch den Stern *b* in den Zwillingen an, welcher Stern im Almagest als roth bezeichnet wird, während ihn doch heut zu Tage Jedermann zu den entschieden weissen rechnet.

4. Endlich hat Herr Sestini durch seine Beobachtungen verbunden mit einer sorgfältigen Vergleichung früherer darauf bezüglichen Angaben, die Anzahl der bereits bekannten an Farbe veränderlichen Doppelsterne noch um mehrere vermehrt, wie diess aus seinem Memoire von 1845, pag. 11., und aus jenem von 1847, pag. 10. zu ersehen ist.

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XVI. IIme Partie. 1849. Tome XVII. Ire Partie. 1850. (Vergl. Literar. Ber. Nr. LI. S. 714.).

Tome XVI. IIme Partie. 1849. p. 17. Des proportions du corps humain; par M. A. Quetelet. Troisième article (Voir le deuxième article. T. XV. IIme Partie. p. 16.). Proportions de l'homme d'après les artistes italiens de la renaissance. — p. 28. Sur l'electricité et sur les anomalies que cet élément météorologique a présentées dans ces derniers temps, par M. A. Quetelet — p. 30. Troisième note sur de nouvelles applications curieuses de la persistance des impressions de la rétine; par M. J. Plateau. — p. 39. Note sur la polarisation des électrodes du voltamètre; par M. P. Loyet. — p. 251. Méthode particulière pour déterminer la collimation d'une lunette méridienne, à l'aide des observations astronomiques; par M. le capitaine Liagre. — p. 254. Quatrième note sur de nouvelles applications curieuses de la persistance des impressions de la rétine; par J. Plateau. — p. 282. Sur l'électricité de l'air pendant les neuf premiers mois de l'année 1849; par M. Quetelet. — p. 343. Notice sur une projection géographique nouvelle; par M. M. Donny. — p. 345. Mémoire sur les points brillants des courbes et des surfaces; par M. De Boer. — p. 347. Notice sur la décomposition electro-chimique par des voltamètres différents; par M. Maas. — p. 391. Notice sur une projection géographique nouvelle, par MM. F. C. L. Donny et F. M. L. Donny (S. vorher.). — p. 413. Sur la décomposition electro-chimique par des voltamètres différents; par M. Maas (S. vorher); — p. 545. Mémoire sur la théorie des résidus quadratiques par M. Schaar. Rapport de M. Timmer-

Digitized by Google

mans. — p. 546. Sur un phénomène météorologique; par M. Edm. de Selys-Longchamps. —

Tome XVII. Ire Partie. 1850. p. 3. Sur l'électricité atmosphérique; par M. A. Quetelet. — p. 13. Sur le nain Jean Hannema, dit l'amiral Tromp; par M. A Quetelet. — p. 134. Sur les points focaux de l'ellipse; par M. le capitaine Liagre. In diesem Aufsatze discutirt der Herr Vf. den folgenden von ihm aufgestellten Satz:

„Il existe sur le grand axe de l'ellipse un nombre infini de points, situés deux à deux à égale distance du centre, et tels, que les rayons vecteurs menés de chaque couple à un même point de la courbe, sont liés entre eux par une relation indépendante de la position de ce point."

„Les abscisses de ces points focaux sont de la forme $\pm\sqrt{\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^{2n-2}}}$, le nombre n pouvant recevoir toutes les valeurs entières et positives, depuis zéro jusqu'a l'infini" wo unter a und b die beiden Halbaxen der Ellipse verstanden werden. Es scheint dieser Gegenstand nicht uninteressant zu sein, und wohl eine noch weitere Untersuchung zu verdienen als die von dem geehrten Herrn Verf. hier mitgetheilte im Ganzen nur kurze Betrachtung giebt. — p. 216. Note sur les tremblements de terre, ressentis en 1849, par M. Alexis Perrey. p. 225. Supplément aux notes sur les tremblements de terre ressentis en 1847 et 1848. — p. 328. Sur les variations de pression atmosphérique et de température, à la fin de janvier et au commencement de février 1850. Lettre de M. A. Perrey. — p. 344. Sur un nain belge. Note communquée par M. Quetelet. — Notice sur une formule pour calculer l'élasticité de la vapeur d'eau, par M. Henri Bruckner, d'Aix-la Chapelle. Die auf diese Weise überschriebene Abhandlung enthält aber auch noch verschiedene arithmetische Bemerkungen über die Verwandlung der Wurzeln in Kettenbrüche, die Logarithmen und die Reihen. Wenn man

$$A=\frac{ma^{m-1}}{b},$$

$$B=\frac{2a}{m-1},$$

$$C=\frac{3m(m-1)a^{m-1}}{(m+1)b}=\frac{3A(m-1)}{m+1},$$

$$D=\frac{(m+1)2a}{(m-1)(2m-1)}=\frac{B(m+1)}{2m-1},$$

$$E=\frac{5m(m-1)(2m-1)a^{m-1}}{(m+1)(2m+1)b}=\frac{5C(2m-1)}{3(2m+1)},$$

Digitized by Google

$$F=\frac{(m+1)(2m+1)2a}{(m-1)(2m-1)(3m-1)}=\frac{D(2m+1)}{3m-1},$$

$$G=\frac{7m(m-1)(2m-1)(3m-1)a^{m-1}}{(m+1)(2m+1)(3m+1)b}=\frac{7E(3m-1)}{5(3m+1)},$$

u. s. w.

setzt, so ist nach dem Herrn Verf.:

$$(a^m+b)^{\frac{1}{m}}=a+\frac{1}{A+}\,\frac{1}{B+}\,\frac{1}{C+}\,\frac{1}{D+}\text{ etc.}$$

p. 424. Sur les variations annuelles du magnétisme terrestre à Bruxelles; par M. Quetelet. — p. 425. Sur les télégraphes électriques; par M. Quetelet. —

Ausserdem enthalten diese beiden Bände noch viele andere interessante Mittheilungen, namentlich meteorologischen Inhalts.

Subscriptions-Anzeige.

Bei A. C. Kronberger, Buchhändler in Prag, und J. F. Gress, Buchhändler in Wien, wird auf folgendes Werk Subscription angenommen:

Tafel siebenstelliger Logarithmen der Sinus und Tangenten für jede Secunde des Quadranten. Herausgegeben von Jakob Phil. Kulik, ordentlichem Professor der höhern Mathematik zu Prag. Erste auf dem Continente von Europa veranstaltete Ausgabe.

Welchem Mathematiker ist es unbekannt, wie lästig, zeitraubend und ungenau die Interpolationen werden, wenn mittelst der gewöhnlichen Tafeln, welche nach Minuten fortlaufen, die einem gegebenen Winkel zugehörige trigonometrische Function, oder umgekehrt, zu dieser der correspondirende Winkel, oder endlich, wenn beim Uebergange von einer trigonometrischen Function zur andern, diese mit der erforderlichen Schärfe bestimmt werden soll. Ein anderer Nachtheil der gewöhnlichen Tafeln ist noch, dass

Digitized by Google

die natürlichen Logarithmen der Functionen, welche aus dem log. cos$x$ hergeleitet werden, sich mittelst derselben auf keine befriedigende Weise berechnen lassen. Allen diesen Unzukömmlichkeiten wird aber durch dieses Werk, welches sowohl für jede Secunde des Quadranten die Logarithmen der Sinus und Tangenten, als auch in den ersten 18 Graden die Cosinus in mehr als 7 Decimalstellen liefert, abgeholfen.

Bedingungen der Herausgabe.

Dieses aus 96 Druckbogen bestehende Werk erscheint nur, wenn sich eine rege Theilnahme unter den deutschen Mathematikern dafür ausspricht. Das Ganze wird aus 6 Lieferungen bestehen, und der Ladenpreis jeder einzelnen Lieferung bei den jetzigen hohen Preisen des Papieres, Satzes und Druckes nur auf 1 Thaler gestellt werden; hiedurch erhält der Abnehmer das Werk um 6 Thaler in die Hände, während die *Shortrede*'schen Tafeln in Edinburg hier über 30 Thaler kosten, und dabei mit so kleinen Typen gedruckt sind, dass sie unausbleiblich auch die besten Augen zu Grunde richten müssen.

Sobald der erforderliche Aufwand zur Herausgabe des Werkes durch Subscription gedeckt sein wird, nimmt der Druck seinen Anfang, und wird ohne Unterbrechung durch 2 Jahre fortgesetzt und beendigt. Für durchaus reinen correcten Druck mit neuen Lettern auf gutem festen Papier wird gesorgt. Beim Erscheinen der ersten Lieferung wird auch die letzte berechnet, und es werden ausser den bestellten Exemplaren nur so viele abgezogen, als zur Deckung der allenfalls sich ergebenden Defecte erfordert werden. Jede Buchhandlung Deutschlands nimmt Subscription an. Die Namen der p. t. Herren Subscribenten, welche dieselben deutlich geschrieben mittheilen wollen, werden dem Werke vorgedruckt.

Nachschrift des Herausgebers.

Ich mache auf diese Tafeln alle Mathematiker aufmerksam, und die grosse Wichtigkeit einer durch die einzelnen Secunden des Quadranten fortschreitenden Tafel leuchtet wohl von selbst ein, da das Interpoliren doch immer eine sehr lästige Arbeit ist und die Rechnungen erschwert. Ich wünsche daher sehr, dass dieses Unternehmen des geehrten, durch andere ähnliche Unternehmungen schon hinreichend bekannten Herrn Vfs., recht rege Theilnahme unter den Mathematikern finden möge. G.

Digitized by Google

LXIII.

Literarischer Bericht.

Geodäsie.

Cours de Topographie et de Géodésie fait à l'école d'application du corps d'état major. Par J. F. Salneuve, Chef d'escadron d'état major. Seconde édition. Paris. 1850. 3 Thlr. 10 Sgr. 8.

Sind wir auch nicht gerade der Meinung, dass dieses Werk besondere Vorzüge vor unsern bekannten deutschen Werken derselben Gattung hat, so glauben wir doch die Leser des Archivs auf dasselbe aufmerksam machen zu müssen, weil es in Frankreich sehr beliebt zu sein scheint, und allerdings eine ziemlich vollständige Darstellung der niedern und höhern Geodäsie liefert. Ausserdem findet man in demselben auch manche in Deutschland noch unbekannte Instrumente beschrieben, z. B. einige Distanzmesser, die wohl einige Beachtung verdienen dürften, und grösstentheils von einem geschickten höhern piemontesischen Offizier, Herrn Porro, angegeben worden sind, von dem der Herr Vf. in der Vorrede sagt: „qui, à une profonde instruction, joint une sagacité merveilleuse dans l'application des principes d'optique, qu'il possède si bien. On lira surtout avec intérêt, je pense, la description de sa lunette anallatique, de sa longue-vue cornet, et, surtout, de l'appareil propre à mesurer les bases" über welchen letzteren eine Commission der Akademie der Wissenschaften in Paris, bestehend aus den Herren Binet, Faye und Largeteau, einen sehr günstigen Bericht erstattet hat. Der Inhalt der einzelnen Kapitel dieses allerdings in mancher Beziehung zu empfehlenden Buchs im Allgemeinen ist folgender.

Livre I. und *Livre* II. Diese zwei ersten Bücher enthalten eine ziemlich vollständige Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie, selbst auch den Binomischen Lehrsatz, und hätten ganz wegbleiben sollen. — *Livre* III. Topographie. Chap. I. Notions générales. Chap. II. Canevas topographique. Chap. III. Différens modes de lever. Instruments propres à mesurer les angles. Chap. IV. Instruments employés à la mesure des distances. Chap. V. Levées au goniomètre et à la chaine. Chap. VI. Levées à la Chaine, alignements, transversales. Chap. VII. Instruments à réflexion. Chap. VIII. En-

semble des opérations d'une levée relatives à la planimétrie, en combinant tous les procédés décrits isolément. Chap. IX. Nivellement. Chap. X. Nivellement topographiqué et figuré du terrain. Chap. XI. Du dessin des cartes topographiques. Chap. XII. Levées militaires. Chap. XIII. Plans cotés. Chap. XIV. Copie et réduction des cartes et plans. Chap. XV. Compas de proportion. Chap. XVI. Emploi de la boussole et de l'éclimètre à la perspective. — *Livre* IV. Optique. Dieses Buch enthält eine für den Zweck des Werks sehr vollständige Abhandlung über Optik, worin sich manches Bemerkenswerthe findet, z. B. die lunette anallatique de M. Porro. — *Livre* V. Géodésie. Chap. I. Ensemble des opérations géodésiques. Chap. II. Mesures des bases (p. 350. Appareil nouveau pour mesurer les bases géodésiques par M. Porro. Chap. III. Mesures des angles et description des instruments qui y sont consacrés. Chap. IV. Calculs relatifs à la résolution des triangles. Chap. V. Calculs des coordonnées des points. Chap. VI. Notions de Géométrie analytique, indispensables à l'intelligence des formules de latitude. (Hätte auch wegbleiben können.) Chap. VII. Expression analytique de quelques lignes remarquables du sphéroide terrestre. Chap. VIII. Formules de latitude, longitude et azimut. Chap. IX. Nivellement géodésique et barométrique. Chap. X. Projections. — *Livre* VI. Observations et calculs astronomiques. Chap. I. Notions préliminaires. Chap. II. Précession, nutation, aberration, parallaxe, réfraction. Chap. III. Marche d'une pendule, latitude et longitude d'un point; azimut d'un coté. — *Suite de tableaux* 1°. a l'inscription des angles observés et des éléments de réduction, ainsi qu'aux différents calculs géodésiques; 2° aux calculs astronomiques.

Astronomie.

Schumachers Tod.

Es ist dem Herzen des Herausgebers des Archivs Bedürfniss, seinen Lesern das Hinscheiden eines Mannes anzuzeigen, welchem er, so lange er das Glück hatte, mit ihm in wissenschaftlichem Verkehr zu stehen, die höchste Achtung gezollt hat, eine Achtung, die nie durch etwas getrübt worden ist, und auch über das Grab hinüber dauern wird, so lange das Herz des Herausgebers des Archivs noch schlagen wird. *Heinrich Christian Schumacher* ist nicht mehr! Seine Verdienste um die Wissenschaft zu würdigen, kann hier nicht der Ort sein. Sie sind der Welt bekannt. Aber eine kurze Skizze seiner äusseren Lebensumstände wird und muss bei so hohem Verdienst den Lesern des Archivs lehrreich und interessant sein. Ich stehe daher nicht an, einen solchen kurzen Abriss dieses thätigen und erfolgreichen Lebens aus der neuesten Nummer von Jahn's Unterhaltungen für Dilettanten und Freunde der Astronomie, Geographie

Digitized by Google

und Meteorologie. 1851. Nr. 11., die mir vorliegt, zu entnehmen, deren historische Richtigkeit keinen Zweifel lässt, da sie von einem Manne, Herrn Doctor Petersen in Altona, herrührt, der dem Dahingeschiedenen sehr nahe stand. Herr Doctor Jahn hat übrigens schon in Nr. 3. 4. 5. 1851. seiner genannten Zeitschrift eine ausführlichere Darstellung von Schumachers Leben geliefert, die zugleich auch die wissenschaftlichen Verdienste des Verstorbenen genauer in's Auge fasst, und auf die ich daher in dieser Beziehung die Leser verweise.

G.

Heinrich Christian Schumacher*)

ist in dem Flecken Bramstedt in Holstein den 3. Septbr. 1780 geboren. Sein Vater, der königl. dänische Conferenzrath Andreas Schumacher, dessen Voreltern im 16. Jahrhundert aus Westphalen nach Dänemark gekommen waren, und von welchen der berühmte Griffenfeldt abstammte, war in jüngern Jahren bei der dänischen Gesandtschaft in St. Petersburg angestellt, erhielt später eine Anstellung unter König Christian VII. in Kopenhagen, wurde hierauf Kirchspielvogt in Bramstedt, wo H. C. Schumacher geboren wurde, und zuletzt Amtmann in Segeberg, wo ihm ein zweiter Sohn, Andreas Anton Friedrich Schumacher im Jahre 1782 geboren ward. Er starb hier, den 2. Januar 1790, innigst betrauert wegen seines vortrefflichen Charakters und seines seltenen Verstandes, von Allen, die ihn kannten. Die Mutter unseres Schumachers war Sophie Hedwig geb. Weddy, verwittwete Hofräthin Büsching, Schwägerin des berühmten Geographen Büsching. Sie starb am 30. October 1822 in Altona, wo auf dem Kirchhofe zum heiligen Geist jetzt der Sohn neben ihr in Frieden ruht.

H. C. Schumacher und sein Bruder, die einzigen Kinder dieser Ehe, wurden, so lange der Vater lebte, unter seiner Leitung von einem Hauslehrer unterrichtet. Da aber die schwächliche Gesundheit des Vaters diesen nicht hoffen liess, seine hoffnungsvollen Söhne erwachsen zu sehen, so empfahl er sie der Huld des damaligen Kronprinzen, spätern Königs Friedrich VI., der ihn liebte und schätzte, hoffend, sie würden einst dem Vaterlande Ehre machen. Wie beide diese Hoffnung erfüllt haben, ist hinlänglich bekannt, auch blieb der gütige Monarch ihnen stets nicht nur Beschützer, sondern auch Freund.

Als der Vater starb, war der nachherige Pastor in Preetz, Dörfer, rühmlichst bekannt durch seine Topographie von Schleswig und Holstein, der Lehrer der beiden Söhne, mit welchen bald darauf die Mutter nach Altona zog. Hier besuchten Beide das Gymnasium und genossen zugleich Dörfer's Unterricht, der inzwischen Prediger bei der heil. Geist-Kirche geworden war, und dessen Andenken ihnen stets in dankbarer Erinnerung blieb.

---

*) Von Herrn Dr. Petersen in Altona an uns mit der Bitte um Aufnahme eingesendet. Diesem geehrten Herrn dafür ergebenst dankend, bemerken wir, dass wir aus diesen sehr schätzbaren Mittheilungen, um Wiederholungen zu vermeiden, nur das weggelassen haben, was bereits S. 17 ff. vorkommt. Die Red. (der astronom. Unterhaltungen.)

Digitized by Google

Schon als Knabe zeigte Schumacher eine besondere Vorliebe für Mathematik; er verfertigte sich hölzerne Uhren und Instrumente, mit denen er Beobachtungen anstellte. Da er als Knabe schwächlich war und der Arzt es für höchst nöthig hielt, dass er einige Zeit seinen Schulfleiss einstelle und die Landluft geniesse, so brachte seine Mutter ihn nach einem ihr befreundeten Prediger auf dem Lande, wo er sehr gern war. Nachdem er hier einige Wochen froh verlebt hatte, erhielt er die Nachricht von seiner Mutter, dass sie das so sehr gewünschte Buch, Wolf's Mathematik, für ihn gekauft habe, und nun liess er ihr keine Ruhe mehr, bis sie ihm erlaubte, zurück zu seinen Studien zu kehren. Durch Hilfe dieses Buches brachte er es nun bald sehr weit in der Mathematik, so wie er überhaupt seinen grossen Reichthum an Kenntnissen, auch namentlich sowohl in den alten, als in vielen der neuern Sprachen, seinem angestrengten Fleisse und dem Selbststudium verdankte.

Er studirte in Kiel und Göttingen Jurisprudenz, beschäftigte sich aber nebenher fleissig mit Mathematik. Von der Universität brachte er die musterhaftesten Zeugnisse der Professoren mit, die seinen Fleiss, seine Kenntnisse und seinen reinen Lebenswandel rühmlichst hervorhoben. Im Jahr 1806 promovirte er in Göttingen zum Doctor der Rechte. Hierauf verlebte er einige Jahre in Liefland als Hauslehrer. Von dort zurückgekehrt, hatte er das Glück dem Curator der Universität in Kiel, Grafen v. Reventlow, bekannt zu werden, durch dessen Einfluss es ihm möglich wurde, sich nun ganz der Mathematik und Astronomie zu widmen, und einige Jahre bei dem berühmten Gauss in Göttingen zuzubringen, der bald in ihm den Geistesverwandten erkannte, und ihm Freund ward, welches Bündniss nur der Tod für diese Welt löste.

Im Jahre 1810 oder 1811 wurde er zum ausserordentlichen Professor der Astronomie in Kopenhagen ernannt, als noch der Conferenzrath Bugge daselbst Director der Sternwarte war, folgte aber 1812 mit Erlaubniss seines Königs und unter der Bedingung, nach dem etwaigen Ableben Bugge's nach Kopenhagen zurück zu kehren, einem sehr vortheilhaften Rufe als Director der Mannheimer Sternwarte, wozu ihn sowohl der Wunsch, allein einer Sternwarte vorzustehen, bestimmte, als auch der Rath eines hochgestellten Beschützers und Freundes, mit dem er bis zu dessen Tode stets in freundschaftlichem Briefwechsel stand.

So trat er im Herbste 1813 die Stelle als Director der Sternwarte in Mannheim an, verheirathete sich aber vorher mit seiner jetzt um ihn trauernden Wittwe, Christine Magdalene geb. v. Schoon, mit welcher er in einer höchst glücklichen Ehe lebte und mit 7 Kindern, 4 Söhnen und 3 Töchtern, gesegnet wurde, von welchen ihm der jüngste und älteste Sohn bereits in die Ewigkeit vorangegangen waren. Schon 1½ Jahr hierauf starb Bugge, und nachdem er im Februar 1815 in Wien bei dem Könige von Dänemark, der damals des Congresses wegen sich dort aufhielt (Schumacher traf dort auch seinen geliebten Bruder, der Adjutant des Königs war), gewesen, um ihm wegen seiner zukünftigen Stellung in Kopenhagen einen Vortrag zu machen, trat er seine Stelle

Digitized by Google

ls ordentlicher Prof. der Astronomie und Director der Sternwarte dort an. Er hielt seine Vorlesungen in lateinischer Sprache.

Er war mit allen bedeutenden Gelehrten befreundet und mit len meisten auch persönlich bekannt, welche Bekanntschaften r theils zu Hause bei sich, theils auf seinen wissenschaftlichen Reisen gemacht hatte; so z. B. auf der Reise nach Frankreich nd England im Jahre 1819. Fernere Reisen unternahm er 1826 ach München, 1834 nach Berlin, um Bessel und Encke zu besuchen..... Ausserdem machte er jährlich eine Reise nach Kopenhagen und, so lange Olbers lebte, auch nach Bremen. Unter seiner Anleitung haben sich für die Astronomie und Mathematik ganz gebildet: die Herrn Gunlaa, Lehrer auf Island, Nissen, Deichgraf in Tondern, Hofrath Hansen, Director der Sternwarte in Gotha, Hofrath Claussen, Observator der Sternwarte in Dorpat, Dr. Peters, Prof. der Astronomie in Königsberg und Dr. Petersen seit 1827 sein Gehilfe bei der Sternwarte in Altona. Ausserdem haben sich kürzere Zeit in Altona aufgehalten, um sich unter seiner Aufsicht im Beobachten zu üben, die Herren Professoren und jetzt Directoren von Sternwarten: Olufsen in Kopenhagen, Selander in Stockholm, Svanberg in Upsala, v. Fuss in Wilna, Agaardh in Lund, Dr. Gould zu Cambridge in Nordamerika, und in den letzten Jahren sein Sohn Richard Schumacher, Dr. Olde, A. Sonntag und A. Quirling.

Welche Fähigkeiten er hierdurch der Astronomie zugeführt hat, ist zu bekannt, als dass es hier näher aus einander gesetzt zu werden brauchte; eben so was er selbst für seine Wissenschaft gethan. . . . . Andere bedeutende Arbeiten, welche noch nicht oder nicht vollständig publicirt sind, jetzt aber hoffentlich bald der Oeffentlichkeit werden übergeben werden, sind: Die Arbeiten an der dänischen Gradmessung, die Bestimmung der Länge des einfachen Pendels durch Beobachtungen auf Güldenstein 1829 und 1830, seine Gewichtsbestimmungen, die von ihm veranstalteten Chronometer-Reisen zwischen Altona und Lübeck. Ausserdem liegen viele Reihen von astronomischen Beobachtungen von ihm vor.

So hoch er als Gelehrter stand, so hoch stand er auch als Mensch. Er war der liebenswürdigste und nachsichtsvollste Gatte und Vater. In Gesellschaften war er stets heiter und munter, und wo er nur Jemandem helfen konnte, scheute er keine Mühe und selbst kein Opfer von seiner Seite, vorzüglich, wenn er sich davon Erfolg für den, dem er helfen wollte, versprach. Er konnte mit der grössten Geduld und ohne Miene des Missmuths dabei zu zeigen, selbst wenn er mit Arbeiten überhäuft war, die unbedeutendsten und langweiligsten Erörterungen anhören, und fand immer nachher Zeit, das Versäumte nachzuholen. Er wurde von Allen, die ihn näher kannten, verehrt und geliebt, und sein Andenken wird ihnen stets unvergesslich bleiben.

Ueber die näheren Umstände seines Todes giebt uns die mit einem schwarzen Rande umgebene Nr. 744. der astronomischen Nachrichten die folgende Nachricht:

Am 28sten December 1859, Vormittags 11½ Uhr, entschlief sanft und ruhig, unter den Erscheinungen einer Lungenlähmung,

Digitized by Google

Heinrich Christian Schumacher, in seinem am 3ten Septbr. angefangenen 71sten Lebensjahre. Schon ein halbes Jahr vor seinem Ende glaubte er eine merkliche Abnahme seiner Kräfte zu verspüren, und wiederholt sagte er seinen Tod mit dem Ausgange des Jahres voraus. Leberbeschwerden bildeten die objectiven Manifestationen seiner kranken Gefühle. Sie waren ohne Zweifel, nach der Ansicht seines vieljährigen befreundeten Arztes, Folgen seines Stubenlebens, aber auch nicht ausser Beziehung zu den Zeitverhältnissen. In den letzten Tagen des Novembers nahmen sie einen acuten Verlauf, konnten dieses Mal nicht, wie es in den letzten Jahren glücklicher Weise mehrfach der Fall gewesen war, durch einen, leider zu kurzen und unvollständigen Podagraanfall hinlänglich abgeleitet werden, und führten nach vielen Schmerzen und Beschwerden, welche der Leidende mit unübertroffener Geduld und Fassung ruhig und gelassen ertrug, den traurigen Ausgang herbei.

Er wurde während seiner schweren Krankheit mit der seltensten Liebe und Sorgfalt von seiner nun trauernden Frau und ältesten Tochter, Sophie, gepflegt. Sein Geist blieb bis zum letzten Augenblicke rege und ungeschwächt, und noch am Abende vor seinem Sterbetage, da ich wie gewöhnlich ihm die Zeitung vorlas, machte er durch Zeichen bemerkbar, welche Artikel ihn vorzüglich ansprachen, denn leider wurde ihm, während der letzten Hälfte seines Schmerzenslagers, das Sprechen sehr schwer, und machte jede directe Unterhaltung mit ihm unmöglich.

Es wäre eine Vermessenheit, wollte ich hier auch nur ein Wort über seine grossen Verdienste um die Wissenschaften hinzufügen; sein Verlust ist unersetzlich, diese Nachrichten sind sprechende Thaten.

Altona 1851. Januar 5.

A. C. Petersen.

Abriss der praktischen Astronomie, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung von Dr. A. Sawitsch, Professor der Astronomie an der kaiserlichen Universität zu St. Petersburg. Aus dem Russischen übersetzt von Dr. W. C. Götze. Mit mehreren im Originalwerke nicht vorhandenen vom Herrn Verfasser nachgelieferten Zusätzen und Erweiterungen. Zweiter Band. Hamburg. 1851. 8.

Wir freuen uns sehr, schon jetzt den zweiten Band dieses vortrefflichen Werkes, dessen ersten Band wir in Nr. LIX. S. 800. angezeigt haben, den Lesern des Archivs wiederholt zur sorgfältigsten Beachtung dringend empfehlen zu können. Was wir über den ersten Band gesagt haben, gilt auch ganz von dem vorliegenden zweiten Bande, und Herr Professor Sawitsch hat sich durch die Herausgabe des nun in seiner Vollendung vorliegenden Werkes jedenfalls ein grosses Verdienst erworben, da uns kein anderes Werk bekannt ist, in welchem die neuesten Beobachtungs- und Rechnungsmethoden so vollständig und deutlich entwickelt wären wie in dem vorliegenden, innerhalb des Kreises nämlich, den sich das Werk selbst gezogen hat, indem es hauptsächlich

Digitized by Google

die geographische Ortsbestimmung zum Zweck hat, so dass es also z. B. über die Berechnung der Planeten- und Cometenbahnen nichts enthält, was auch jedenfalls seinen Umfang zu sehr vergrössert haben würde. Eben so freudig wie das Verdienst des Herrn Verfassers erkennen wir aber auch wiederholt das Verdienst des Herrn Uebersetzers an, was sich derselbe nicht nur durch die sehr gute Uebertragung dieses Werks aus dem Russischen in's Deutsche um unsere vaterländische Literatur insbesondere, sondern auch in allgemein wissenschaftlicher Beziehung durch manche eigene Zusätze zu diesem in so vielen Beziehungen ausgezeichneten Werke erworben hat. Wir können nicht umhin, dem Herrn Verfasser und dem Herrn Uebersetzer aufrichtigst zu der nunmehrigen Vollendung dieses Werkes Glück zu wünschen, und wollen nun noch den Inhalt des zweiten Theils im Allgemeinen angeben, so weit es hier der Raum gestattet.

S 1. *Fünfter Abschnitt.* Von den verschiedenen Methoden der Längenbestimmung. Dieser Abschnitt gehört natürlich zu den wichtigsten des ganzen Werks, und ist auch auf eine dieser grossen Wichtigkeit ganz entsprechende Weise behandelt worden. I. Längenbestimmung durch Chronometerübertragungen (Hier auch z. B. von S. 13. — S. 16. „Ueber eine bequeme Methode zur Bestimmung der sogenannten persönlichen Gleichung, welche zwischen verschiedenen Beobachtern stattfinden kann"). — II. Bestimmung des Längenunterschiedes durch besondere momentane Signale, und zwar entweder durch Pulversignale, oder mittelst electromagnetischer Telegraphen. — III. Allgemeine astronomische Methode zur Längenbestimmung. 1stens Berechnung der Länge aus Mondfinsternissen und aus den Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. 2tens. Berechnung der Länge aus den Sonnenfinsternissen und aus den Bedeckungen der Sterne und Planeten durch den Mond. Man wird hier Alles finden, was über diesen wichtigen Gegenstand bis jetzt bekannt und wirklich praktisch anwendbar ist. Insbesondere machen wir auch auf die von S. 133. angegebene Darstellung der „Gaussischen Methode, den Verlauf einer Sonnenfinsterniss auf der Erde überhaupt zu berechnen" aufmerksam, welcher der Herr Uebersetzer zugleich einige eigne werthvolle Zusätze (Methode des Uebersetzers zur Berechnung des Anfangs und des Endes der Finsterniss, so wie der grössten Phase, mit Hülfe der Gaussischen Methode. Beispiel dazu) beigegeben hat. Ausserdem hat derselbe nach dieser Methode die totale Sonnenfinsterniss am 28sten Juli 1851. auf S. 189. ff. berechnet, und dadurch die praktische Anwendbarkeit derselben in ein sehr helles Licht gesetzt. Auf S. 133. wird gesagt, dass diese Gaussische Methode zuerst in der Dissertation des Herrn G. F. Ursin: De eclipsi solari die 7. Septembris 1820. apparitura. Hafniae 1820. näher erläutert worden sei. Die Methode kann mit dem Namen einer Projectionsmethode belegt werden, und als Projectionsebene wird (S. 133.) die Ebene angenommen, welche senkrecht auf der Linie zwischen dem Mittelpunkte der Sonne und der Erde steht und in der Nähe der Conjunction des Mondes mit der Sonne durch den Mittelpunkt des Mondes geht. Vielleicht dürfte es angemessen sein, bei dieser Gelegenheit an eine schon

Digitized by Google

im Jahre 1812. erschienene Dissertation des Herrn Professors Gerling in Marburg zu erinnern, welche den Titel hat: Methodi projectionis orthographicae usum ad calculos parallacticos facilitandos explicavit simulque eclipsin solarem die VII. Septbr. 1820. appariturum hoc modo tractatam mappaque geographica illustratam tanquam exemplum exposuit Christianus Ludovicus Gerling. Gottingae. 1812. 4. In dieser Dissertation sagt der Herr Vf. über die angenommene Projectionsebene auf p. 2: „Quanquam vero ipsa haec projectionis methodus ab aliis aliter tractetur, ut postea videbimus, tamen inter omnes convenit unum idemque planum eligere, ad quod omnia puncta in hac quaestione obvia perpendiculis demissis referantur, planum puta, in lineam rectam fixae occultae vel solis eclipsin aut transitum patientis centrum cum terrae centro jungentem, perpendiculare. In sequentibus vero patebit, ex innumeris iis planis, quae huic conditioni satisfaciunt, optime id eligi, quod ipsum lunae vel planetae solis discum transmigrantis centrum transiens, corporum horum orbitas curvilineas ita sequatur, ut semper sibi ipsi parallelum moveatur" —

Die Methode der Längenbestimmung durch Mondsculminationen hat in dieser Nr. III des fünften Abschnitts auch eine Stelle gefunden, und man findet hier eine sehr deutliche Darstellung der betreffenden Methoden von Nicolai, Struve, u. s. w. — *Sechster Abschnitt.* Von der Berechnung trigonometrischer Messungen. Ausser den gewöhnlicheren Methoden hauptsächlich die Methoden von Bessel und Gauss, Reduction des sphärischen Excesses, kürzeste Entfernung zweier Punkte auf der Erde, deren geographische Lage gegeben ist. u. s. w. — *Erster Anhang.* Beschreibung und Gebrauch des Spigelsextanten. Sehr ausführlich, deutlich und praktisch. Hierin verschiedene Methoden der Breiten - und Längenbestimmung, bei denen der Spiegelsextant hauptsächlich Anwendung findet. Correspondirende Höhen. Circummeridian-Höhen. Zwei ausserhalb des Meridians gemessene Höhen. Gaussische Methode die Polhöhe, die Uhrcorrection und den Fehler des Instrumentes aus den Zeiten abzuleiten, wo drei verschiedene Sterne einerlei Höhe erreichen. Knorre's allgemeine Auflösung dieses Problems, sowohl für den Fall, dass nur drei Sterne beobachtet wurden, als auch für jede beliebige Anzahl von Sternen (Herr Professor Anger in Danzig hat in den Schriften der dortigen naturforschenden Gesellschaft auch eine Auflösung dieses Problems gegeben, wo, so viel uns jetzt erinnerlich ist, auch schon der Fall einer grösseren Anzahl von Sternen ausführliche Berücksichtigung gefunden hat.). Bestimmung des Azimuths terrestrischer Gegenstände mittelst des Spiegelsextanten. Bestimmung der geographischen Länge durch Monddistanzen. Borda's, Bessels Methoden u. s. w. *Zweiter Anhang.* Von der Interpolation. Alles praktisch Wichtige enthaltend.

Man wird aus dieser Inhaltsangabe, in welcher der Beschränktheit des Raumes wegen bei Weitem nicht alles Wichtige Platz finden konnte, gewiss die Reichhaltigkeit dieses Werks erkennen, und unser Urtheil gerechtfertigt finden, dass dieses Werk in dem Kreise, welchen es sich selbst gezogen hat, die vollständigste Bearbeitung der praktischen Astronomie liefert, welche wir bis jetzt besitzen.

Digitized by Google

LXIV.

Literarischer Bericht.

Mechanik.

Der Attractionscalcül. Eine Monographie von Dr. Oskar Schlömilch, Prof. der höheren Mathematik und der analytischen Mechanik an der K. Sächs. techn. Bildungsanstalt zu Dresden. Mit einer Figurentafel. Halle. Druck und Verlag von H. W. Schmidt. 1851. — 58. S. in Octav.

(Angezeigt vom Herrn Professor Dr. Möbius in Leipzig.)

Eine mit der an ihrem Verfasser gewohnten Klarheit und Schärfe geschriebene Abhandlung. Sie zerfällt in zehn Paragraphen: §. 1. Allgemeine Begriffe und Formeln; §. 2. Anziehung sehr weit von einander entfernter Massen; §. 3. Anziehung des abgestumpften Kegels; §. 4. Anziehung der Kugel und Kugelschaale. Der übrige Theil der Schrift behandelt das so vielseitig schon in Angriff genommene Problem der Attraction eines Ellipsoids: §. 5. Anziehung des homogenen dreiachsigen Ellipsoids; §. 6. Formeln für das Rotationsellipsoid; §. 7. Das Reductionstheorem von Ivory. Der in diesen §§. vom Verf. eingeschlagene Weg ist demjenigen ähnlich, welchen Poisson in seinem Traité de Mécanique, 2. édit., Tome I. Seite 185. und folg. genommen, nur dass H. Schl. den Gegenstand auf eine für den Anfänger fasslichere Weise darzustellen und die Schlüsse hier und da schärfer zu begründen sucht.

In den drei noch übrigen §§. (8. 9. 10.) denkt sich der Verfasser des Ellipsoid durch Flächen, welche seiner Oberfläche ähnlich und mit ihr concentrisch sind, in unendlich dünne Schichten zerlegt, und nimmt an, dass die Dichtigkeit, welche im Vorhergehenden für alle Punkte des Ellipsoids dieselbe war, von einer Schicht zur anderen nach einem beliebig gegebenen Gesetze veränderlich sei. Um nun auch die von solch einem nicht homogenen Ellipsoid auf einen in seinem Innern oder ausserhalb liegenden Punkt ausgeübte Anziehung zu bestimmen, beginnt der Verfasser den Calcul ganz von Neuem, wobei er sich des von Le-

Digitized by Google

jeune Dirichlet erfundenen und von diesem (wie aus Crelle's Journal für Math. XX. Band, Seite 276. zu ersehen) beim homogenen Ellipsoid in Anwendung gebrachten Kunstgriffs bedient, welcher darin besteht, dass man, um den Werth eines bestimmten Integrals zu finden, dasselbe mit einer discontinuirlichen, gleichfalls als bestimmtes Integral ausgedrückten Function multiplicirt, welche innerhalb der Grenzen des ersteren Integrals $=1$, über dieselben hinaus aber $=0$ ist. Er gelangt auf solche Weise zu einer Formel (no. 97.), welche die Anziehung des Punktes durch ein einfaches bestimmtes Integral ausdrückt, dessen Grenzen durch die Lage des Punktes gegen das Ellipsoid bedingt werden. Hieraus leitet er schlüsslich ein sehr bemerkenswerthes Theorem ab, welches eine Verallgemeinerung des schönen von Legendre zuerst nur für das Rotationsellipsoid und später von Laplace allgemein für jedes homogene Ellipsoid bewiesenen Theorems ist: dass die Anziehung eines äusseren Punktes von einem Ellipsoid dieselbe Richtung hat, wie die Anziehung desselben Punktes von einem zweiten mit dem ersteren confocalen Ellipsoid, dessen Oberfläche durch diesen Punkt geht, und dass sich unter der Voraussetzung, dass beide Ellipsoide einerlei Dichtigkeit haben, die Anziehungen selbst wie die Volumina der beiden Ellipsoide verhalten. Dieser Satz gilt nämlich, wie H. Schl. zeigt, wörtlich auch dann, wenn man statt die zwei Ellipsoide homogen und gleich dicht vorauszusetzen, annimmt, dass — wie sich Ref. ausdrücken möchte — bei dem einen, wie bei dem anderen Ellipsoid die Dichtigkeit in jedem Punkte eine und dieselbe Function des Verhältnisses ist, in welchem der vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Ellipsoide bis an den Punkt gezogene Radius zu dem über den Punkt hinaus bis an die Oberfläche des betreffenden Ellipsoids verlängerten Radius steht. Nur muss Ref. hierbei noch bemerken, dass auf Seite 43 unten, wo in drei Zeilen auf das in der Geschichte dieser Untersuchungen Epoche machende Legendre'sche Theorem, als eine einfache Folgerung aus dem allgemeineren Theorem, hingedeutet wird, der Name Legendre's mit zu nennen gewesen wäre, indem ohne solches es scheinen muss, als ob H. Schl. jenes Theorem als schon entdeckt nicht gekannt habe.

Die Geschicklichkeit, welche H. Schl. bei der Entwickelung seiner Formeln für das nicht homogene Ellipsoid durch mannigfache zum Theil sehr kunstreiche Transformationen bestimmter Integrale beweist, verdient rühmliche Anerkennung. Dass aber dadurch die Theorie der Attraction des Ellipsoids eine wesentliche Bereicherung erhalten habe, wie doch der Leser nach der der Schrift vorausgeschickten kurzen Einleitung zu erwarten berechtigt ist, muss Referent in Abrede stellen. Denn die das Endresultat in sich fassende Formel No. 97. ist nach Weglassung des Integralzeichens vollkommen einerlei mit der schon vor längerer Zeit von Poisson gegebenen Formel für die Attraction einer unendlich dünnen von zwei concentrischen und einander ähnlichen Ellipsoidenflächen begränzten Schicht auf einen äusseren Punkt, wenn diese Formel noch mit der die Dichtigkeit der Schicht ausdrückenden Function multiplicirt wird.

Man findet diese Poisson'sche Formel überaus einfach hergeleitet in einem Aufsatze Plana's in Crelle's Journal, XX. Band,

Digitized by Google

Seite 217. und 218. Sie ergiebt sich hiernach, wenn man zuerst mit Hülfe des Ivory'schen Theorems die Formel für die Attraction eines Ellipsoids auf einen äusseren Punkt entwickelt (Legendre Traité des fonct. ellipt., Tome I., pag. 554.), und sodann diese (das Legendre'sche Theorem in sich schliessende) Formel, nachdem sie auf passende Weise umgebildet worden, nach den Dimensionen des Ellipsoids unter der Hypothese differentiirt, dass letzteres sich ähnlich bleiben soll. — Mit Anwendung dieses Verfahrens würden sich die zur Schlussformel Nr. 97. nöthigen Entwickelungen, wozu H. Schl. den Raum von Seite 33. bis 41. und in hinzugefügten an sich sehr schätzenswerthen Noten von Seite 51. bis 58. verwendet, auf etwa vier Seiten haben reduciren lassen. M.

Astronomie.

Uranos. Synchronisch geordnete Ephemeride aller Himmelserscheinungen des Jahres 1851, erstes Semester. Vom Jahre 1846 an herausgegeben von der Königlichen Universitäts-Sternwarte zu Breslau. Sechster Jahrgang. Breslau. 1851.

Zweck und Tendenz dieser sehr emptehlenswerthen Ephemeride sind aus unseren früheren Berichten hinreichend bekannt. Wir machen aber darauf aufmerksam, dass von jetzt an die gewiss sehr zweckmässige Einrichtung getroffen worden ist, dass dieselbe in sechs Monate umfassenden Heften erscheint. Diese Einrichtung wird der weiteren Verbreitung dieser Ephemeride gewiss sehr förderlich sein, da die einzelnen Monate nun früher in die Hände der Beobachter gelangen.

Physik.

Aufgaben aus der Physik nebst ihren Auflösungen. Zum Gebrauch für Lehrer und Schüler an höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht bearbeitet von Dr. C. Fliedner, Hauptlehrer an der Realschule zu Hanau. Mit 91 Holzschnitten. Braunschweig 1851. 8.

Diese Sammlung von vorzugsweise aus dem Gebiete der mathematischen Physik entnommenen Aufgaben scheint uns ihrem Zwecke recht wohl zu entsprechen, und verdient Lehrern der Physik zur Beachtung empfohlen zu werden. Die Auflösungen sind beigefügt. Die Aufgaben betreffen: Bewegung der Körper. Maass der Kräfte und ihrer Leistungen. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Sehwerpunkt und Trägheitsmoment. Einfache Maschinen. Centrifugal- und Centripetalkraft. Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenem Wege (Pendel). Stoss. Reibung. Festigkeit. Gleichgewicht und Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Gleichgewicht zwischen

Digitized by Google

tropfbaren flüssigen und festen Körpern. Specifisches Gewicht. Bewegung des Wassers. Gleichgewicht und Druck der Luft. Schall. Ausdehnung der Körper durch die Wärme. Wärmecapacität und Aenderung des Aggregatzustandes. Dämpfe, besonders Wasserdämpfe. Verbrennung und Heizung. Geradlinige Fortpflanzung des Lichts. Sehwinkel. Schatten. Geschwindigkeit des Lichts. Photometrie. Reflexion. Brechung. Linsengläser. Optische Instrumente. Magnetismus. Electricität.

Durch grössere Reichhaltigkeit und theilweise grössere Schwierigkeit der Aufgaben scheint diese Sammlung Vorzüge vor der früher erschienenen Sammlung physikalischer Aufgaben von F. Kries. Jena 1843. zu haben.

Vermischte Schriften.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A. F. R. S. E. Vergl. Liter. Bericht Nr. LVI.

(Leider ist uns Nr. XXIV. dieses ausgezeichneten Journals, wahrscheinlich durch ein Versehen, noch nicht zugegangen, und wird daher später noch angezeigt werden.)

No. XXV. On certain General Properties of Homogeneous Functions. By J. J. Sylvester. — On the Intersections of Two Conics. By J. J. Sylvester. — On certain „Loci" connected with the Geodesic Lines of Surfaces of the Second Order. By John Y. Rutledge. — Two Arithmetical Theorems. By Henry Wilbraham (Diese Theoreme sind folgende: I. Let m be any number not divisible by 2 or 5, and suppose $\frac{1}{m}$ when reduced to a circulating decimal to have a recurring period of p digits; and let N be any other number, in which the number of digits is greater than p: if N be marked off into periods of p digits each (beginning at the units), and these several periods, each considered as a number consisting of p digits, be added together, and the sum be n; then, if n be divisible by m, N also will be divisible thereby; and if n be not so divisible, the remainder, on dividing n by m, will be the same as that found on dividing N by m; or in other words, n will be congruous to N with respect to the modulus m. — II. If m be a prime number, and p be an even number, N may be divided into periods of $\frac{1}{2}p$ digits each; and of these periods, if the 1st, 3rd, 5th, etc. be added together and also the 2nd, 4th, 6th, etc. and the latter sum subtracted from the former, and the difference be called n; then, as in the former theorem, n will yield the same remainder as N on division by m. If n be negative and not divisible by m, the proper remainder is the difference between n and the multiple of

Digitized by Google

m next above it numerically.) — Application of Combinations to the Explanation of Arbogast's Method. By Professor De Morgan. — Notes on Lagrange's Theorem. By Arthur Cayley. — On a double Infinite Series. By Arthur Cayley. — Laws on the Elasticity of Solid Bodies. By W. J. Macquorn Rakine. — Mathematical Notes: I. A Demonstration of Taylor's Theorem. By Homersham Cox. II. Demonstration of the known Theorem, that the Arithmetic Mean between any number of Positive Quantities is greater than their Geometric Mean. By A Thacker. — On the Construction of the Ninth Point of Intersection of Two Curves of the Third Degree, when the other Eight Points are given. By Thomas Weddle. — On the Theory of Linear Transformations. By George Boole.

(The Next Number will be Published on the 1st of May.)

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versammlung in Aarau am 5. 6, 7 August 1850. 35ste Versammlung. Aarau 8.

Von den grösseren in diesem Hefte enthaltenen Abhandlungen machen wir auf die folgenden aufmerksam:

Vortrag des Herrn Leopold von Buch: Ueber einige Riesenthiere der Vorwelt.

Prof. C. F. Schönbein: Ueber den Einfluss des Lichtes auf die chemische Thätigkeit des Sauerstoffs.

Prof. Möllinger: Ueber einen Universalzirkel.

Prof. Mousson: Ueber die Whewell'schen oder Quetelet'schen Streifen.

Ausserdem findet man in diesen Verhandlungen S. 157. — S. 169. eine interessante Lebensbeschreibung des zu Bern verstorbenen verdienten Professors der Mathematik Johann Friedrich Trechsel daselbst, aus welcher wir die folgenden kurzen Notizen ausheben.

Johann Friedrich Trechsel wurde am 4ten März 1776 in der Bernischen Municipalstadt Burgdorf als das jüngste von zwölf Kindern geboren. Schon im 13ten Jahre bezog er die höhere Lehranstalt zu Bern, mit dem Vorsatze, Theologie zu studiren. Später wandte er sich auf den Rath des Professors Itth mehr dem Studium der Mathematik zu, in welcher Tralles, nachheriges Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin, sein Lehrer war. Im Jahre 1805 erhielt er die Professur der Mathematik an der am 2ten November des genannten Jahres errichteten (im Jahre 1834 zu einer Universität erhobenen) Bernischen Akademie, und im Jahre 1812 auch noch die der Physik. Trechsel besass ein ausgezeichnetes Lehrtalent, und hat sich sowohl als Lehrer, als auch namentlich durch die trigonometrische Aufnahme des Kantons Bern um sein Vaterland sehr verdient gemacht, da er auch stets den lebhaftesten Antheil an dessen politischen

Digitized by Google

Schicksalen nahm, und neben seinem Lehramte oft noch öffentliche bürgerliche Aemter bekleidete. Sein Charakter wird in diesem Nekrolog als ein höchst liebenswürdiger, in jeder Beziehung höchst ehrenwerther geschildert. Die Treue in jeder Beziehung galt ihm für das Höchste im Leben, und er hat sie geübt wie Wenige, sagt sein Biograph. Mit vielen der berühmtesten Gelehrten des In- und Auslandes stand er in lebhaftem wissenschaftlichen Verkehr. Seine sonst felsenfeste Gesundheit wurde späterhin theils durch die Anstrengungen bei seinen geodätischen Arbeiten, theils durch mancherlei erlittene Kränkungen und ihn betroffene Unglücksfälle geschwächt. Er starb am 26sten November 1849 früh um 7 Uhr im 74sten Lebensjahre nach kurzem Krankenlager. Der Redner an seinem Grabe schloss mit dem mit vollem Rechte auf ihn anwendbaren Bibelworte: „Sein Leben ist köstlich gewesen, denn es ist lauter Mühe und Arbeit gewesen."

Jahresbericht der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig, im März 1851. (Soweit derselbe die Mathematik betrifft).

I. Bericht über die im Jahre 1850 eingegangenen Preisbewerbungsschriften.

Ueber die zuerst im Jahre 1849 gestellte. und darauf im Jahre 1850 wiederholte Preisaufgabe:

„Unter den von den Alten erwähnten Sonnen- und Mondfin-
„sternissen die beachtenswerthesten von Neuem zu prü-
„fen, und nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrech-
„nung zu entscheiden, ob und welchen Einfluss eine angemes-
„sene Berücksichtigung derselben auf die Bestimmung der
„Mondelemente, insbesondere der Knoten, haben würde"

ist der Gesellschaft nur eine einzige Bewerbungsschrift unter dem Titel:

„Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse
„des Almagest"

und mit dem Motto

„*Multiformi luna ambage torsit ingenia contemplantium et proximum*
„*sidus ignorari maxime indignantium.* (Plin. H. N. II, 9.)"

zugesendet worden. Der Verfasser dieser Abhandlung hat nun zwar die gestellte Frage nur theilweise beantwortet, indem er Sonnenfinsternisse gar nicht, und von den Mondfinsternissen blos die 19 im Almagest verzeichneten berücksichtigte. Da sich jedoch seine Schrift bei genauerer Prüfung in ihren Angaben als sehr zuverlässig erwies, da sie den Gegenstand mit Gewandtheit und richtigem Tacte behandelt hat, und die darin enthaltenen, mittelst der Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Correctionen der mittleren Bewegungen des Mondes und seiner Knoten von nicht unerheblichem Interesse erscheinen, so fand sich die Gesellschaft bewogen, dem Verfasser zwei Drittel des ausgesetzten Preises als Accessit zuzuerkennen.

Digitized by Google

Bei Eröffnung des versiegelten Zettels ergab sich als der Verfasser dieser Abhandlung

Julius Zech,
Dr. phil. in Stuttgart.

II. Preisfrage für das Jahr 1852.

Aus der Astronomie. Für das Jahr 1852.

Der Verfasser der von unsrer Gesellschaft in diesem Jahre mit dem Accessit ausgezeichneten Abhandlung „über die Mondfinsternisse des Almagest", Herr Dr. Zech in Stuttgart, hat durch Berechnung dieser Finsternisse mittelst der Damoiseau'schen Mondtafeln als ziemlich sichres Resultat gefunden, dass in genannten Tafeln die hundertjährige Knotenbewegung des Mondes um etwa 1',7 zu vermindern, also $= 134^{0}\ 8'15''$ zu setzen, und die hundertjährige mittlere Bewegung des Mondes um etwa 0',5 zu vermehren, also $= 307^{0}\ 53'\ 12''$ anzunehmen sei. Da mit Anwendung dieser Correctionen, welche den bekannten Airy'schen nahe kommen, es Herrn Zech gelungen ist, die 19 Finsternisse des Almagest im Ganzen sehr befriedigend durch Rechnung darzustellen, so findet sich die Gesellschaft veranlasst, folgende neue Preisaufgabe vorzulegen:

„die unten verzeichneten, auf zuverlässigen Angaben von Schriftstellern des classischen Alterthums beruhenden Finsternisse nach den Damoiseau'schen Mondtafeln, mit Hinzufügung der vorbemerkten zwei Correctionen zu berechnen, dafern jedoch die Resultate der Rechnung nicht eine zureichende Uebereinstimmung mit den Angaben der Schriftsteller zeigen sollten, zu untersuchen, ob und welche mit der historischen Chronologie vereinbare Abänderungen der für jene Finsternisse seither angenommenen Jahre etwa zu befriedigenderen Ergebnissen führen möchten."

Verzeichniss der zu berechnenden Finsternisse.

1. ☉	F. zu Sardes, im zeitigen Frühjahr, Ol. 74, 4. Herod. 7, 37. (Schol. Aristid. p. 222)	480(?) vor Chr.	
2. ☉	F. zu Athen, nach Mittag, im Sommer Ol. 87, 2. Thuk. 2, 28.	3. Aug. 431	„ „
3. ☉	F. zu Athen, im Anfange des Frühjahrs Ol. 88, 4. Thuk. 4, 52.	20. März 424	„ „
4. ☽	F. zu Syrakus, im Spätsommer Ol. 91, 4. Thuk. 7, 50. Plut. Nik. 23, 28.	27. Aug. 413	„ „
5. ☽	F. zu Athen, Abends, Ol. 93, 3. Xen. Hell. 1, 6, 1.	15. April 406	„ „
6. ☉	F. zu Athen Ol. 94, 1. Xen. Hell. 2, 3, 4.	2. Sept. 404	„ „
7. ☉	F. in Böotien, im Sommer Ol. 96, 3. Xen. Hell. 4, 3, 10	13. Aug. 394	„ „

Digitized by Google

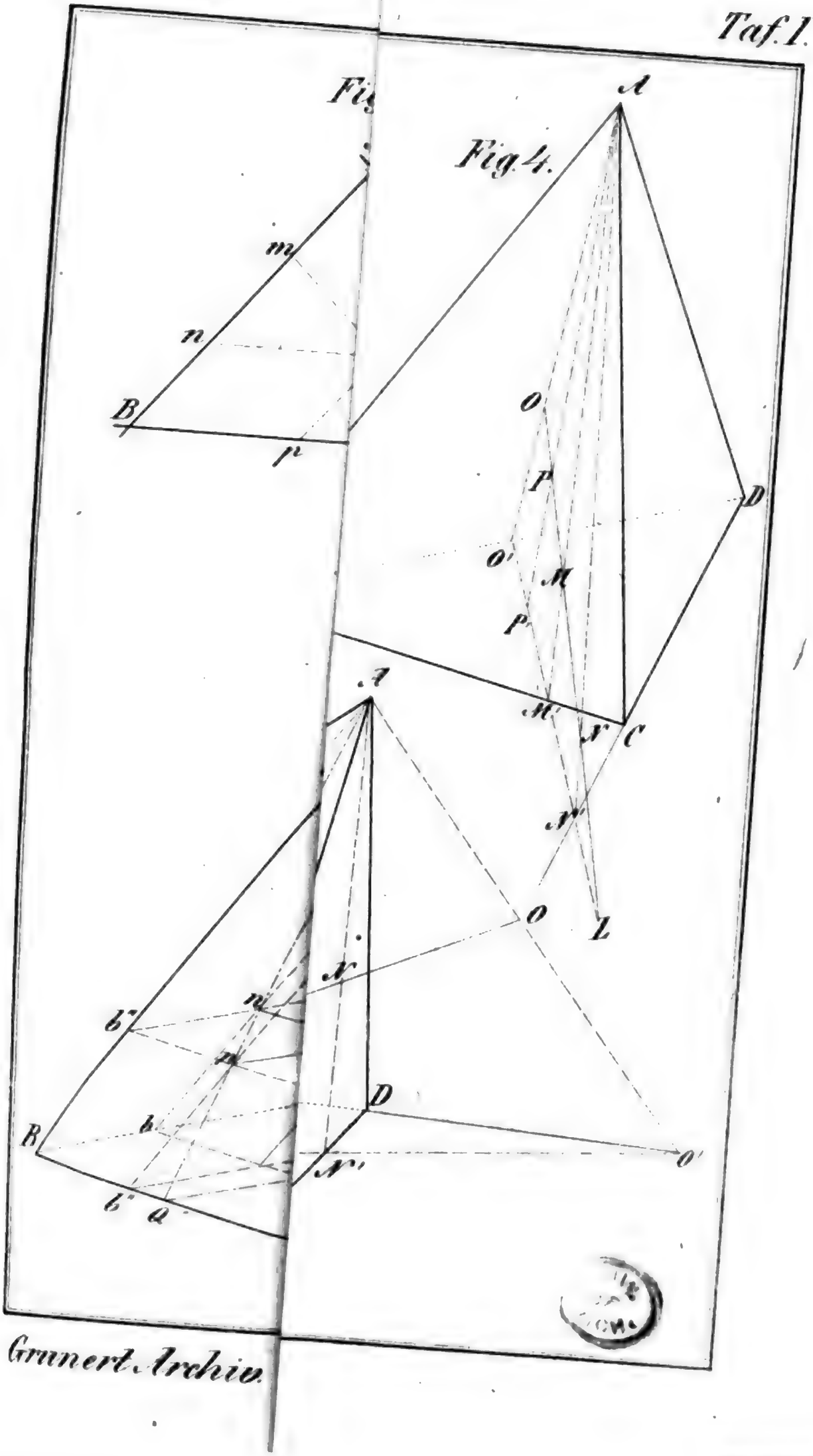
8. ☽	F. zu Arbela, am 15. Boedromion Ol. 112, 2. Plut. Alex. 31. Arrian. Anab. 3, 7, 6 u. 15, 7. Vgl. Ptolem. Geogr. 1, 4. Plin. hist. nat. 2. 70.	20. Sept. 331	vor Chr.
9. ☉	F. zwischen Sicilien und Africa Ol. 117, 2. Diod. 20, 6. Just. 22, 6.	14. Aug. 310	„ „
10. ☽	F. in Makedonien, am 3. röm. Septbr. 586 u. c. Cic. d. rep. 1, 15. Plin. 2, 12. Plut. Aem. Paul. 17. Liv. 44, 37.	21. Juni 168	„ „
11. ☽	F. in Pannonien. Tac. Ann. 1, 28. Dio Cass. 57, 4.	26. Sept. 14	nach Chr.
12. ☉	F. zu Rom. Tac. Ann. 14, 12. Plin. h. n. 2. 70. Dio Cass. 61, 16.	30. April 59	„ „
13. ☽	F. zu Rom	4. März 71	„ „
14. ☉	F. daselbst } Plin. hist. nat. 2, 13.	19. März —	„ „
15. ☉	F. in Sicilien, um Mittag, Firmic. Mat. astr. 1. 2.	17. Juli 334	„ „
16. ☉	F. in Mesopotamien, bei Sonnenaufgang. Ammian. Marc. 20, 3.	27. Aug. 360	„ „

Die Preisbewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, der auswendig dasselbe Motto trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet für das Jahr der Preisfrage mit dem Monat November; die Adresse ist an den jedesmaligen Secretair der Gesellschaft (für das J. 1851 an den ordentl. Prof. der Mineralogie und Geognosie an der Universität zu Leipzig C. F. Naumann) zu richten. Der ausgesetzte Preis beträgt für die Aufgabe aus der Astronomie 24 Ducaten.

Druckfehler.

In der Ueberschrift des Aufsatzes Nr. XXXVII. in Thl. XVI. Heft 4. S. 424. s. m. „Scheffler“ statt „Seheffler“.

Digitized by Google



Grunert Archiv.

Digitized by Google

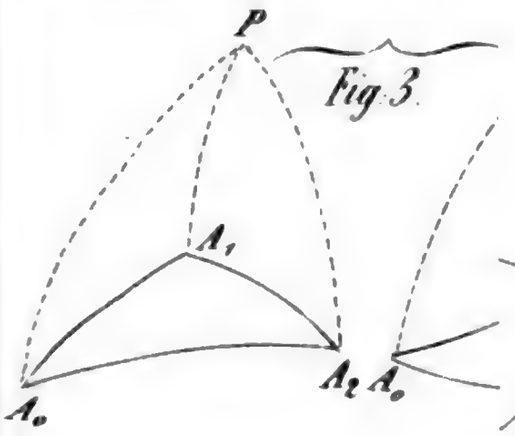


Fig. 3.

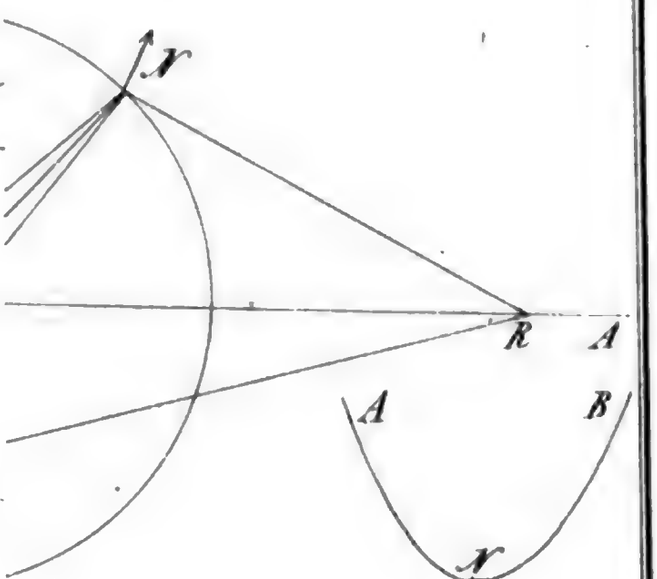


Fig. 4

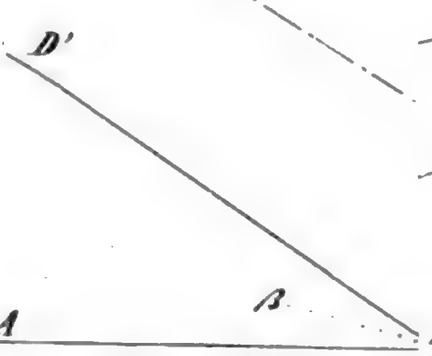


Fig. 5

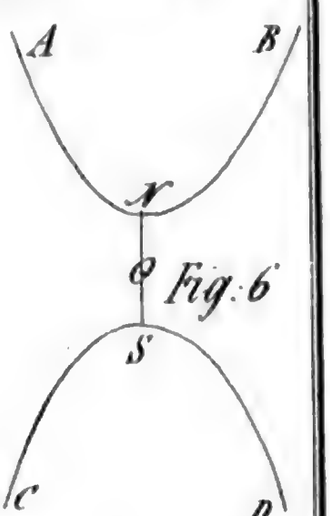


Fig. 6

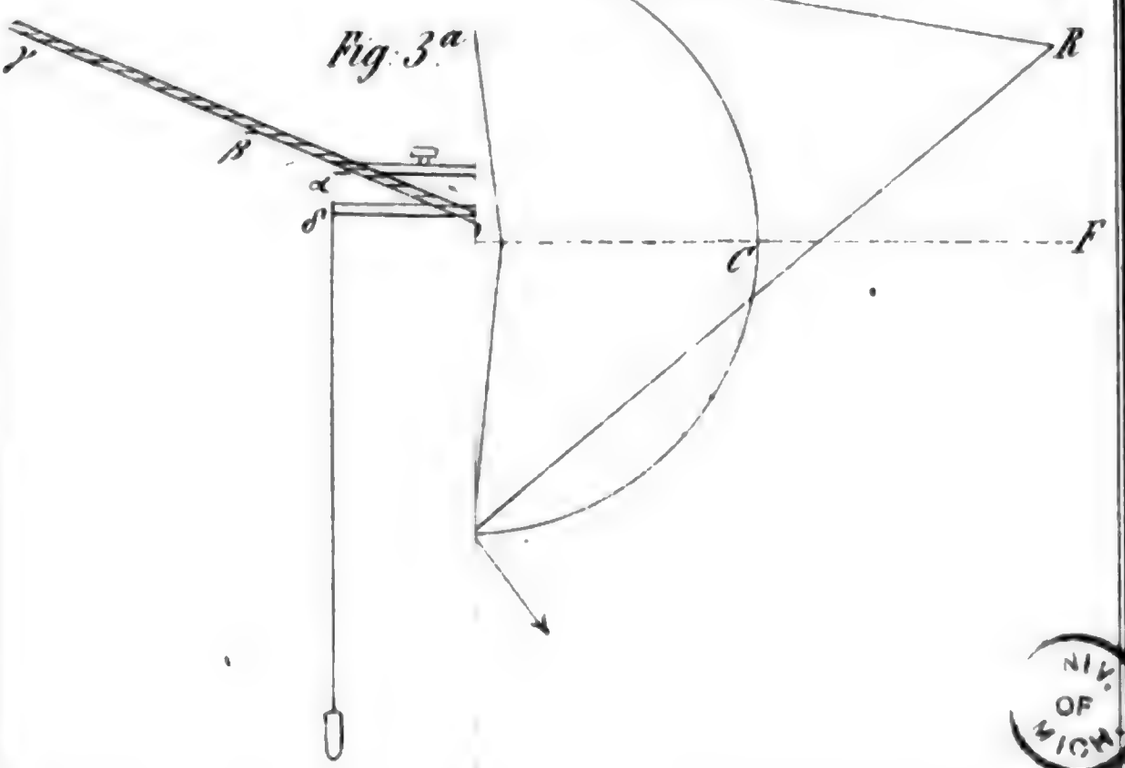


Fig. 3a

UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

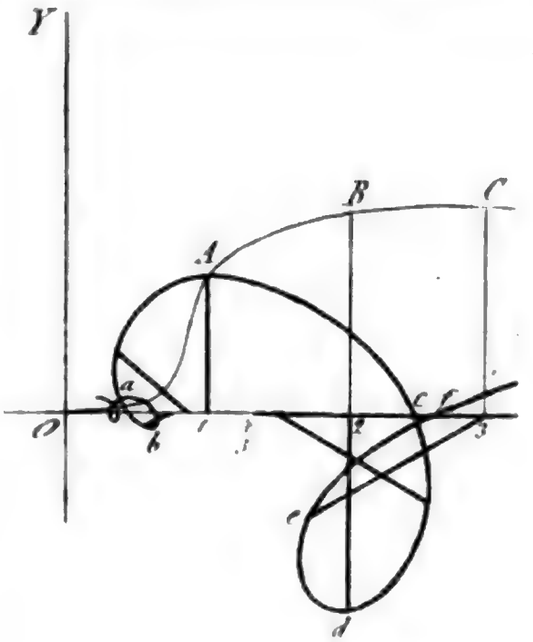
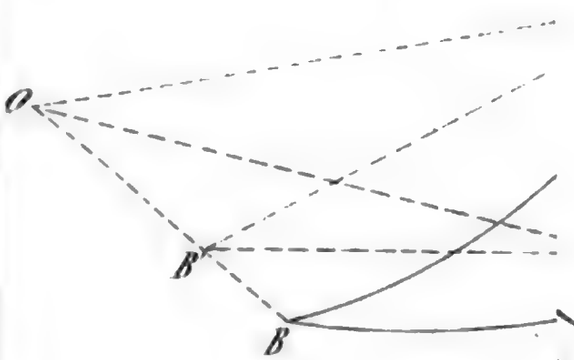
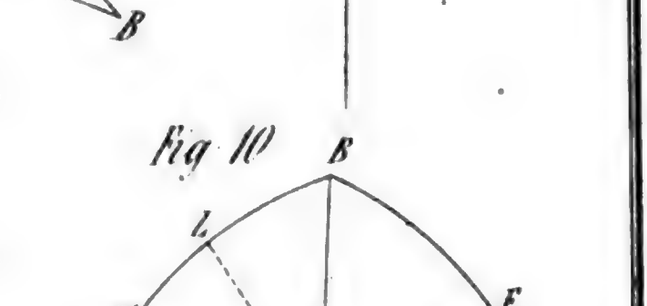


Fig 3.





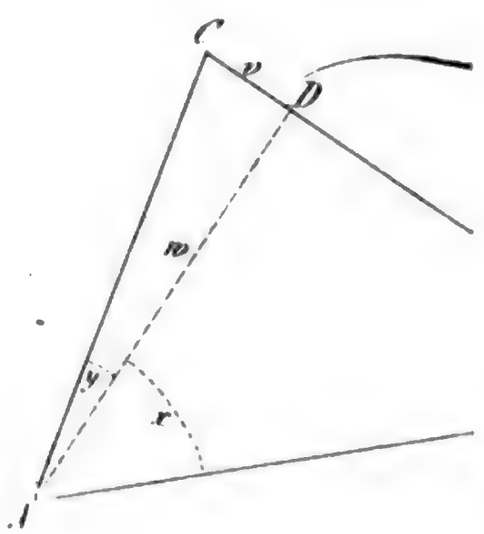


Fig 6

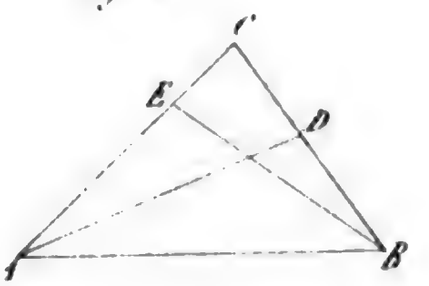


Fig 7

Fig 9

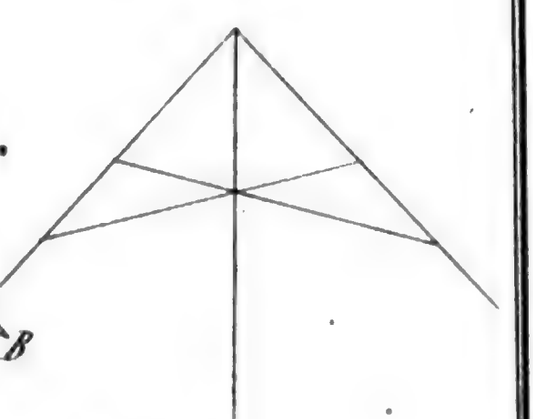
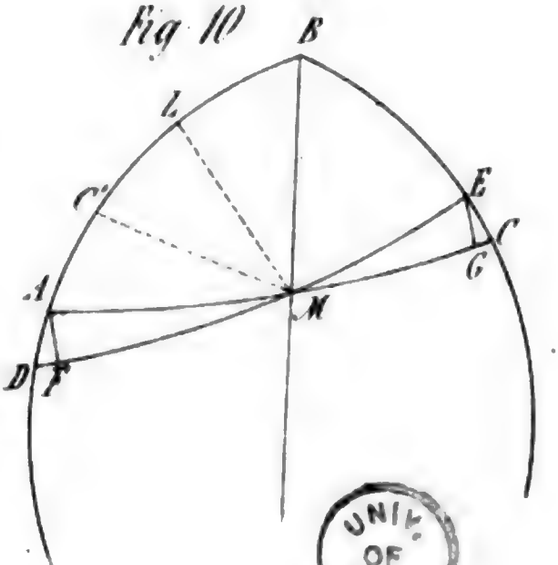


Fig 10



UNIV. OF MICH.

Fig. 1

Fig. 3.

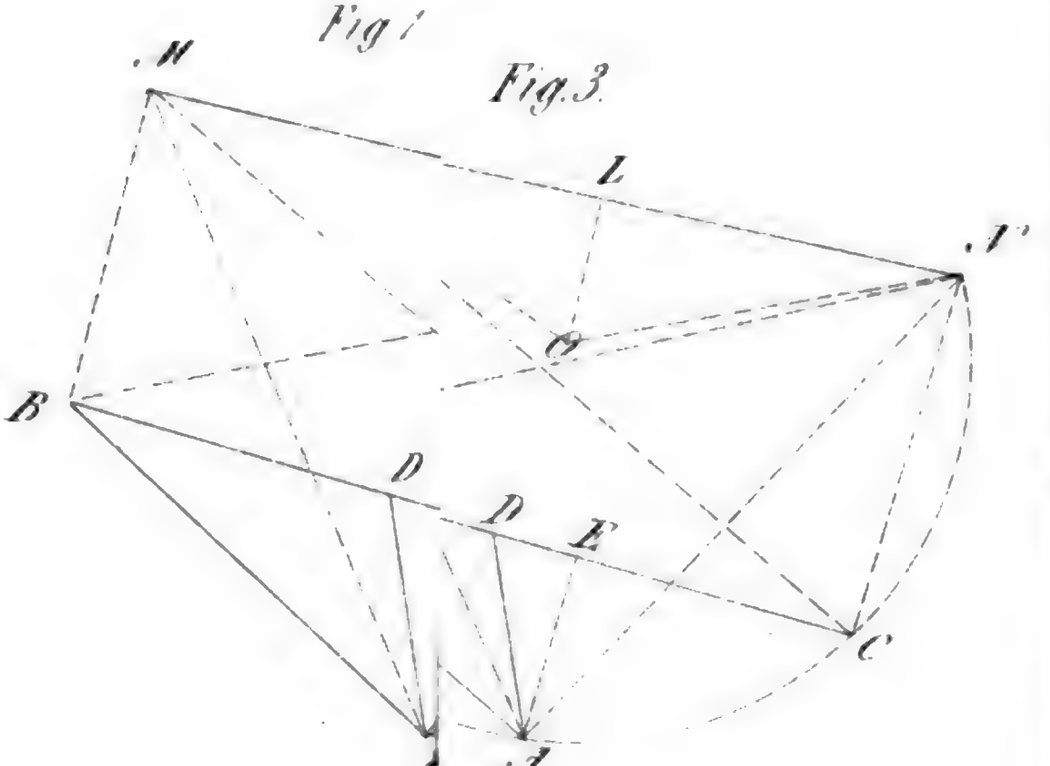
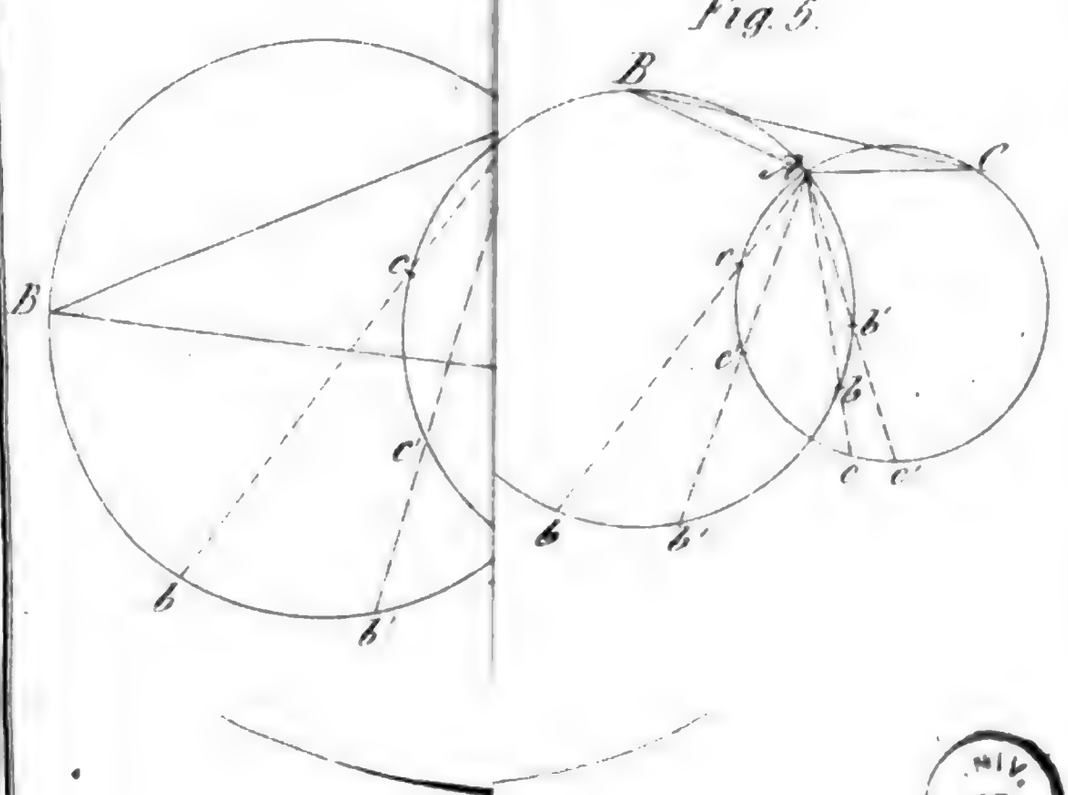


Fig. 5.

Fig. 5.



UNIV. OF MICH.

Fig 1.

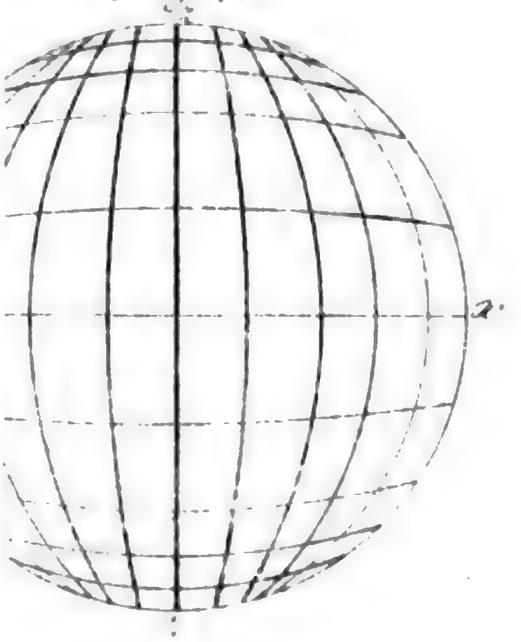


Fig 4.

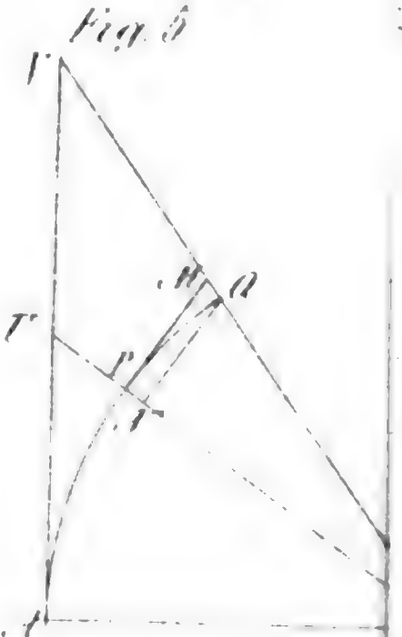
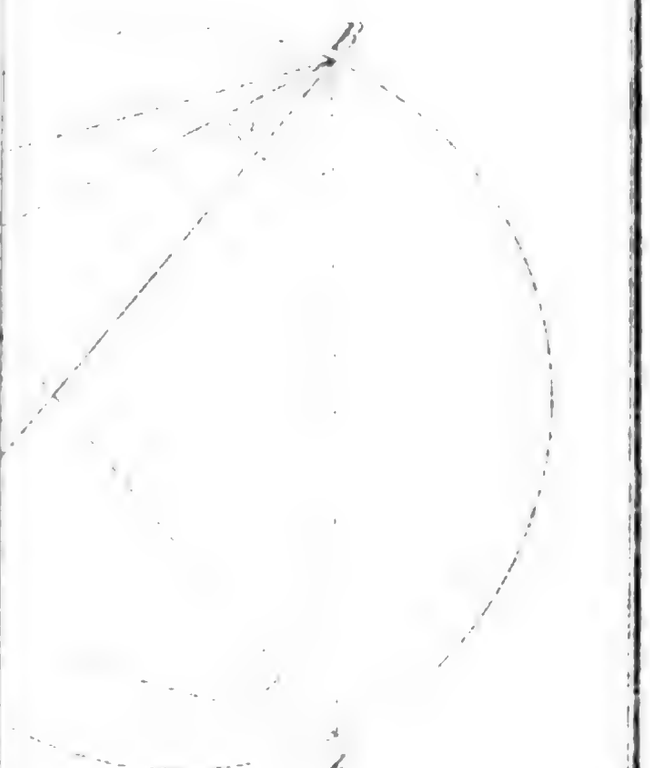


Fig 5



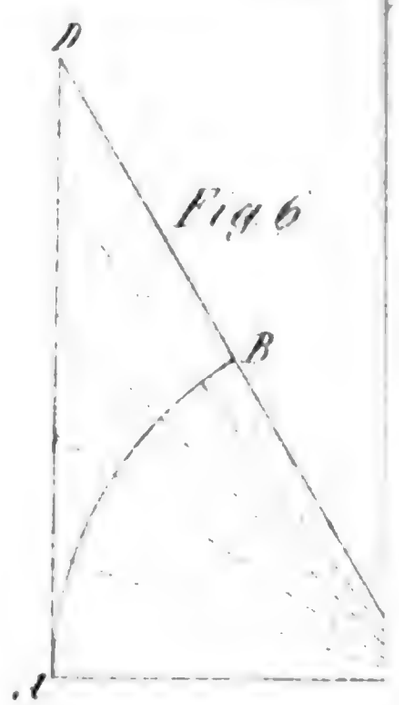


Fig 6

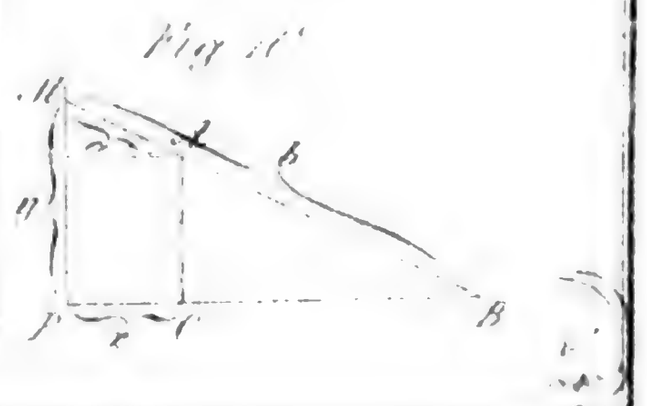


Fig 7.

Digitized by Google

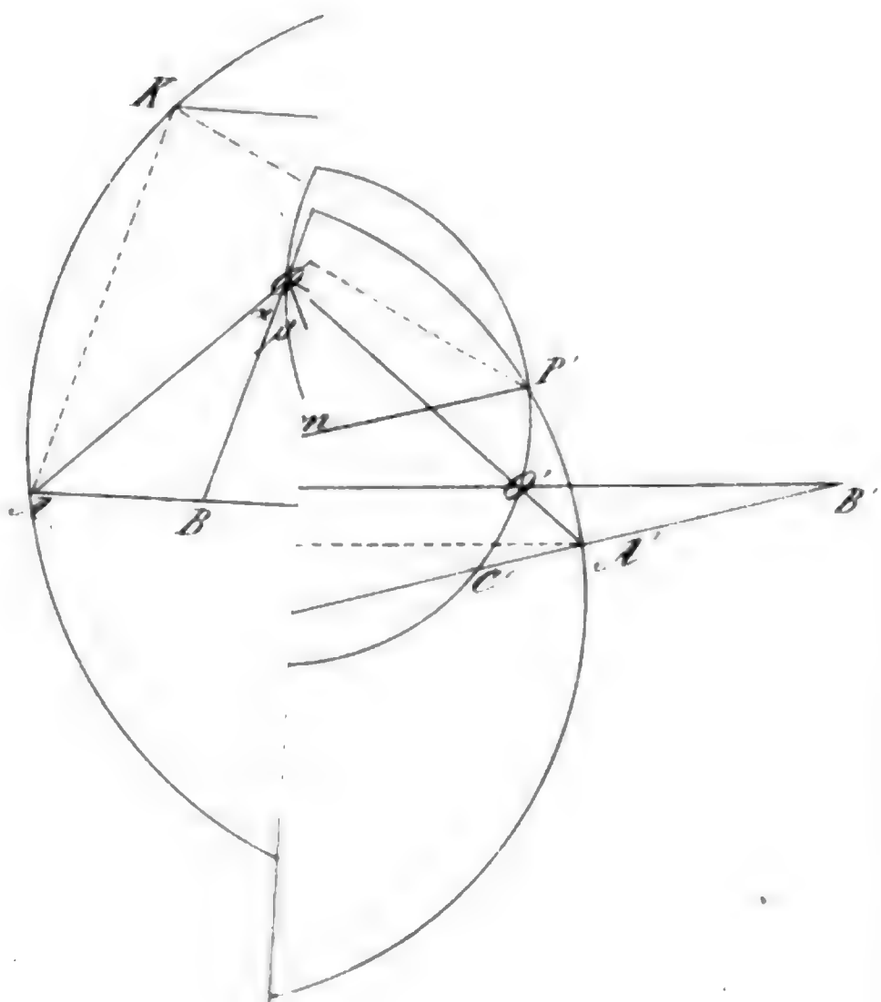
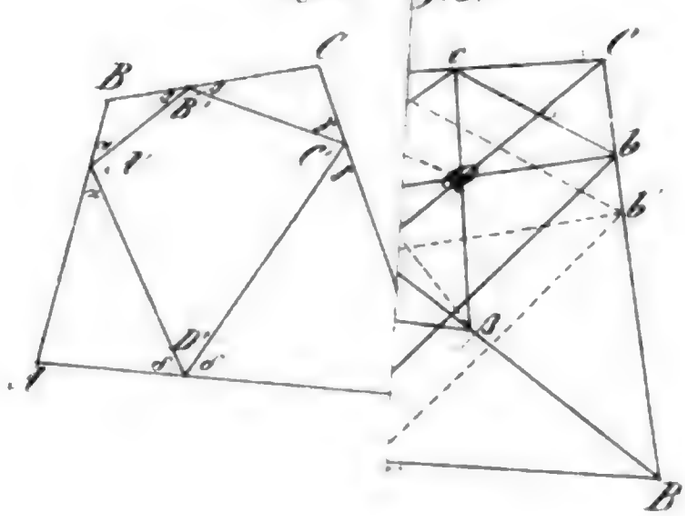


Fig. 3. g. 5.



UNIV. OF MICH.

Grunert Archiv

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig 1.

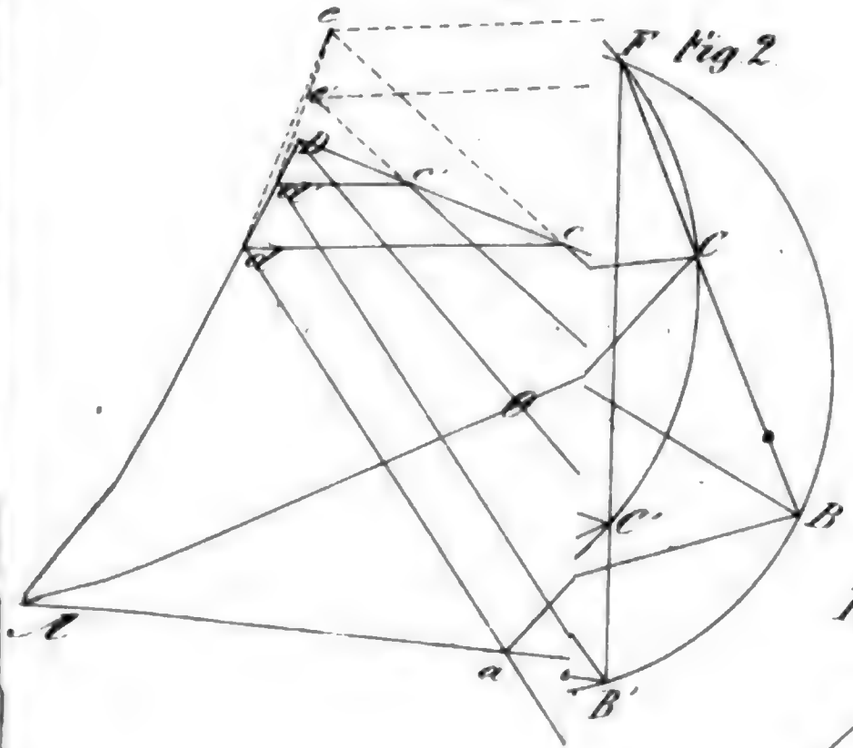


Fig 2.

Fig 4.

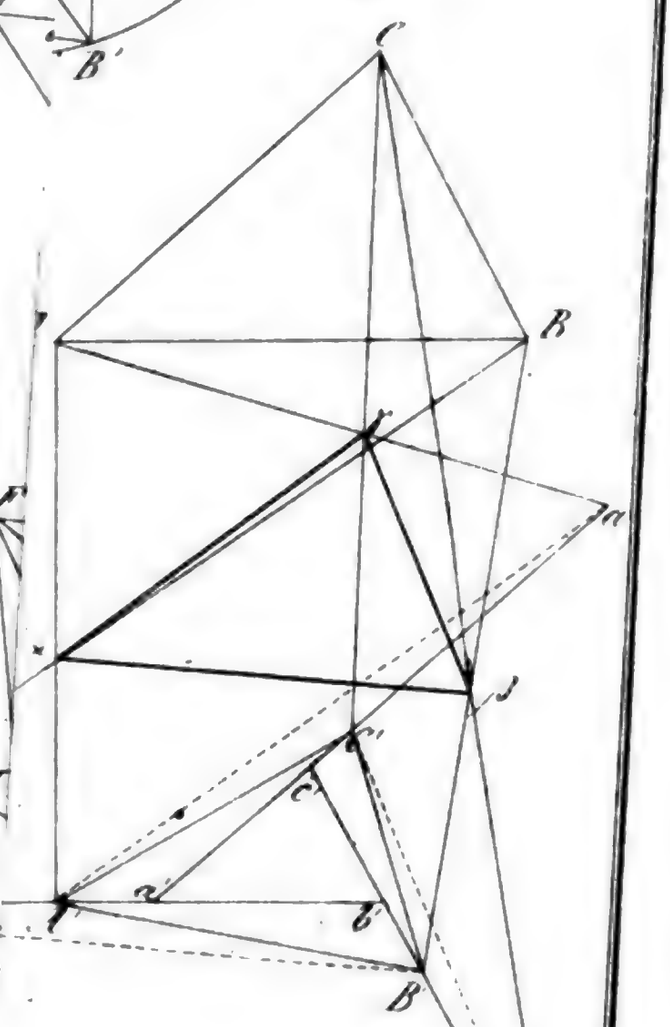
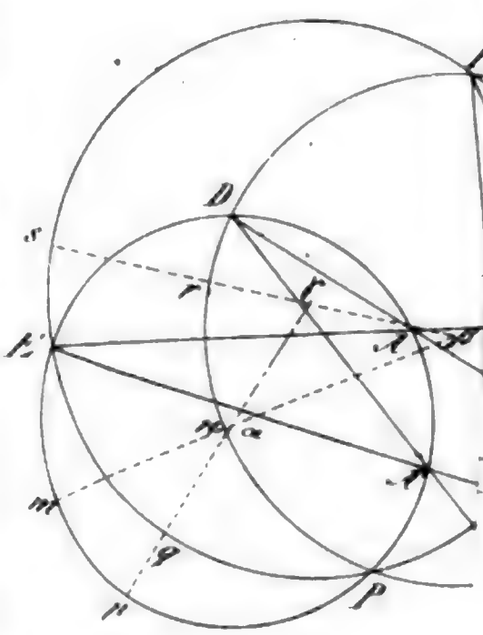


Fig 3.



UNIV. OF MICH.

Grunert. Archiv

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 2.

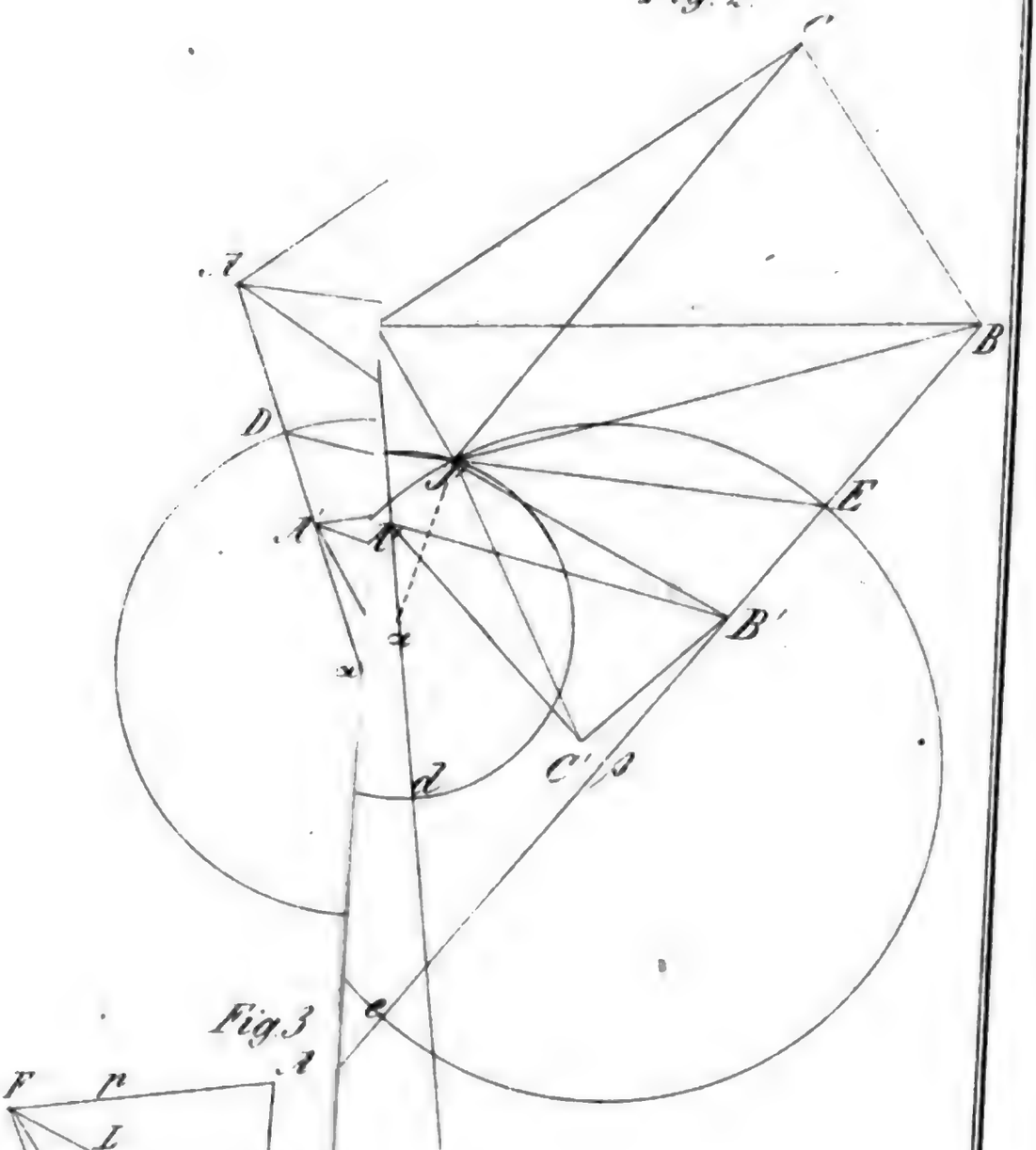


Fig. 3

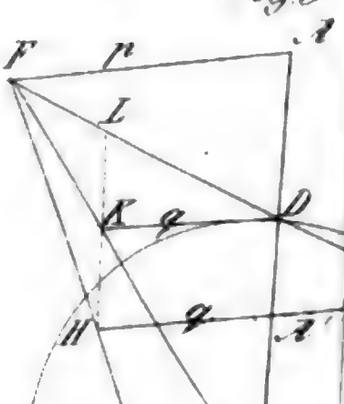
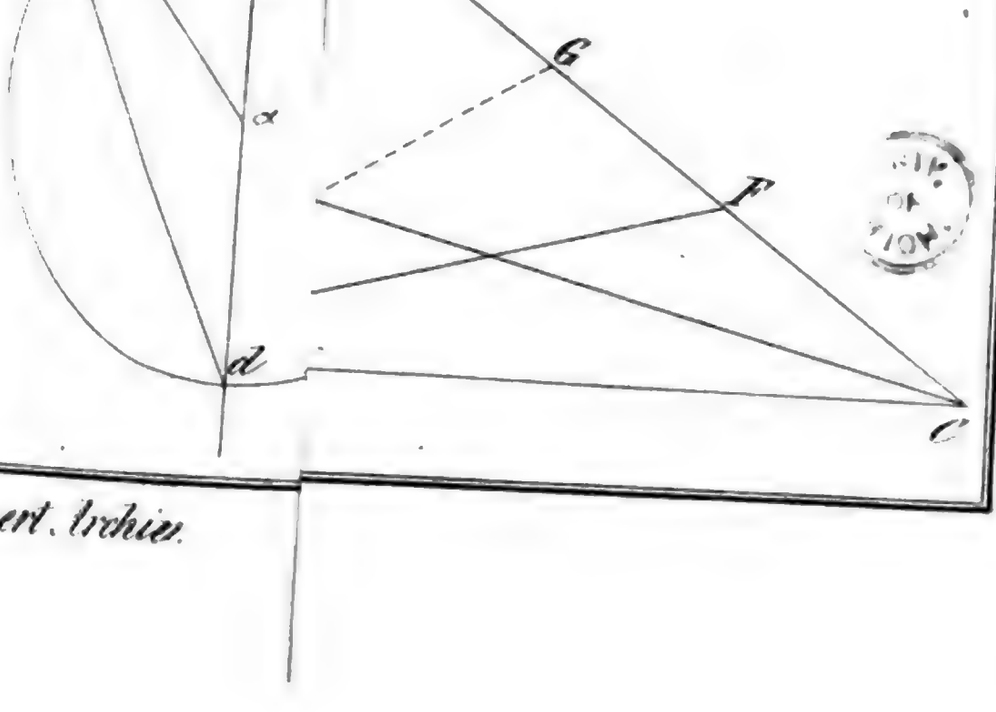


Fig. 5.



Grunert. Archiv.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig 3

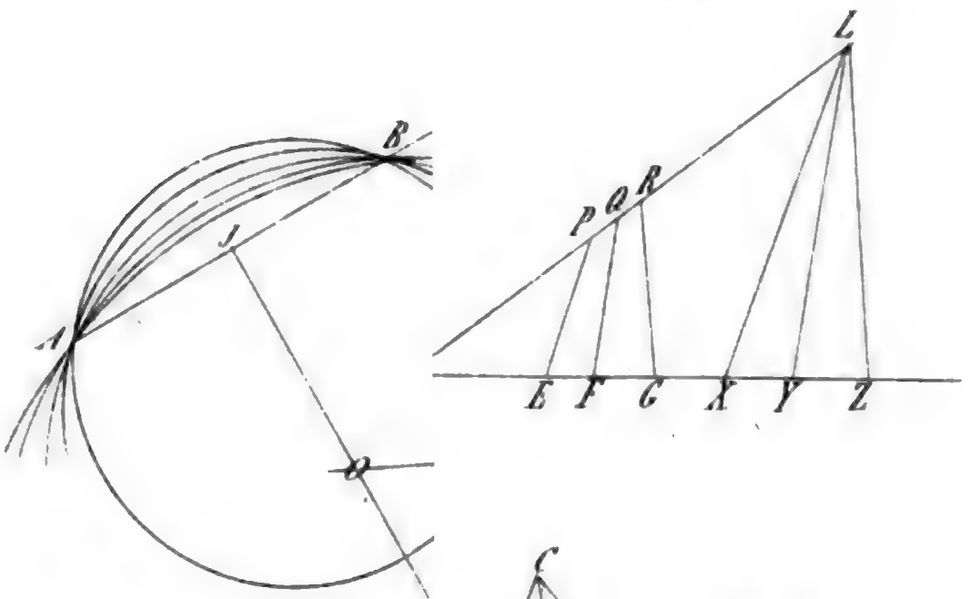


Fig 4

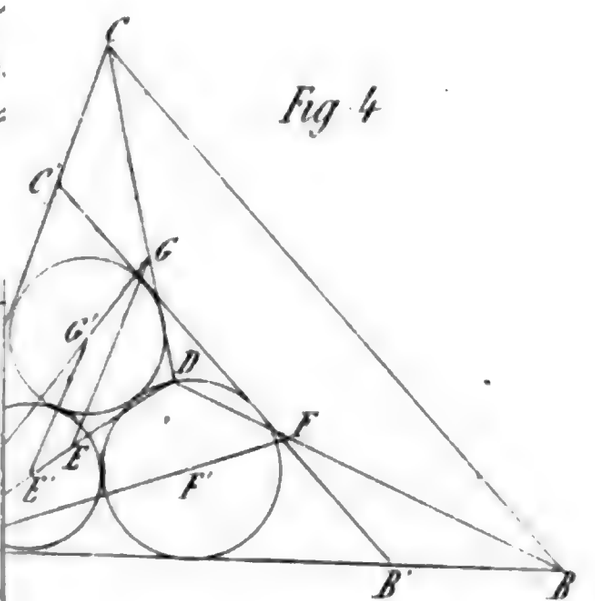
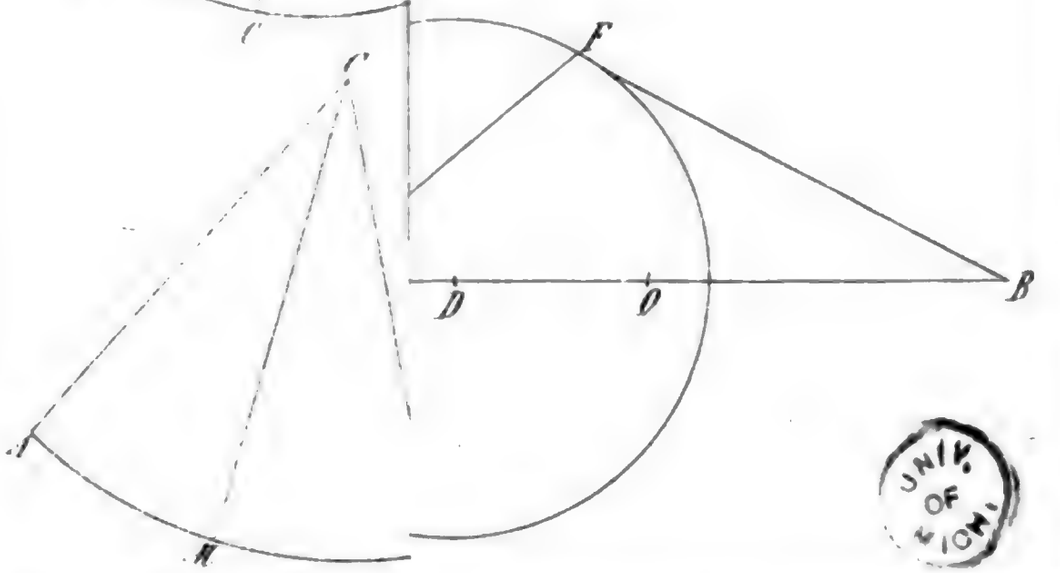


Fig 6

Fig 10



UNIV. OF ILLINOIS

Gruner Archiv

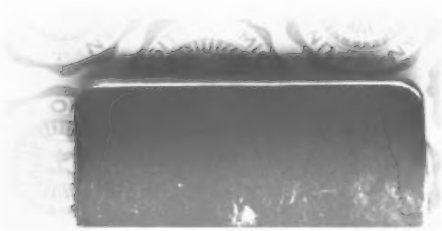
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 03698 0491
BOUND
DEC 19 1932
LIBRARY



Digitized by Google

Digitized by Google